Gemiddelde rijen

DICK KLINGENS (*dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (Nederland)
december 2007

Hunc limitem vocamus *numerum medium arithmetico-geometricum inter a et b*, et per M(a, b) designamus.
C.F. Gauss: *De origine…* (zie [4a])

1. Vooraf

Het *rekenkundig* gemiddelde x van (tussen) twee getallen a en b wordt gedefinieerd door:

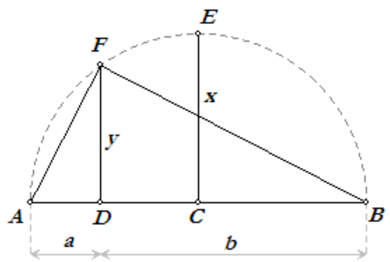
$$x = \tfrac{1}{2}(a+b)$$

Het *meetkundig* gemiddelde y van (tussen) a en b wordt gedefinieerd door:

$$y = \sqrt{ab}$$

Een eenvoudige manier om in te zien dat voor *verschillende* getallen a en b (zeg, om de gedachten te bepalen: $0 < a < b$) geldt dat $x > y$, vinden we geïllustreerd in een (halve) cirkel waarvan $AB = a + b$ een middellijn is (***zie figuur 1***):

figuur 1



Met $AD = a$ en $BD = b$ is in de in F rechthoekige driehoek ABF (dit is een zogenoemde *Thales-driehoek*):

$$y^2 = FD^2 = AD \cdot BD = ab$$

zodat:

$$y = \sqrt{ab}$$

en voor de halve middellijn CE die in C loodrecht staat op AB:

$$x = CE = \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(a+b)$$

waaruit direct duidelijk is dat (met $a \neq b$) geldt: $\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$. ♦

2. Twee rijen

Op basis van het bovenstaande bekijken we nu de getallenrijen $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ (met $k \geq 0$ en geheel):

k =	0	1	2	3	…	n
a_k =	1	1,5000	1,4571	1,4568	…	$\tfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$
b_k =	2	1,4142	1,4565	1,4568	…	$\sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$

$\{a_k\}$ bestaat uit de rekenkundige gemiddelden van de termen
$\{b_k\}$ bestaat uit de meetkundige gemiddelden

We zien hieruit reeds na enkele berekeningen - tot en met $k = 4$ lijkt al voldoende - dat beide rijen convergeren naar eenzelfde waarde, die gelijk is aan iets als: 1,456791… Uiteraard is deze limiet afhankelijk van de beginwaarden $a_0 = 1$ en $b_0 = 2$.
Het vinden van een algebraïsche uitdrukking voor deze limiet is evenwel niet eenvoudig.

Opmerkingen

1. Dat de beide rijen naar dezelfde waarde convergeren is niet moeilijk te bewijzen. We bekijken daartoe de *verschilrij* $\{v_k\}$ met $v_k = a_k - b_k$ van de rijen. Hiervoor geldt voor zekere n:
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) - \sqrt{a_n b_n} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 > 0$$
Zodat: $\quad a_n > b_n \;\Rightarrow\; \sqrt{a_n} > \sqrt{b_n} \;\Rightarrow\; \sqrt{a_n b_n} > b_n$
Nu is: $\quad a_{n+1} - b_{n+1} \;<\; \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) - b_n = \tfrac{1}{2}(a_n - b_n)$
waaruit de convergentie van beide rijen naar eenzelfde waarde A volgt.
2. Dat de convergentie erg snel is, moge blijken uit:
$$a_5 - A \;\approx\; 4{,}3287 \times 10^{-34}$$
3. De gemeenschappelijke limiet van de rijen wordt wel het *rekenkundig-meetkundig gemiddelde* (Eng. a*rithmetic-geometric mean* = **agM**) van de (start)getallen a_0 en b_0 genoemd.
C.F. Gauss (1777-1885, Duitsland) vond in mei 1799 de waarde van agM(√2, 1) bij zijn onderzoek van *elliptische integralen* (zie [4a; p. 364]):

Exemplum 4. $a = \sqrt{2},\ b = 1.$

$''''a$ =	19,17024 37557 69475 31905 0	$''''b$ =	0,00000 00009 32560 02627 6
$'''a$ =	9,58512 18783 51017 67266 3	$'''b$ =	0,00013 37064 06056 69181 0
$''a$ =	4,79262 77923 78537 18223 7	$''b$ =	0,03579 93323 67652 95745 7
$'a$ =	2,41421 35623 73095 04880 2	$'b$ =	0,41421 35623 73095 04880 2
a =	1,41421 35623 73095 04880 2	b =	1,00000 00000 00000 00000 0
a' =	1,20710 67811 86547 52440 1	b' =	1,18920 71150 02721 06671 7
a'' =	1,19815 69480 94634 29555 9	b'' =	1,19812 35214 93120 12260 7
a''' =	1,19814 02347 93877 20908 3	b''' =	1,19814 02346 77307 20579 8
a'''' =	1,19814 02347 35592 20744 1	b'''' =	1,19814 02347 35592 20743 9

Ook **J.L. Lagrange** (1736-1813, Frankrijk) en **A.M. Legendre** (1752-1833, Frankrijk) hebben zich hiermee bezig gehouden, vandaar dat ook hun namen in verband met de functie agM worden genoemd.
M = agM(1, √2) = 1,198140… Het getal $\frac{1}{M} = 0{,}834626...$ wordt wel *constante van Gauss* [7] genoemd. ♦

Zoals reeds is opgemerkt, is de waarde van M niet eenvoudig algebraïsch te berekenen. Zie verder paragraaf 7.

3. Twee andere rijen

Wanneer we echter een andere definitie geven voor de rij $\{b_k\}$ (iets minder symmetrisch), dan blijkt dat dit wél kan.
We kiezen daarbij opnieuw $a_0 = 1$ en $b_0 = 2$. Voorts definiëren we nu voor $k \geq 1$:
$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$$
$$b_k = \sqrt{a_k \cdot b_{k-1}}$$
Dan is:

k =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_k =	1	1,5000	1,6160	1,6445	1,6516	1,6534	1,6538	1,6539	1,6540	…
b_k =	2	1,7321	1,6730	1,6587	1,6552	1,6543	1,6541	1,6540	1,6540	…

De limiet hier heeft de waarde: 1,65398…

We zullen aantonen dat beide rijen inderdaad naar dezelfde limiet convergeren. Daarbij *zien* we in de laatste tabel dat de rij $\{a_k\}$ stijgend is en de rij $\{b_k\}$ dalend. Deze beide laatste eigenschappen zullen we eerst *met inductie* naar k bewijzen.

Stap 1. Voor $k = 0$ geldt: $a_0 < b_0$.
Stap 2 (*inductie-veronderstelling*). Zij voor zekere $k = n$: $a_n < b_n$.
Stap 3. Nu is volgens de definitie van de rij $\{a_k\}$: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, zodat $a_n < a_{n+1} < b_n$.
En daarmee ook: $a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n+1}} < \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n} = b_{n+1}$ ♦

Uit stap 3 volgt nu:
(a) De rij $\{a_k\}$ is stijgend, immers, bij stap 3 is bewezen dat $a_n < a_{n+1}$.
(b) De rij $\{b_k\}$ is dalend, immers, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n} < \sqrt{b_n \cdot b_n} = b_n$.
(c) De rij $\{a_k\}$ heeft een bovengrens, immers, $a_n < b_n \le b_0$.
(d) De rij $\{b_k\}$ heeft een ondergrens, immers, $b_n > a_n \ge a_0$.

Stel nu dat $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \mathcal{A}$ en $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \mathcal{B}$.
Dan is:
$$\mathcal{A} = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_k + b_k) = \tfrac{1}{2}\mathcal{A} + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$
waaruit direct volgt dat $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. ♦

Opmerking. De convergentie kan ook direct worden afgeleid. Er geldt namelijk:
$$\begin{aligned} b_0^2 - a_0^2 &= (b_0 - a_0)(b_0 + a_0) = (b_0 - a_0)\cdot 2a_1 \\ &= 2b_0a_1 - 2a_1(2a_1 - b_0) = 4b_0a_1 - 4a_1^2 \\ &= 4(b_1^2 - a_1^2) \end{aligned}$$
Dus: $$b_0^2 - a_0^2 = 4(b_1^2 - a_1^2) = 16(b_2^2 - a_2^2) = 64(b_3^2 - a_3^2) = \ldots$$ ♦

4. Meetkundig rekenen

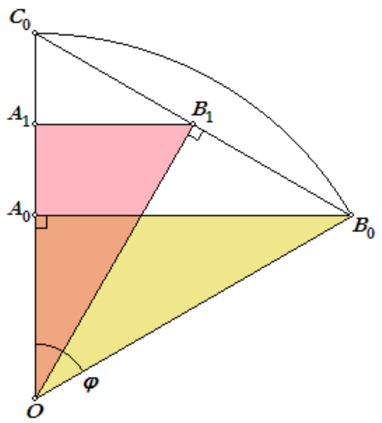
Daarmee is de waarde van $\mathcal{A}$ natuurlijk nog niet *berekend*. Om dit te doen roepen we de meetkunde te hulp.

Zij in de in A_0 rechthoekige driehoek OA_0B_0 (***zie figuur 2***):
- $OA_0 = a_0$;
- $OB_0 = b_0$, met $b_0 > a_0$.

Is verder C_0 het punt op het verlengde OA_0 met:
- $OC_0 = b_0$.

Het punt B_1 is dan het midden van het lijnstuk B_0C_0 en A_1 dat van A_0C_0.

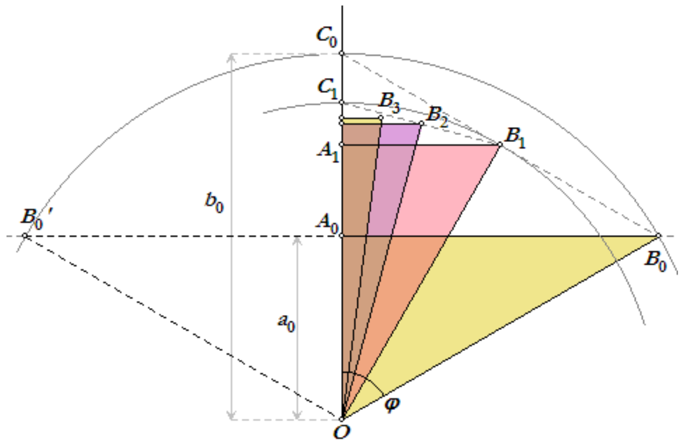
figuur 2



Nu is:
$$OA_1 = OC_0 - C_0A_1 = OC_0 - \tfrac{1}{2}C_0A_0$$
Zodat:
$$OA_1 = b_0 - \tfrac{1}{2}(b_0 - a_0) = \tfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$$
Dus: $OA_1 = a_1$
En daarmee is ook, in de rechthoekige driehoek
OB_1C_0: $OB_1^2 = OC_0 \cdot OA_1$
en dan: $OB_1 = \sqrt{b_0 \cdot a_1} = b_1$

En zo hebben we een meetkundige constructie gevonden van de termen van de in paragraaf 3 gedefinieerde rijen $\{a_k\}$ en $\{b_k\}$; ***zie figuur 3***.

figuur 3



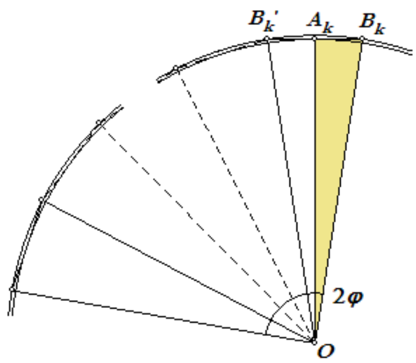
In de opvolgende, als hierboven geconstrueerde, driehoeken OA_0B_0, OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, … is nu (voor $k \geq 0$):

$$OA_k = a_k\,, \quad OB_k = b_k$$

Opmerkingen

1. Voor de zijden A_kB_k van de rij driehoeken OA_kB_k geldt: $A_kB_k = \frac{A_0B_0}{2^k}$.
2. Stellen we in driehoek OA_0B_0 dat $\angle A_0OB_0 = \varphi$, dan is $\angle A_kOB_k = \frac{\varphi}{2^k}$. Immers, het punt B_{k+1} is steeds het midden van de zijde B_kC_k in de gelijkbenige driehoek OB_kC_k. ♦

figuur 4



Wanneer we 2^k keer driehoek OA_kB_k - samen met de gespiegelde $OA_kB_k{}'$ daarvan in de lijn OA_k - naast elkaar leggen in het punt O, dan vormen deze driehoeken bij O een middelpuntshoek van 2φ (zie Opmerking 2 en ***figuur 4***).

De zijden $B_kB_k{}'$, … zijn dan een deel van een regelmatige veelhoek; de punten B_k, $B_k{}'$, … liggen op de *omcirkel* van die veelhoek, de punten A_k, … op de *incirkel* ervan.

Volgens Opmerking 1 hierboven is dan:

$$B_kB_k{}' = 2 \cdot A_kB_k = 2 \cdot \frac{A_0B_0}{2^k} = \frac{B_0B_0{}'}{2^k}$$

waarbij $B_0{}'$ het spiegelbeeld is van B_0 in OA_0 (zie in dit verband weer ***figuur 3***).
Is S de lengte van het hierboven geconstrueerde deel van de omtrek van de regelmatige veelhoek, dan is:

$$S = 2^k \cdot B_kB_k{}' = 2^k \cdot \frac{B_0B_0{}'}{2^k} = B_0B_0{}'$$

De lengte S is daarmee onafhankelijk van k (en constant).

Voor de booglengtes S_O en S_I van de bijbehorende delen van de om- en incirkel van de regelmatige veelhoek geldt (voor iedere $k \geq 0$):

$$S_O = 2\varphi \cdot b_k\,, \quad S_I = 2\varphi \cdot a_k$$

En dan volgt uit:

$$S_I < S < S_O$$

dat:

$$a_k < \frac{B_0B_0{}'}{2\varphi} < b_k$$

Maar dan geldt noodzakelijkerwijs (volgens de *insluitstelling*) voor de gemeenschappelijke limiet $\mathcal{A}$ van de rijen $\{a_k\}$ en $\{b_k\}$:

$$\mathcal{A} = \frac{B_0B_0'}{2\varphi} = \frac{A_0B_0}{\varphi}$$

Dus (zie opnieuw ***figuur 3***):
$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0^2}}{\arccos \frac{a_0}{b_0}}$$

Voor ons uitgangspunt in paragraaf 3, $a_0 = 1$ en $b_0 = 2$, hebben we dan:

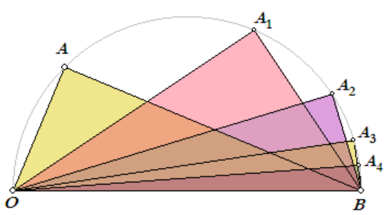
$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{\arccos \frac{1}{2}} = 1{,}653986...$$

5. Maar het begon anders

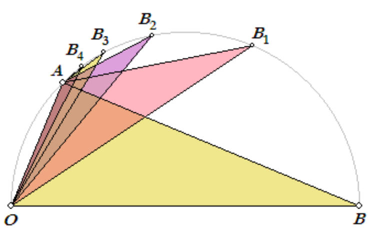
Het in de voorgaande paragrafen behandelde probleem was het gevolg van mijn zoeken naar een *meetkundig* georiënteerd vraagstuk waarin een limiet voorkomt (bedoeld voor een opgave *voortgezette analyse* in het schoolexamen vwo-B12). Daarmee begon het dus.
Eerst maakte ik wat schetsen (met *Cabri Geometry*). ***In figuur 5*** staan enkele van de eerste tekeningen, waarin uitgegaan is van een rechthoekige driehoek OAB en waarbij de hoek bij O telkens (in een nieuwe driehoek) gehalveerd werd.

In figuur 5a is die hoek $\angle A_kOB$ (voor $k \geq 0$, met $A_0 = A$) en ***in figuur 5b*** is dat $\angle AOB_k$ (voor $k \geq 0$, met $B_0 = B$).
In deze figuren plaatsen we de 'opvolgende' punten A_{k+1} en B_{k+1} op de cirkel met middellijn OB.
Beide figuren gaven mij niet direct zicht op een geschikte limiet.
Door de ligging van de punten A_{k+1} en B_{k+1} kwam ik evenwel op het idee die cirkel ook 'mee te laten veranderen'.

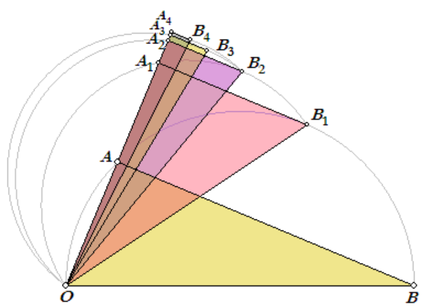
In figuur 5c wordt $\angle AOB_k$ ook gehalveerd, maar daarbij wordt het punt B_{k+1} gevonden als (tweede) snijpunt van de bissectrice van die hoek met de (halve) cirkel op het lijnstuk OB_k.
We kiezen hierbij ook de punten A_{k+1} op die cirkel. En daarmee is driehoek OA_kB rechthoekig in het punt A_k.



figuur 5a



figuur 5b



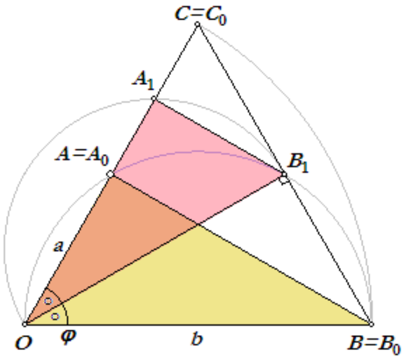
figuur 5c

We zien in figuur 5c dat er redelijk snel convergentie van de lijnstukken OA_k en OB_k optreedt naar eenzelfde waarde.
En dus ging (of eigenlijk moest) ik op zoek naar een (goniometrisch?) verband tussen de zijden van de driehoeken OAB en OA_1B_1.
Uitgangspunt voor mijn berekeningen was ***figuur 6*** (vergelijk deze met figuur 2). Door de constructie is in figuur 6 onmiddellijk duidelijk dat:

$$A_1B_1 = \tfrac{1}{2}AB$$

(Hiervan wordt in de volgende berekeningen evenwel *geen* gebruik gemaakt.)

figuur 6



In driehoek OAB met $OA = a$, $OB = b$ geldt:

$$\cos\varphi = \tfrac{a}{b}$$

En in driehoek OA_1B_1 met $OA_1 = a_1$, $OB_1 = b_1$ hebben we:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

Maar ook geldt, in driehoek OB_0B_1:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{b_1}{b}$$

Zodat: $$\tfrac{b_1}{b} = \tfrac{a_1}{b_1} \;\Rightarrow\; b_1^2 = a_1 b \;\Rightarrow\; b_1 = \sqrt{a_1 b} \qquad (5.1)$$

En ik vond: b_1 is het *meetkundig gemiddelde* van a_1 en b…

Volgens de verdubbelingsformule van de cosinus hebben we:

$$\cos\varphi = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi - 1$$
$$\cos\varphi + 1 = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

En dan ingevuld: $$\tfrac{a}{b} + 1 = 2\cdot\tfrac{a_1^2}{b_1^2}$$

Zodat, met gebruik van (5.1):

$$\tfrac{1}{2}(a+b) = b\cdot\tfrac{a_1^2}{b_1^2} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}(a+b) = a_1\cdot\tfrac{a_1 b}{a_1 b} = a_1$$

En ik vond: a_1 is het *rekenkundig gemiddelde* van a en b…

Opmerking. We kunnen met het bovenstaande bewijzen dat $A_1B_1 = \tfrac{1}{2}AB$. Immers,

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = (b-a)\cdot 2a_1\\ &= 2a_1 b - 2a_1(2a_1 - b) = 4a_1 b - 4a_1^2\\ &= 4(b_1^2 - a_1^2) = (2A_1B_1)^2\end{aligned}$$

Zodat inderdaad: $$AB = 2A_1B_1$$

Zie ook de Opmerking aan het einde van paragraaf 3. ♦

Maar is dit nu echt een vraagstuk voor het bedoelde vwo-examen? De opdracht:

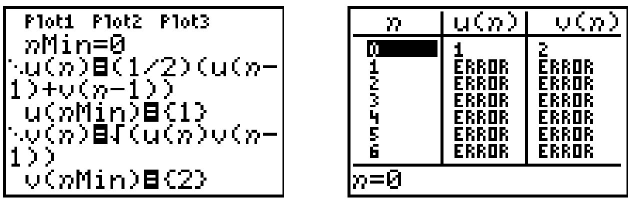
> Bepaal op basis van het constructieschema de gemeenschappelijke limiet van de rijen $\{a_k\}$ en $\{b_k\}$.

valt mijns inziens buiten het vwo-programma. En de recursieve definities van de rijen:

$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})$$
$$b_k = \sqrt{a_k b_{k-1}}$$

geven - juist vanwege die recursiviteit - bij invoer op de grafische rekenmachine een foutmelding; *zie figuur 7*.

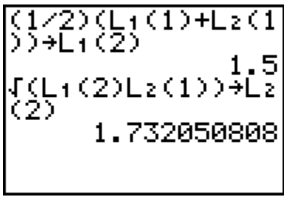
figuur 7

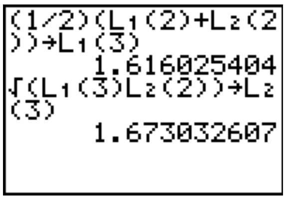


Een ongeschikt vwo-vraagstuk dus!

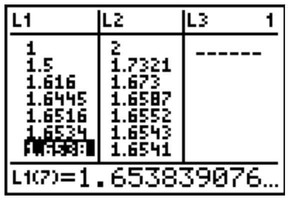
Opmerking. Het berekenen van de gemeenschappelijke limiet op de grafische rekenmachine is zeker wel mogelijk, bijvoorbeeld door (op de TI84) gebruik te maken van zogenoemde 'lijsten'; ***zie figuur 8***.

figuur 8





enz…



6. Wat daarna bleek…

Natuurlijk wilde ik, na hetgeen ik in paragraaf 5 had gevonden, weten of de bedoelde rijen reeds elders waren behandeld.

Dus… het internet op en allereerst naar *Wolfram-MathWorld* [6]. Zoeken met 'mean' (gemiddelde) als zoekwoord leverde onmiddellijk resultaat:

'*There are several statistical quantities called means, e.g., harmonic mean, geometric mean, arithmetic-geometric mean, and root-mean-square.*'

De link naar *arithmetic-geometric mean* [6] bevat in ieder geval informatie over de in paragraaf 2 vermelde functie agM en het verband met elliptische functies.

Uiteindelijk vond ik in een artikel van Nussbaum & Cohen ook een verwijzing (zie [5; pag. 280]) naar de door mij beschouwde rijen:

'*Borchardt and Schwab considered the map*

$$f(a,b) = (a_1, b_1), \quad a_1 = (a+b)/2, \quad b_1 = (a_1 b)^{1/2}$$

and the corresponding mean given by

$$\lim_{n\uparrow\infty} f^n(a,b) = (\delta, \delta)\text{'}$$

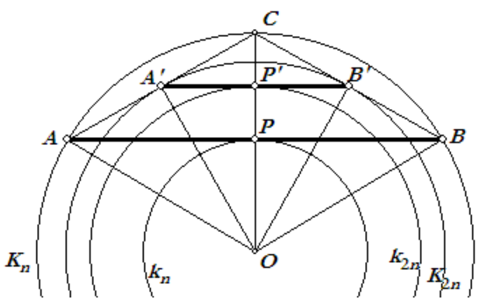
En de (gemeenschappelijke) limiet δ wordt de '*Schwab-Borchhardt mean*' genoemd, naar **J.C. Schwab** (?, ?) en **Carl Wilhelm Borchardt** (1817-1880, Duitsland) [8].

In [1; pp. 251-252] blijkt dat Schwab zich (omstreeks 1810?) heeft bezig gehouden met benaderingen van het getal π. Hij gebruikte daarbij de volgende recursieformules:

$$r_{2n} = \tfrac{1}{2}(r_n + R_n)$$
$$R_{2n} = \sqrt{r_{2n} R_n}$$

waarbij R_n, r_n de stralen zijn van de om- en incirkel van een regelmatige n-hoek en R_{2n}, r_{2n} de overeenkomstige stralen bij een regelmatige $2n$-hoek met *dezelfde* omtrek als die van de n-hoek.
Uitgaande van dit laatste kan de juistheid van beide formules worden aangetoond.

figuur 9



In figuur 9 is AB de zijde van een regelmatige n-hoek. C is het midden van bg(AB) op de omcirkel K_n van die n-hoek (k_n is de incirkel).

Zijn A' en B' de middens van de lijnstukken CA en CB, dan is:

$$A'B' = \tfrac{1}{2}AB, \quad \angle A'OB' = \tfrac{1}{2}\angle AOB$$

$A'B'$ is daarmee zijde van een regelmatige $2n$-hoek die dezelfde omtrek heeft als de n-hoek met zijde AB (K_{2n} en k_{2n} zijn de om- en incirkel van die $2n$-hoek).

Zijn P, P' de voetpunten van O op AB, $A'B'$, dan is P' het midden van CP, zodat:

$$2 \cdot OP' = OP + OC$$

of: $$2r_{2n} = r_n + R_n \quad \Rightarrow \quad r_{2n} = \tfrac{1}{2}(r_n + R_n)$$
In de rechthoekige driehoek $OA'C$ geldt:
$$(OA')^2 = OP' \cdot OC$$
$$(R_{2n})^2 = r_{2n} \cdot R_n \quad \Rightarrow \quad R_{2n} = \sqrt{r_{2n}R_n}$$
Waarmee de *formules van Schwab* bewezen zijn. ♦

Opmerking. De lezer vergelijke de formules van Schwab met de formules voor de rijen $\{a_k\}$ en $\{b_k\}$ in paragraaf 3; en ook figuur 9 met figuur 3. ♦

We gaan nu uit van een vierkant met omtrek 2 (dus beginnend met n = 4). De twee rijen:
- $2\pi r_4$, $2\pi r_8$, $2\pi r_{16}$, $2\pi r_{32}$, …
- $2\pi R_4$, $2\pi R_8$, $2\pi R_{16}$, $2\pi R_{32}$, …

die de omtrekken zijn van de 'opvolgende' in- en omcirkels van de n- en $2n$-hoeken, hebben als gemeenschappelijke limiet de waarde 2.
Waaruit volgt dat de rijen:
- r_4, r_8, r_{16}, r_{32}, …
- R_4, R_8, R_{16}, R_{32}, …

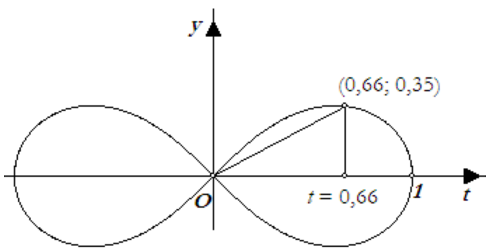
(de termen hiervan zijn te berekenen met de genoemde formules van Schwab) als gemeenschappelijke limiet de waarde $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309...$ hebben.

Hiermee is de *stelling van Schwab* bewezen:

> **Stelling 1.** Is c_0 = 0 en $c_1 = \frac{1}{2}$, dan heeft de rij:
> - c_0, c_1, c_2, … c_k, …
>
> waarin voor $k \geq 2$ de termen afwisselend het *rekenkundig* en het *meetkundig* gemiddelde van de twee voorafgaande termen zijn, als limiet $\frac{1}{\pi}$. ♦

7. Gauss en de functie agM

figuur 10



Gauss bekeek bij zijn onderzoek van elliptische functies onder meer de (*eenheids*)*leminiscaat* (ook wel *Bernoulli-lemniscaat*[9]) met (in onze notatie) als poolvergelijking: $r^2 = \cos 2t$ (***zie figuur 10***).
Hij stelde de omtrek daarvan (overeenkomstig die van de eenheidscirkel) gelijk aan 2ϖ (de Griekse letter ϖ ('variant pi' of 'pomega') is eigenlijk een andere schrijfwijze voor de letter π).
Dan is voor het vierde deel van de omtrek van deze lemniscaat (zie [2; p. 460]):
$$\begin{aligned}\tfrac{\varpi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2t + (-\tfrac{\sin 2t}{r})^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2t + \tfrac{\sin^2 2t}{\cos 2t}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos 2t}}\end{aligned}$$

We zullen in de laatste uitdrukking » $\cos 2t = \cos^2\varphi$ « substitueren. Daarbij is, via impliciet differentiëren:

$$\sin 2t\, \mathrm{d}t = \cos\varphi \sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi$$

En:

$$\sin^2 2t = 1-\cos^2 2t \underset{\text{(substitutie)}}{=} 1-\cos^4\varphi = (1-\cos^2\varphi)(1+\cos^2\varphi)$$
$$= \sin^2\varphi \cdot (1+\cos^2\varphi)$$

waarmee:

$$\mathrm{d}t = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi(1+\cos^2\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

Zodat:

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2t}}\,\mathrm{d}t \underset{\text{(substitutie)}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$$

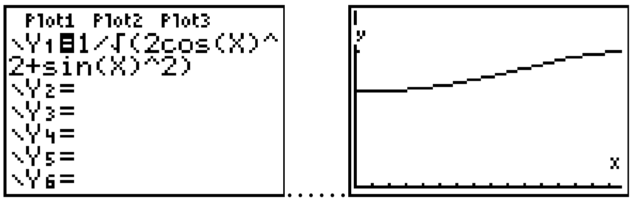
Of:

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}$$

(Deze integraal is een zogenoemde *elliptische integraal van de eerste soort*.)

Opmerkingen

figuur 11



1. We vinden door numerieke benadering van de integraal (***zie figuur 11***):
$$\frac{\varpi}{2} = 1{,}311028...$$
2. In [4a; pag. 413, *De curva lemniscata*] geeft Gauss voor de booglengte van de lemniscaat:
$$\int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \varphi$$
met s = sin lemn φ (een definitie), waarbij s de x-coördinaat (cq. t-coördinaat) is van een punt op de lemniscaat.
En hij geeft als waarde: $\varphi = \frac{\varpi}{2} = 1{,}3110287771\ 4605987$
Voorts vermeldt hij: $\varphi = \text{arc sin lemn}\,\frac{7}{23} + 2\,\text{arc sin lemn}\,\frac{1}{2}$
met daar achter tussen haakjes: 'Euler habet 1.311031' (vert. 'Euler heeft 1,311031').
Mijn *Maple*-berekening geeft hier (afgerond): φ = 1,3110287771 4605991. ♦

Gauss definieert nu (voor $a \geq b > 0$) de integraal $I(a, b)$ als:

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

Hij merkt verder op dat:

Stelling 2. Voor $a' = \frac{1}{2}(a+b),\ b' = \sqrt{ab}$ geldt: $\boldsymbol{I(a, b) = I(a', b')}$.

Hiermee is de elliptische integraal dus *invariant* onder substitutie van de parameters door de agM van die parameters.
Gauss stelt ook (en eigenlijk niet meer dan dat!) dat het bewijs van Stelling 2 geleverd kan worden via de substitutie:

$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta} \tag{7.1}$$

Een opmerkelijk gevolg van Stelling 2 is dan:

Stelling 3. Voor $M = \text{agM}(\sqrt{2}, 1)$ geldt: $\frac{\pi}{\varpi} = M$.

Immers,

$$\begin{aligned}\frac{\varpi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \ldots\ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{M^2\cos^2\varphi + M^2\sin^2\varphi}} \\ &= \frac{1}{M} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2M}\end{aligned}$$

Waaruit de stelling direct volgt. ♦

8. Het bewijs van Stelling 2

We zullen nu - en dat vraagt wel toch wel enige, maar niet al te ingewikkelde algebraïsche rekenarbeid - het bewijs van Stelling 2 geven.

Allereerst volgt uit de door Gauss genoemde substitutie (7.1) via impliciet differentiëren, waarbij $N = (a+b) + (a-b)\sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{2a}{N^2}\left(\cos\theta \cdot N - \sin\theta \cdot 2(a-b)\sin\theta \cdot \cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2a}{N^2}\left(N - 2(a-b)\sin^2\theta\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{8.1}$$

Zodat, met de uitdrukking voor N, alleen gebruikt binnen de haken:

$$\begin{aligned}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{2a}{N^2}\left((a+b) + (a-b)\sin^2\theta - 2(a-b)\sin^2\theta\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2a}{N^2}\left((a+b) - (a-b)\sin^2\theta\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{8.2}$$

Verder is met (7.1):

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{4a^2\sin^2\theta}{N^2}} = \frac{1}{N}\sqrt{N^2 - 4a^2\sin^2\theta} \tag{8.3}$$

Voor de uitdrukking onder het wortelteken in het rechter lid van (8.3) geldt:

$$\begin{aligned}N^2 - 4a^2\sin^2\theta &= (a+b)^2 + 2(a+b)(a-b)\sin^2\theta + \\ &\qquad + (a-b)^2\sin^4\theta - 4a^2\sin^2\theta \\ &= (a+b)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (2a^2 - 2b^2)\sin^2\theta + \\ &\qquad + (a-b)^2\sin^4\theta - 4a^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

En vervolgens:

$$\begin{aligned}N^2 - 4a^2\sin^2\theta &= (a+b)^2\cos^2\theta + (a-b)^2\sin^4\theta + \\ &\qquad + (a^2 + b^2 + 2ab + 2a^2 - 2b^2 - 4a^2)\sin^2\theta \\ &= (a+b)^2\cos^2\theta + (a-b)^2\sin^4\theta - (a^2 - 2ab + b^2)\sin^2\theta \\ &= (a+b)^2\cos^2\theta + (a-b)^2\sin^4\theta - (a-b)^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Of te wel:

$$\begin{aligned}N^2 - 4a^2\sin^2\theta &= (a+b)^2\cos^2\theta - (a-b)^2\sin^2\theta \cdot (1-\sin^2\theta) \\ &= \cos^2\theta\left((a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta\right)\end{aligned} \tag{8.4a}$$

We kunnen voor de tweede factor in het laatste rechter lid van (8.4a) schrijven:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta &= (a+b)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - (a-b)^2\sin^2\theta \\ &= (a+b)^2\cos^2\theta + (a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab)\sin^2\theta \\ &= (a+b)^2\cos^2\theta + 4ab\sin^2\theta\end{aligned} \tag{8.4b}$$

En met (8.4a) en (8.4b) vinden we uiteindelijk, volgend uit (8.3):

$$\cos\varphi = \frac{1}{N}\sqrt{(a+b)^2\cos^2\theta + 4ab\sin^2\theta} \cdot \cos\theta \tag{8.5}$$

En ook is, door substitutie van de uitdrukkingen voor $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ (opvolgend 8.5 en 7.1):

$$\begin{aligned} a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi &= \tfrac{a^2}{N^2}\left((a+b)^2\cos^2\theta + 4ab\sin^2\theta\right)\cos^2\theta + \tfrac{b^2}{N^2}\cdot 4a^2\sin^2\theta \\ &= \tfrac{a^2}{N^2}\left(((a+b)^2(1-\sin^2\theta) + 4ab\sin^2\theta)\cos^2\theta + 4b^2\sin^2\theta\right) \\ &= \tfrac{a^2}{N^2}\left(\underline{((a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)} + 4b^2\sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

Uitwerking van het onderstreepte deel in deze uitdrukking geeft dan verder:

$$\begin{aligned} a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi &= \tfrac{a^2}{N^2}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2\theta - (a+b)^2\sin^2\theta + (a-b)^2\sin^4\theta + 4b^2\sin^2\theta\right) \\ &= \tfrac{a^2}{N^2}\left((a+b)^2 - 2(a+b)(a-b)\sin^2\theta + (a-b)^2\sin^4\theta\right) \\ &= \tfrac{a^2}{N^2}\left((a+b) - (a-b)\sin^2\theta\right)^2 \end{aligned}$$

Zodat:

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \tfrac{a}{N}\left((a+b) - (a-b)\sin^2\theta\right) \tag{8.6}$$

Uit (8.2) volgt met (8.6):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} &= \frac{1}{\tfrac{a}{N}\left((a+b)-(a-b)\sin^2\theta\right)}\cdot\tfrac{1}{\cos\varphi}\cdot\tfrac{2a}{N^2}\left((a+b)-(a-b)\sin^2\theta\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{\cos\varphi}\cdot\tfrac{2}{N}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

En dan met (8.5):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} &= \frac{1}{\tfrac{1}{N}\sqrt{(a+b)^2\cos^2\theta + 4ab\sin^2\theta}\cdot\cos\theta}\cdot\tfrac{2}{N}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2\cos^2\theta + 4ab\sin^2\theta}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\tfrac{a+b}{2})^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta}} \\ &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a'^2\cos^2\theta + b'^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$

Voorts volgt uit (7.1):

- als $\varphi = 0$, dan $\theta = 0$;
- als $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dan $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En daarmee is bewezen dat $\boldsymbol{I(a, b) = I(a', b')}$. ♦

Tot slot geven we nog enkele eigenschappen van de functie agM(x, y):

- $\mathrm{agM}(a,b) = \mathrm{agM}(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$
- $\mathrm{agM}(a,a) = a$
- $\mathrm{agM}(a,b) = \mathrm{agM}(b,a)$
- $\mathrm{agM}(ka,kb) = k\cdot\mathrm{agM}(a,b)$
- $\mathrm{agM}(a,b) = a\cdot\mathrm{agM}(1,\frac{b}{a}) = b\cdot\mathrm{agM}(\frac{a}{b},1)$
- $\mathrm{agM}(1,\sqrt{1-x^2}) = \mathrm{agM}(1+x,1-x)$
- $\mathrm{agM}(1,x) = \frac{1+x}{2}\cdot\mathrm{agM}(1,\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$

We laten het aan de lezer deze eigenschappen te bewijzen.

9. Literatuur en noten

[1] H. Behnke et al.: *Fundamentals of Mathematics, Volume II, Geometry*. Cambridge (USA): The MIT Press (vertaling uit het Duits, 1974); pp. 248-252.

[2] D.A. Cox (2004): *Galois Theory*. Hoboken (USA): Wiley-Interscience; pp. 457-508 (*The Lemniscate*).

[3] D.A. Cox (1984): *The arithmetic-geometric mean of Gauss*. In: *L'Enseignement Mathématique*, Tome 30; pp. 275-330.

[4] [a] C.F. Gauss (1799): *Arithmetisch Geometrisches Mittel*. In: *Werke*, Band 3. Göttingen: Dieterich (1863); pp. 361-432 (*De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm. geometricorum*).
[b] C.F. Gauss (1801): *Disquisitiones Arithmeticae*. In: *Werke*, Band 1. Göttingen: Dieterich (1863).
Beide boeken zijn digitaal beschikbaar via (Göttinger DigitalisierungsZentrum):
www.gdz-cms.de/no_cache/dms/load/met/?IDDOC=38910&

[5] R.D. Nussbaum, J.E. Cohen (1988): *The Arithmetic-Geometric Mean and Its Generalizations for Noncommuting Linear Operators*. In: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze IV,* 15(2). Pisa: Scuola Normale Superiore; pp. 239-308.
Dit artikel is digitaal beschikbaar via:
http://archive.numdam.org/article/ASNSP_1988_4_15_2_239_0.pdf

[6] Zie: *http://mathworld.wolfram.com/*
cq. *http://mathworld.wolfram.com/Arithmetic-GeometricMean.html* (Eric W. Weisstein: *Arithmetic-Geometric Mean*).

[7] Zie: *http://mathworld.wolfram.com/GausssConstant.html* (Eric W. Weisstein: *Gauss's Constant*)
c.q. *http://mathworld.wolfram.com/LemniscateConstant.html* (Eric W. Weisstein: *Lemniscate Constant*).

[8] Borchardt geeft in een brief (van 8 mei 1880) aan L. Cremona (1830-1903, Italië) nog een tweede voorbeeld ('*deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique, mais d'un caractère plus élémentaire*'):

$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-1} + b_k), \quad b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$$

In die brief verwijst Borchardt ook naar de in paragraaf 6 behandelde methode om de omtrek van een $2n$-hoek uit te drukken in de omtrek van een gegeven n-hoek.

[9] Genoemd naar **Jakob (I) Bernoulli** (1654-1705, Zwitserland) die in 1694 (in zijn *Acta Eruditorum*) de vergelijking ervan afleidde.
Een lemniscaat kan ook gedefinieerd worden als de verzameling van de punten P waarvoor geldt dat $PF_1 \cdot PF_2 = c^2$; daarbij zijn F_1, F_2 vaste punten met $F_1F_2 = 2c$.

Dit artikel is in januari 2008, in een beknopte vorm, ter publicatie aangeboden aan het tijdschrift *Euclides*, orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).