Over de hoeken van 36° en 72°

Dick Klingens
januari 2006

Inleiding

De construeerbaarheid (met passer en liniaal) van een regelmatige 5- en 10-hoek is bepaald door de construeerbaarheid (eveneens met passer en liniaal) van hoeken van 36° en 72°.
In hetgeen volgt onderzoeken we die construeerbaarheid op basis van rationale vergelijkingen. We berekenen daarmee de goniometrische verhoudingen *sinus* en *cosinus* van deze hoeken.
We geven allereerst enkele afleidingen van daarbij te gebruiken goniometrische identiteiten.

Goniometrie

We onderstellen de volgende identiteiten bekend:

- $\sin(a \pm b) = sina \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

We hebben dan (met $b = a$):

$$\begin{aligned} \sin 2a &= \sin a \cos a + \cos a \sin a \\ &= 2\sin a \cos a \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

Vervolgens kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned} \sin 3a &= \sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a \\ &= 2\sin a \cos^2 a + (1 - 2\sin^2 a)\sin a \\ &= 2\sin a(1 - \sin^2 a) + \sin a - 2\sin^3 a \\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a \end{aligned} \quad \text{of ook wel:} \quad \begin{aligned} \sin 3a &= \big(3 - 4(1 - \cos^2 a)\big)\sin a \\ &= (4\cos^2 a - 1)\sin a \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a \\ &= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\cos a(1 - \cos^2 a) \\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a \end{aligned} \quad \text{of ook wel:} \quad \begin{aligned} \cos 3a &= \big(4(1 - \sin^2 a) - 3\big)\cos a \\ &= (1 - 4\sin^2 a)\cos a \end{aligned}$$

En uit het bovenstaande vinden we dan:

$$\begin{aligned} \sin 5a &= \sin(3a + 2a) = \sin 3a \cos 2a + \cos 3a \sin 2a \\ &= (3\sin a - 4\sin^3 a)(1 - 2\sin^2 a) + (1 - 4\sin^2 a)\cos a \cdot 2\sin a \cos a \\ &= 3\sin a - 10\sin^3 a + 8\sin^5 a + 2\sin a \cdot (1 - 4\sin^2 a)(1 - \sin^2 a) \\ &= 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a \end{aligned}$$

en ook

$$\begin{aligned} \cos 5a &= \cos(3a + 2a) = \cos 3 \cos 2a - \sin 3a \sin 2a \\ &= (4\cos^3 a - 3\cos a)(2\cos^2 a - 1) - (4\cos^2 a - 1)\sin a \cdot 2\sin a \cos a \\ &= 8\cos^5 a - 10\cos^3 a + 3\cos a + 2\cos a \cdot (4\cos^2 a - 1)(\cos^2 a - 1) \\ &= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a \end{aligned}$$

De laatste twee identiteiten gebruiken we in de volgende paragrafen.

sin 36° en sin 72°

Stellen we nu $a = 36°$ en $x = \sin 36°$, dan is:

$\sin 180° = \sin(5 \cdot 36°) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$ (1)

Overigens geldt ook $\sin 360° = \sin(5 \cdot 72°) = 0$, zodat we uit (1) de waarden van sin 36° en sin 72° moeten kunnen vinden.

Verder is $0 < x < 1$, zodat we vinden: $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ (2)

Vergelijking (2) laat zich schrijven als:

$$64x^4 - 80x^2 + 25 = 5$$
$$(8x^2 - 5) = 5$$

zodat:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{16} \qquad (3)$$

We vinden dan uit (3) wegens sin 36° < sin 72°:

$$\sin 36° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ en } \sin 72° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad \mathbf{(4)}$$

cos 36° en cos 72°

A. Analoog hebben we, nu voor $a = 36°$ en $x = \cos 36°$:

$$\cos 180° = \cos(5 \cdot 36°) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = -1$$

of

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0 \qquad (5)$$

Nu is x = -1 een oplossing van deze vergelijking (immers, – 16 + 20 – 5 + 1 = 0). Na deling door (x + 1) gaat (5) over in:

$$16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$(4x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

zodat:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \qquad (6)$$

Uit (6) vinden we dan:

$$\cos 36° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) \qquad \mathbf{(7)}$$

B. Stellen we $a = 72°$ en $x = \cos 72°$, dan vinden we:

$$\cos 360° = \cos(5 \cdot 72°) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = 1$$

of

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0 \qquad (8)$$

Aan deze vergelijking voldoet x = 1 (immers, 16 – 20 + 5 – 1 = 0). Na deling door (x – 1) gaat vergelijking (8) over in:

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$(4x^2 + 2x - 1)^2 = 0$$

zodat nu:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \qquad (9)$$

Uit (9) vinden we:

$$\cos 72° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \qquad \mathbf{(10)}$$

