

Een meetkundige (on)waarschijnlijkheid

[Dick Klingens]

0.

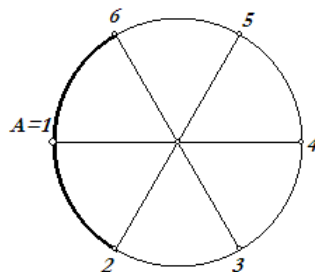
Gegeven is een vaste cirkel met straal r . Hoe groot is de kans dat de lengte van een *willekeurig* getrokken koorde in die cirkel kleiner is dan r ?

We zullen laten zien, dat de gevraagde kans afhangt van de manier waarop de koorde getekend wordt.

1.

Zij AB de koorde. We kiezen eerst het punt A op de cirkel en vervolgens het punt B . De keuze van A is niet aan voorwaarden gebonden, maar bij de keuze van B maken we de - overigens niet onterechte - afspraak dat, bij een verdeling van de cirkel in n gelijke delen, de kans dat B in zo'n deel terecht komt, voor alle delen gelijk is.

figuur 1



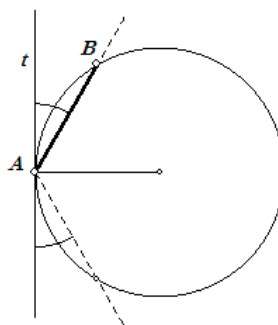
Zie *figuur 1*. We kiezen $n = 6$ en maken een verdeling van de cirkel waarbij het punt A één van de deelpunten is.

Voor $AB < r$ zijn er nu 2 gunstige mogelijkheden, immers B moet op de boog 2-1-6 gekozen worden.

De gevraagde kans is dus $P(AB < r) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

In het algemene geval is de kans dat B op een boog met lengte s terecht komt gelijk aan $\frac{s}{2\pi r}$.

figuur 2



We kunnen een en ander ook in termen van hoeken formuleren. We kiezen het punt A weer willekeurig op de cirkel en daarna tekenen we een koorde AB die met de raaklijn t in A aan de cirkel een hoek maakt tussen 0° en 180° (zie *figuur 2*).

Voor zo'n hoek die kleiner is dan 30° of groter dan 150° , is de lengte van de koorde kleiner dan die van de straal van de cirkel.

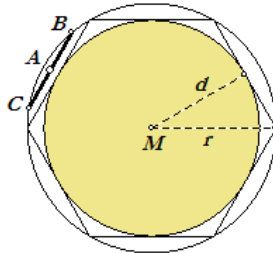
Voor de gezocht kans $P(AB < r)$ vinden we daarmee ook:

$$P(AB < r) = \frac{30+30}{180} = \frac{1}{3}$$

2.

We kiezen het punt A nu niet *op* de cirkel, maar *erbinnen*. En we eisen dat A dan het midden is van een koorde BC die kleiner is dan r (zie *figuur 3*).

figuur 3



De afstand d van het middelpunt M van de cirkel tot een zijde van een in die cirkel ingeschreven regelmatige zeshoek is gelijk aan:

$$d = r \cos 30^\circ = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$$

waarmee d dan de lengte is van de straal van de ingeschreven cirkel van die zeshoek.

Kiezen we A buiten die incirkel, dan is BC kleiner dan r .

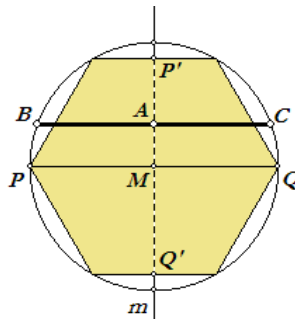
De kans kan in dit geval worden bepaald via de oppervlaktes van de beide cirkels:

$$P(BC < r) = \frac{\text{opp}(\text{ring})}{\text{opp}(\text{grootste cirkel})} = \frac{\pi r^2 - \pi \cdot (\frac{1}{2} r \sqrt{3})^2}{\pi r^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

3.

De getekende koorde is evenwijdig aan een zekere middellijn PQ van de cirkel. Het punt A ligt dan op de middellijn m die loodrecht op PQ staat (zie *figuur 4*).

figuur 4



Zoals we bij punt 2 gezien hebben, is de afstand van M tot een zijde van een ingeschreven regelmatige zeshoek van de cirkel gelijk aan $d = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$. De lijn m snijdt twee zijden van deze zeshoek in de punten P' en Q' .

Gunstig voor A is in dit geval een positie *buiten* het lijnstuk $P'Q'$, maar *binnen* de cirkel, zodat, en nu op basis van lengtes van lijnstukken:

$$P(BC < r) = \frac{2r - 2 \cdot \frac{1}{2} r \sqrt{3}}{2r} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad (\approx 0,13)$$

We vinden hiermee drie *juiste*, maar *verschillende* antwoorden op de in punt 0 gestelde vraag.

De vraag die *dán* rest is natuurlijk hoe dat komt...

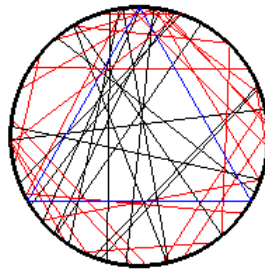
Tot slot

5. On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?

Hetgeen in de voorgaande paragrafen beschreven is, staat bekend als de *Paradox van Bertrand*. Joseph Louis Bertrand (1822-1890, Frankrijk) stelt in 1889 in zijn boek *Calcul des probabilités* het probleem in een iets andere vorm (zie [1; pp. 4-5] en ook *figuur 5*):

Hoe groot is de kans dat de lengte van een willekeurige koorde van een cirkel kleiner is dan de lengte van een zijde van een in die cirkel ingeschreven gelijkzijdige driehoek?

figuur 5



Bertrand lost het door hem gestelde het probleem evenwel op door de kans te berekenen - hij rekent trouwens bijna niet - dat de koorde *langer* is dan de zijde van de driehoek en geeft daarbij als antwoorden: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$.

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

De lezer wordt aangemoedigd Bertrands antwoorden te verifiëren (wellicht worden daarbij dan nog andere mogelijke antwoorden gevonden...).

En, leerlingen confronteren met deze paradox mag natuurlijk ook!

Literatuur

- [1] Joseph Bertrand (1889): *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars et Fils.
Het boek is digitaal beschikbaar via: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99602b/>
- [2] En uiteraard via *Google* met als zoekwoorden: *bertrand paradox -russell* (let wel, er staat een minteken voor *russell* om te voorkomen dat een andere paradox gevonden wordt dan de bedoelde).

Over de auteur

Dick Klingens is als wiskundeleraar verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Daarnaast is hij eindredacteur van *Euclides*.

E-mailadres: dklingens@pandd.nl