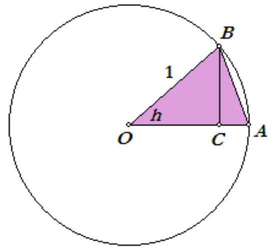
Over de afgeleide van de functie *f*(*x*) = sin *x*

We bekijken de oppervlakte van driehoek OAB in de *eenheidscirkel* met middelpunt O (daarbij is $\mathcal{F}$ de functie die de oppervlakte van een gesloten figuur aan die figuur toevoegt).



Met BC loodrecht op OA en $\angle BOA = h$ hebben we:

$$\sin h = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC$$
$$\mathcal{F}(OAB) = \tfrac{1}{2}\cdot OA\cdot BC = \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin h = \tfrac{1}{2}\sin h$$

Met $h = \dfrac{2\pi}{n}$ is dan verder:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\mathcal{F}(OAB)\right) = \mathcal{F}(\mathit{eenheidscirkel}) = \pi$$

zodat:
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot\pi = \pi$$

En hieruit volgt:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = 1$$

Met $n\to\infty$ hebben we ook $h\to 0$, zodat:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad (1)$$

Voor de afgeleide van de functie $f(x) = \sin x$ geldt *per definitie*:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Zodat:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)$$
$$= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

En dan is volgens (1):
$$(\sin x)' = \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \qquad (2)$$

Stellen we nu $L = \dfrac{\cos h - 1}{h}$, dan volgt:

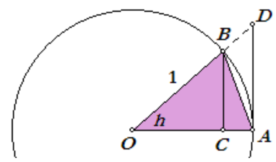
$$L = \frac{\cos(2\cdot\frac{1}{2}h)-1}{h} = \frac{(1-2\sin^2(\frac{1}{2}h))-1}{h} = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}h}{h} = -\sin\tfrac{1}{2}h\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

zodat:
$$\lim_{h\to 0} L = -0\cdot 1 = 0 \qquad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt dan:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \sin x \cdot 0 + \cos x \\ &= \cos x\end{aligned}$$ ♦

Opmerking 1. Uitdrukking (1) wordt meestal via *inklemming* bewezen.



Voor $0 < h < \frac{\pi}{2}$ is (zie de figuur hierboven):

$$BC < bg(AB) < AD$$

$$\sin h < h < \tan h = \frac{\sin h}{\cos h}$$

Deling door sin *h* geeft dan, na omkering:

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

Wegens $\lim_{h\downarrow 0} \cos h = 1$, is dan ook: $$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad (4a)$$

En ook is voor *negatieve* (*kleine* waarden van) *h*, met *k* = - *h*:

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{k\downarrow 0} \frac{\sin(-k)}{-k} = \lim_{k\downarrow 0} \frac{-\sin k}{-k} = \lim_{k\downarrow 0} \frac{\sin k}{k} = 1 \qquad (4b)$$

Uit (4a) en (4b) vinden we dan: $$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$ ♦

Opmerking 2. Voor *L* kunnen we ook schrijven:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}\end{aligned}$$

En dit geeft, ook weer met (1): $$\lim_{h\to 0} L = -0 \cdot \tfrac{0}{2} = 0$$

Hetgeen we ook al vonden in (3). ♦

Gevolg

Voor de functie *g*(*x*) = cos *x* geldt voor iedere *x*:

$$g(x) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x)$$

Zodat we, met gebruikmaking van de *kettingregel* van de differentiaalrekening, vinden:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

En dan is ook, via de *quotiëntregel*:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

