We worden ouder…

[Daaf Spijker]

Actueel

Ja, we worden inderdaad ouder, we ontkomen er niet aan. De lezer van de voorgaande zin kan de titel van dit artikel zeker beamen: als de punt aan het einde van die zin gelezen is (trouwens ook van *deze* zin), dan is hij/zij ouder geworden (niet veel, maar toch…).
Het ouder worden staat al enige tijd in de belangstelling. En niet alleen door de mogelijke verhoging van de pensioenleeftijd naar 67 jaar; zie het bericht in *Trouw* ***in figuur 1***.

Levensverwachting stijgt amper

Mannen genieten nauwelijks langer van hun pensioen dan vijftig jaar geleden. De levensverwachting van een 65-jarige is in een halve eeuw met nog geen twee jaar gestegen.

Deze cijfers van het Centraal Bureau voor de Statistiek staan haaks op het wijdverbreide idee, dat we allemaal stukken ouder worden. Dat idee is ook wel terecht: sinds 1900 is de levensverwachting van mannen gestegen van 47 naar ruim 75 jaar. Maar dat is het perspectief van pasgeborenen. Hun levensweg is vooral verlengd, doordat in de afgelopen eeuw de kindersterfte is teruggedrongen en het aantal verkeersslachtoffers is verminderd. En elke vermeden sterfte van een jongere weegt zwaar in de statistieken.

Maar vanaf het 65ste jaar is er niet veel veranderd. De Nederlandse man heeft bij het bereiken van de pensioenleeftijd nu nog gemiddeld 15,4 jaar te gaan, anderhalf jaar meer dan de 65-jarige uit 1960. In 1861 had een man van die leeftijd nog altijd ruim 10 jaar voor de boeg. Voor 65-jarige vrouwen is de winst groter: zij zijn er in een halve eeuw 3,6 jaar op vooruit gegaan.

Toch wordt de hogere levensverwachting vaak gebruikt als argument om de pensioenleeftijd op te hogen. Dat is dus niet terecht, maar het neemt niet weg, dat de vergrijzing een probleem wordt.

figuur 1 Bron: Trouw (4 januari 2006)

In januari 2010 maakte het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) bekend dat de *levensverwachting* van in 2008 geboren meisjes 82,3 jaar is, en dat is (precies?) vier jaar hoger dan die van in 2008 geboren jongens; die is 78,3.
Het Actuarieel Genootschap (AG) deed er daarna in augustus nog een schepje bovenop met de publicatie van een *prognose* waarin de *levensverwachting* voor mannen in 2050 op 85,9 jaar uitkomt en die voor vrouwen op 87,6 jaar.
Een (forse(?)) stijging dus, maar het verschil tussen beide seksen wordt kleiner!
In de Troonrede van 21 september j.l.: ‘Het Nederlandse pensioenstelsel is robuust in vergelijking met de stelsels van andere landen. Maar maatregelen zijn noodzakelijk omdat de stijgende *levensverwachting* de pensioenuitkeringen onder druk zet.’ En even verderop: ‘Onze stijgende *levensverwachting* is een groot goed. Tegelijkertijd stelt zij de samenleving voor nieuwe uitdagingen.’ En ook nog: ‘zijn, door de groeiende vraag naar zorg, de kosten [daarvan] in de afgelopen jaren sterk toegenomen. Dit wordt veroorzaakt door steeds grotere technologische verbeteringen en de stijgende *levensverwachting*.’
En begin oktober in *de Volkskrant* [1]: ‘We leven steeds langer. Maar waarom verrast die gestaag stijgende *levensverwachting* ons dan toch telkens weer? De prognoses zijn niet stabiel, vermoeden sommige experts.’

Maar wat is ‘levensverwachting’ eigenlijk? En ook, hoe wordt die levensverwachting berekend?

Actuarieel

Het CBS publiceert periodiek gegevens omtrent de sterfte in Nederland (voor de mannelijke en vrouwelijke bevolking apart). Die gegevens worden opgenomen in een zogenoemde *overlevingstafel*. Daarin staan voor elke *gehele x*:

- het aantal levende mannen (of vrouwen) met leeftijd x (op een bepaalde peildatum, meestal 1 januari), aangegeven met l_x;
- het *sterftequotiënt* q_x voor personen met leeftijd x. Dat is het quotiënt van het aantal personen d_x dat overleden is in hun $(x + 1)$-de levensjaar, en l_x.
  In formule: $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$.

Een van de bewerkingen die op deze gegevens wordt toegepast, is een zodanige herleiding en herberekening dat $l_0 = 100.000$ (zie figuur 2, waarin – als voorbeeld – ook $l_{0,5}$ is opgenomen).
Het AG bewerkt op zijn beurt de jaarlijkse CBS-gegevens over een periode van 5 à 6 jaar, en geeft op basis daarvan de zogenoemde GBM- en GBV-tafels [2] uit, die in de praktijk (onder meer) door verzekeringsmaatschappijen worden gebruikt. Daardoor zijn de getallen in de AG-tafels niets anders dan gemiddelden. Zo is q_x in de overlevingstafel van figuur 2 voor elke x berekend als:

$$q_x = \frac{q_x^{(1995)} + q_x^{(1996)} + \ldots + q_x^{(2000)}}{6}$$

(Eigenlijk worden de waarden van l_x met q_x berekend uitgaande van $l_0 = 100.000$.)
En ook, de leeftijden worden als *gehele* getallen (de burgerlijke leeftijd) beschouwd op de peildatum. We hebben dus te maken met een *model* voor een *fictieve* (mannelijke of vrouwelijke) bevolking.
We spreken van een *actuarieel model* omdat de rekentechnieken die gebruikt worden, afkomstig zijn uit de *actuariële wiskunde*

x	l_x	q_x
0	100 000	0.0040800
0.5	99 592	0.0017681
1	99 461	0.0005029
2	99 366	0.0003724
3	99 329	0.0002517
4	99 304	0.0002115
5	99 283	0.0001914
6	99 264	0.0001713
7	99 247	0.0001411
8	99 233	0.0001411
9	99 219	0.0001411
10	99 205	0.0001310

figuur 2 Deel van een ‘mannentafel’ (gebaseerd op GBM 1995-2000)

(ook *verzekeringswiskunde* genoemd).
Binnen dat actuariële model kunnen berekeningen worden uitgevoerd, zoals die van de ‘levensverwachting’. Maar wat daaronder wordt verstaan, moet dan eveneens *binnen* dat model worden vastgelegd.

Voorbeeld – Stel het laatste deel van een overlevingstafel ziet er uit als ***in figuur 3***. Daarbij is ook al een eerste berekening gemaakt, namelijk die van de waarden van d_x: het aantal overledenen in het jaar dat volgt op de peildatum.
Hiermee is dus: $d_x = q_x \cdot l_x = l_x - l_{x+1}$
Merk op dat $d_{100} + d_{101} + \ldots + d_{109} = l_{100}$ (immers, alle 100-jarigen zijn na 9 jaar, d.w.z. aan het einde van het 109e jaar, overleden).

x	l_x	q_x	d_x
100	221	0,4162896	92
101	129	0,4263566	55
102	74	0,4324324	32
103	42	0,4523810	19
104	23	0,4782609	11
105	12	0,5000000	6
106	6	0,5000000	3
107	3	0,3333333	1
108	2	0,5000000	1
109	1	1,0000000	1
110	0		

figuur 3 Laatste deel van GBM 1995-2000

Door deze manier van rekenen kan de totale *jaarlijkse* sterfte dus pas worden vastgesteld aan het *einde* van het beschouwde jaar.
We nemen daarom eerst maar eens aan

dat *alle* sterfte in elk jaar *aan het einde* van dat jaar plaats vindt. Dan kunnen we het (*verwachte*) aantal L van de *doorleefde* jaren van de 221 mannen die 100 jaar zijn, eenvoudig uitrekenen:

$$L = 92\times1+55\times2+32\times3+\ldots+1\times9+ \\ +1\times10=513$$

Of ook:

$$L = d_{100}\times1+d_{101}\times2+\ldots+d_{108}\times9+ \\ +d_{109}\times10=513$$

Gemiddeld is dat dan: $\frac{513}{221}\approx 2{,}32$ jaar.

Die 100-jarigen worden in dit geval, naar verwacht en met de genoemde veronderstelling (en binnen het actuariële model), gemiddeld 100 + 2,32 = 102,32 jaar.

Doorleefd

De leeftijd x waarvoor $l_x \neq 0$ én $l_{x+1} = 0$ geven we aan met ω (*omega*). In de overlevingstafel ***van figuur 3*** is dus ω = 109. Nu geldt algemeen, met L_l = het aantal doorleefde jaren van een groep bestaande uit l_x personen van wie de sterfte *aan het einde* van een jaar plaatsvindt (de index l van L staat voor 'lang'):

$$L_l = d_x\cdot1+d_{x+1}\cdot2+d_{x+2}\cdot3+\ldots+ \\ +d_{\omega-1}\cdot(\omega-x)+d_\omega\cdot(\omega-x+1)$$

We zetten nu de termen van het rechterlid van L_l handig onder elkaar:

$$\begin{array}{l} d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+\ldots+d_{\omega-1}+d_\omega+ \\ \quad +d_{x+1}+d_{x+2}+\ldots+d_{\omega-1}+d_\omega+ \\ \qquad\quad +d_{x+2}+\ldots+d_{\omega-1}+d_\omega+ \\ \qquad\qquad\quad +\ldots \qquad \ldots+ \\ \qquad\qquad\qquad +d_{\omega-1}+d_\omega+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +d_\omega \end{array}$$

En dan blijkt dat:

$$L_l = l_x+l_{x+1}+l_{x+2}+\ldots+l_{\omega-1}+l_\omega \\ =\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j}$$

Of ook, met een gewijzigde eindwaarde van j in de sommatie:

$$L_l=\sum_{j=0}^{\omega} l_{x+j}$$

Immers, door wijziging van de eindwaarde van j worden de termen $l_{\omega+1}, l_{\omega+2}, \ldots$ toegevoegd. Maar die zijn alle gelijk aan 0. Vervolgens…

Als we aannemen dat *alle* sterfte *aan het begin* van het jaar plaats vindt, dan is het aantal L_k van de doorleefde jaren (de index k van L staat voor 'kort'):

$$L_k = d_x\cdot0+d_{x+1}\cdot1+d_{x+2}\cdot2+\ldots+ \\ +d_{\omega-1}\cdot(\omega-x-1)+d_\omega\cdot(\omega-x) \\ =\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j}$$

en dus ook:

$$L_k=\sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j}$$

We kunnen L_l schrijven als:

$$L_l = l_x+\sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j} = l_x+L_k$$

en daaruit zien we dat: $L_l - L_k = l_x$.

We definiëren nu:

- de **verkorte** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan $\bar{e}_{k,x}=\frac{L_k}{l_x}$;
- de **verlengde** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan: $\bar{e}_{l,x}=\frac{L_l}{l_x}$.

Merk op dat deze levensverwachtingen eveneens gemiddelden zijn, en, binnen het actuariële model, gebaseerd zijn op bepaalde veronderstellingen.

Ook kunnen we de sterfte die plaats vindt in de *eerste helft* van een jaar, *aan het begin* van dat jaar zetten, en de sterfte die plaats vindt in de tweede helft, *aan het einde* van het jaar.

Dan geldt voor het aantal L van de doorleefde jaren in dit geval:

$$L=\tfrac12 L_l+\tfrac12 L_k$$

L is dan zeker een betere benadering (maar nog steeds een *benadering*) van het *werkelijk* aantal doorleefde jaren dan de verkorte of de verlengde levensverwachting.

Uit $L_l - L_k = l_x$ volgt na deling door l_x:

$$\bar{e}_{l,x}-\bar{e}_{k,x}=1$$

Gevolg:

$$\frac{L}{l_x}=\tfrac12\bar{e}_{l,x}+\tfrac12\bar{e}_{k,x}=\tfrac12\bar{e}_{l,x}+\tfrac12(\bar{e}_{l,x}-1) \\ =\bar{e}_{l,x}-\tfrac12$$

Levensverwachting

We definiëren op grond van het bovenstaande:

- de ***gemiddelde*** *levensverwachting* van een x-jarige is gelijk aan: $\bar{e}_x=\bar{e}_{l,x}-\frac12$.

Opmerking 1. Er geldt, analoog, overigens ook: $\bar{e}_x=\bar{e}_{k,x}+\frac12$.

Opmerking 2. We kunnen dit laatste ook op een andere manier inzien. Als de sterfte in de eerste helft van een jaar *aan het begin* van dat jaar wordt gezet (en de sterfte in de tweede helft aan het einde van het jaar), dan is het totaal L_1 van de doorleefde jaren van een groep bestaande uit l_x personen in het $(x + 1)$-de jaar gelijk aan:

$$L_1=l_x-\tfrac12 d_x \\ =l_x-\tfrac12(l_x-l_{x+1})=\tfrac12(l_x+l_{x+1})$$

Voor het totaal L van alle doorleefde jaren van deze personen geldt dan:

$$L=\tfrac12\sum_{j=0}^{\omega}(l_{x+j}+l_{x+1+j}) \\ =\tfrac12 l_x+\tfrac12\sum_{j=0}^{\omega}(l_{x+1+j}+l_{x+j+1}) \\ =\tfrac12 l_x+\sum_{j=0}^{\omega} l_{x+j+1}=\tfrac12 l_x+\sum_{j=1}^{\omega} l_{x+j} \\ =\tfrac12 l_x+L_{k,x}$$

Deling door l_x geeft dan: $\bar{e}_x=\frac12+\bar{e}_{k,x}$.

Rekenen

En dán kunnen we rekenen… mits we beschikken over een overlevingstafel (voor mannen of voor vrouwen) met waarden van l_x cq. l_y (voor x, y = 0, 1, 2, …, ω) [3].

Het resultaat van zo'n berekening staat ***in figuur 4***.

mannen		vrouwen	
x	$\bar{e}_x$	y	$\bar{e}_y$
0	***75,06***	***0***	***80,48***
10	75,65	10	80,98
20	75,84	20	81,10
30	76,29	30	81,27
40	76,58	40	81,57
50	77,32	50	82,21
60	78,78	60	83,31
65	79,98	65	84,12
70	81,63	70	85,19
80	86,42	80	88,40
90	93,31	90	93,95
100	101,82	100	101,93

figuur 4 Gemiddelde levensverwachting (gebaseerd op GBM/GBV 1995-2000)

En… Als er wordt gesproken over ***de*** *levensverwachting* van een man of een vrouw, dan wordt daarmee dus bedoeld: de *gemiddelde levensverwachting van een 0-jarige* binnen het opgestelde actuariële model.

Maar of de zo berekende levensverwachting van toepassing is op de 'echte' bevolking, daarover bestaat, ook bij deskundigen, gegronde twijfel.

Noten

[1] Martijn van Calmthout (2010): *Rekenen op leven en dood*. In: *de Volkskrant* (zaterdag 2 oktober 2010); katern Wetenschap, p1-p2.

[2] GBM staat voor 'gehele bevolking, mannen' en GBV voor 'gehele bevolking, vrouwen'.

[3] Een overlevingstafel gebaseerd op GBM 1995-2000 kan als PDF-bestand worden gedownload via: *www.pandd.nl/downloads/mannen95.pdf*

Over de auteur

Daaf Spijker was actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider, schoolleider en (weer) wiskundeleraar. Nu is hij pensioengenietend, maar nog steeds geïnteresseerd in zijn 'eerste' vak.

E-mailadres: *spijker.daaf@gmail.com*