

Involutie: algebraïsch en meetkundig

1. Algebraïsche definitie

Op een lijn m liggen de puntenparen $(P, P'), (Q, Q'), \dots$ die voldoen aan:

$$PO \cdot P'O = QO \cdot Q'O = \dots = k$$

waarbij O een vast punt is op m en k een constante.

De puntenparen op de lijn cq. de *puntparen* P, Q, \dots en P', Q', \dots vormen dan een **involutie**^[1]. O is het *centrum* van de involutie en m is de *drager* van de involutie. Het getal k wordt wel de *macht* van de involutie genoemd.

Opmerking. In bovenstaande definitie maken we gebruik van het begrip «oriëntatie» van lijnstukken op een lijn: voor de afstand XY tussen twee punten X en Y geldt dan $XY = -YX$. Daardoor is het mogelijk dat k negatief is.
[einde Opmerking]

Is $PO = p$ en $P'O = p'$, dan geldt dus op grond van de definitie: $pp' = k$.

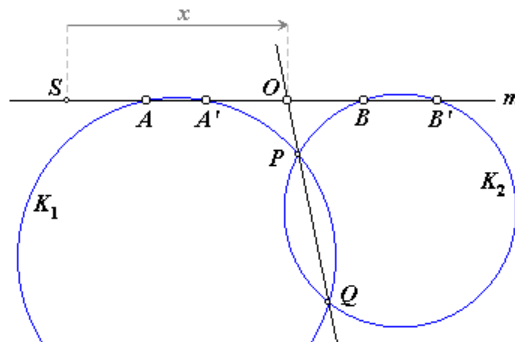
De zogenoemde **dubbelpunten** van de involutie volgen dan uit: $p^2 = k$.

Is $k > 0$, dan vinden we twee reële dubbelpunten; we spreken dan van een *hyperbolische involutie*.

Is $k < 0$, dan hebben we twee imaginaire dubbelpunten; hier is dan sprake van een *elliptische involutie*.

Is $k = 0$ dan valt telkens één van de punten van een puntenpaar samen met het centrum; we hebben dan een *parabolische involutie* of ook wel *ontaarde involutie*.

Figuur 1



Zie figuur 1. Is er op de lijn m een coördinatenstelsel aangebracht (met oorsprong S)^[2], dan is met $A = (a), A' = (a'), B = (b), B' = (b')$ en een vooralsnog onbekend punt $O = (x)$:

$$(x-a)(x-a') = (b-x)(b'-x)$$

Uitgewerkt: $x^2 - (a+a')x + aa' = x^2 - (b+b')x + bb'$, waaruit:

$$x = \frac{aa' - bb'}{(a+a') - (b+b')}$$

We zien hieruit dat twee puntenparen het centrum O van de involutie vastleggen. Zodat ook:

Stelling 1. Twee puntenparen op een rechte lijn leggen een involutie op die lijn vast.

Opmerking 1. Vallen de middens van de lijnstukken tussen punten van de paren samen, dan is de noemer van x gelijk aan 0. Het punt O is dan het 'oneigenlijk punt' van de drager van de involutie.

[1] We spreken hier ook wel van een *puntinvolutie*.

[2] Impliciet ligt hiermee ook de oriëntatie van lijnstukken op de lijn m vast. De zogenoemde *lijncoördinaat* (ook wel *abscis* genoemd) van de punten op m staat tussen (en).

Opmerking 2. Voor $A = (a), A' = (a'), O = (z)$ op de lijn m hebben we: $(a - z)(a' - z) = k$.

Uitgewerkt geeft dit: $aa' - z(a + a') + z^2 - k = 0$.

Deze vergelijking is van het type: $Ax_1x_2 + B(x_1 + x_2) + C = 0$ ($A \neq 0$)

En dan is:

$$x_1x_2 + \frac{B}{A}(x_1 + x_2) + \frac{C}{A} = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{B}{A}\right)\left(x_2 + \frac{B}{A}\right) = \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} = \frac{B^2 - AC}{A^2}$$

Zodat we voor $O = \left(-\frac{B}{A}\right)$ en $k = \frac{B^2 - AC}{A^2}$ een involutie vinden met O als centrum en k als macht.

Hieruit zien we verder:

- als $B^2 - AC > 0$ dan hebben we een hyperbolische involutie;
- als $B^2 - AC = 0$ dan hebben we een parabolische involutie;
- als $B^2 - AC < 0$ dan hebben we een elliptische involutie.

De vergelijking $Ax_1x_2 + B(x_1 + x_2) + C = 0$ wordt wel de *vergelijking van de involutie* genoemd.

N.b. Als $A = 0$ is, dan is het oneigenlijk punt van de lijn m het centrum van de involutie.

Opmerking 3. Drie paren van een involutie zijn op basis van stelling 1 van elkaar *afhankelijk*.

Gaan we uit van $(A, A'), (B, B'), (C, C')$, dan geldt bijvoorbeeld (vanwege de invariantie van de dubbelverhouding):

$$(ABA'C') = (A'B'AC)$$

waaruit we vinden:

$$\frac{A'A}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = \frac{AA'}{AB'} \cdot \frac{CB'}{CA'}$$

of ook

$$\frac{C'B}{A'B \cdot C'A} = -\frac{CB'}{AB' \cdot CA'}$$

zodat

$$\frac{AB'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{C'A} = -1$$

Is omgekeerd aan deze laatste betrekking^[3] voldaan, dan kunnen we besluiten tot

$$(ABA'C') = (A'B'AC)$$

zodat de drie puntenparen behoren tot dezelfde involutie.

[einde Opmerkingen]

2. Constructies

We geven vervolgens enkele constructiebeschrijvingen bij een involutie.

Constructie 1: Het centrum van een involutie bij twee gegeven puntenparen.

Zie figuur 1. Zijn (A, A') en (B, B') de gegeven puntenparen op m . K_1 is een willekeurige cirkel door A en A' , K_2 is een cirkel door B en B' die K_1 snijdt in de punten P en Q . Het snijpunt van PQ en de lijn m is dan het te construeren punt O . \square

^[3] Deze uitdrukking kunnen we ook met *deelverhoudingen* schrijven als: $(BCA')(CAB')(ABC') = -1$.

Onder de deelverhouding (XYZ) van drie collineaire punten verstaan we namelijk de van teken voorziene verhouding ZX/ZY .

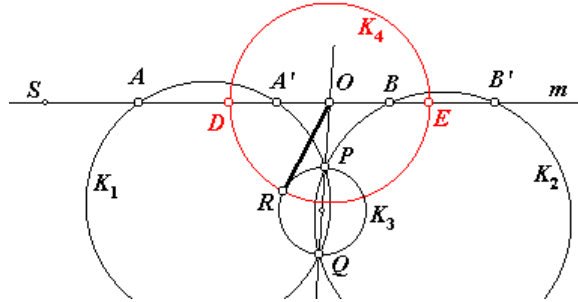
Opmerking. Zie ook Appendix C waarin de punten P en Q , en daarmee een cirkelbundel^[4] met P en Q als basispunten, zullen worden gebruikt als uitgangspunt voor een involutie op een lijn m .
[einde Opmerking]

Constructie 2: De dubbelpunten van een involutie bij twee gegeven puntenparen.

Zie figuur 2. Op basis van de vorige constructie is het centrum O van de involutie bekend.

OR is de raaklijn uit O aan de cirkel K_3 met middellijn PQ . Dus is $OR^2 = OP \cdot OQ = OA' \cdot OA$.

Figuur 2

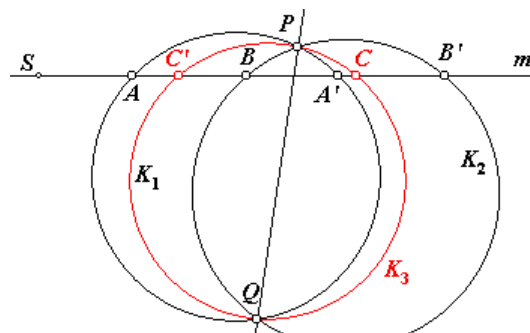


De cirkel K_4 met middellijn O en straal OR snijdt de lijn m nu in de te construeren dubbelpunten D en E van de involutie. \square

Constructie 3: Het tweede punt van een puntenpaar bij twee gegeven puntenparen.

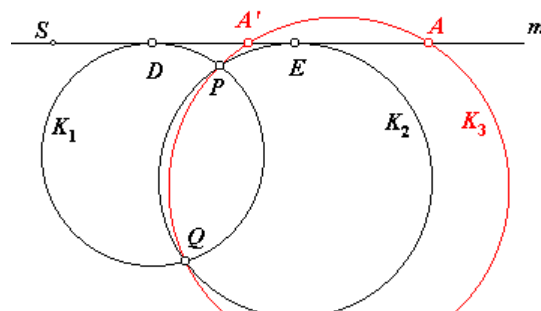
Zie figuur 3. Zijn (A, A') en (B, B') de gegeven puntenparen op m . K_1 en K_2 zijn elkaar in P en Q snijdende cirkels door opeenvolgend A, A' en B, B' .

Figuur 3



Is nu C een punt van m , dan snijdt de cirkel K_3 die gaat door P, Q, C , de lijn m naast C ook in het punt C' van het paar (C, C') van de involutie. \square

Figuur 4



^[4] Het is voor de verdere behandeling van de theorie voldoende hier een *cirkelbundel* te definiëren als de verzameling cirkels die door twee verschillende vaste punten gaan. Die punten worden de *basispunten* van de cirkelbundel genoemd.

Constructie 4: Het tweede punt van een puntenpaar bij twee gegeven dubbelpunten.

Zie figuur 4. Zijn D en E de dubbelpunten van de involutie op de lijn m en zijn K_1 en K_2 elkaar in P en Q snijdende cirkels die in D en E raken aan de lijn m .

Het punt A' van het paar (A, A') vinden we dan als tweede snijpunt van de cirkel K_3 door P, Q, A en de lijn m . \square

Constructie 5: Een loodrecht lijnenpaar in een involutorische lijnenbundel^[5]:

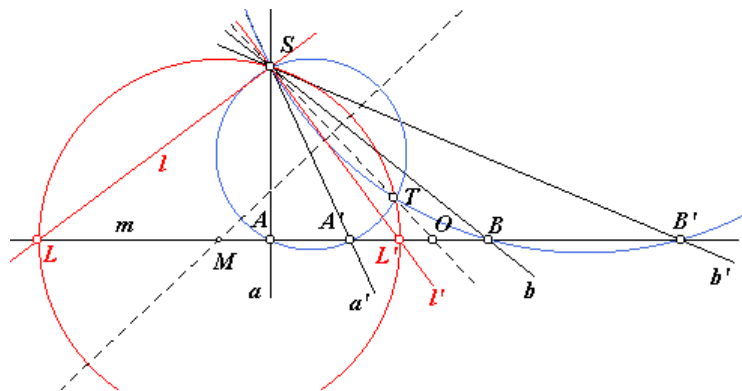
Elke involutorische lijnenbundel, met top S , bevat een lijnenpaar dat loodrecht op elkaar staat.

We zullen dat in hetgeen volgt constructief bewijzen.

Zij de bedoelde involutie gegeven door de lijnenparen (a, a') en (b, b') .

We snijden de bundel met een lijn m (niet gaande door S) waardoor op m een puntinvolutie wordt geïnduceerd met paren $(A, A'), (B, B')$; **zie figuur 5**.

Figuur 5



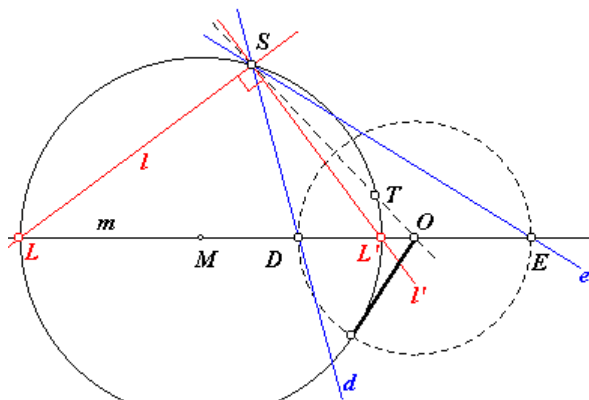
De omcirkels (omgeschreven cirkels) van de driehoeken SAA', SBB' snijden elkaar behalve in S ook in het punt T . Het punt T is een vast punt, immers de beide driehoeken zijn vast.

Zij $O = ST \cap m$ ^[6] het centrum van de involutie op m , dan geldt voor elke cirkel die door S en T gaat: $OT \cdot OS = k$, waarbij k constant is.

De involutie op m wordt dus (ook) bepaald door de cirkelbundel door de punten S en T . In die bundel is er een cirkel waarvan het middelpunt M – het snijpunt van de middelloodlijn van ST met m – op m ligt. De snijpunten L en L' van die cirkel met m leggen nu de gezochte loodrecht op elkaar staande lijnen l en l' in de lijnenbundel met top S vast. \square

Opmerking. In **figuur 6** zijn, uitgaande van deze laatste constructie, ook de dubbellijnen d en e van de lijninvolutie geconstrueerd, een en ander volgens Constructie 2.

Figuur 6



^[5] In plaats van 'involutorische lijnenbundel' spreken we ook wel van een *lijninvolutie*.

^[6] Met $S = AB \cap CD$ bedoelen we het snijpunt S van de lijnen AB en CD .

De lijnen l en l' zijn de bissectrices van de hoeken tussen de lijnen d en e . \square
 [einde Opmerking]

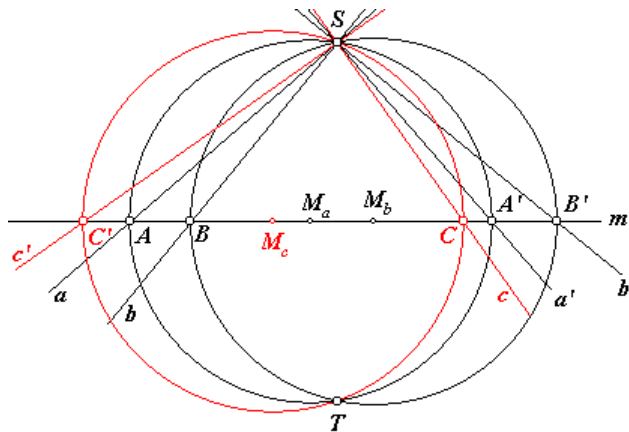
Een gevolg van Constructie 5 is dan de volgende stelling:

Stelling 2. Staan twee paren toegevoegde lijnen in een lijninvolutie loodrecht op elkaar, dan is dat het geval voor elk tweetal toegevoegde lijnen.

Bewijs:

Zie figuur 7. Twee paar loodrechte lijnen (a, a') , (b, b') in de lijnenbundel met top S bepalen in ieder geval een lijninvolutie.

Figuur 7



Snijden we de lijnenbundel met een lijn m (niet gaande door S), dan wordt door die bundel een puntinvolutie op de lijn m ingesneden met (A, A') , (B, B') als puntenparen. De omcirkels door de driehoeken SAA' en SBB' snijden elkaar nu voor de tweede keer in het punt T , dat spiegelsymmetrisch ligt met S in de lijn m , immers de middelpunten M_a, M_b van die cirkels liggen op m .

Van een willekeurige cirkel uit de cirkelbundel door S en T ligt het middelpunt M_c eveneens op m . De snijpunten C, C' van die laatste cirkel bepalen nu twee loodrecht op elkaar staande lijnen c, c' uit de lijnenbundel met top S . \square

3. Harmonische ligging

Stelling 3. Zijn D en E dubbelpunten van een lijninvolutie en is (A, A') een puntenpaar van die involutie, dan scheiden D en E de punten A en A' harmonisch ^[7].

Bewijs:

Zie figuur 8. Nu is per definitie $AO \cdot A'O = DO^2$ of

$$AO : DO = DO : A'O$$

$$(AO - DO) : (AO + DO) = (DO - A'O) : (DO + A'O)$$

$$(AO - DO) : (AO - EO) = (DO - A'O) : (-EO + A'O)$$

Zodat met $O = (x)$, $A = (a)$, ... oa. uit $AO - DO = -(a - x) - (x - d) = d - a = AD$ volgt:

$$DA : EA = DA' : (-EA')$$

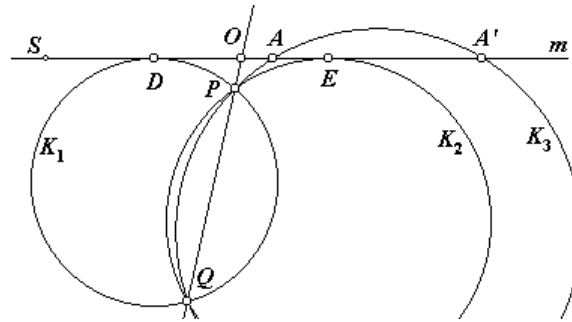
^[7] Twee puntenparen A, B en C, D liggen (per definitie) *harmonisch* (zijn harmonisch gescheiden) indien:

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$$

of

$$(DA : EA) : (DA' : EA') = -1$$

Figuur 8



De uitdrukking

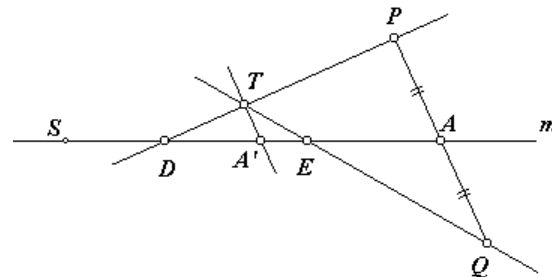
$$(DA : EA) : (DA' : EA') = -1$$

is te schrijven als

$$(DEAA') = -1$$

Waarmee stelling 3 bewezen is. \square

Figuur 9



Opmerking. Op basis van stelling 3 kunnen we een andere methode geven voor Constructie 4. In figuur 9 zijn D, E de dubbelpunten van een involutie. We willen het bij A behorend punt A' construeren.

De punten P en Q liggen puntsymmetrisch tov. het punt A . De lijnen PD en QE snijden elkaar in het punt T . De lijn door T evenwijdig met PQ snijdt de lijn m in het gezochte punt A' .

Bewijs. Op grond van $\triangle A'ET \sim \triangle AEQ$ (hh) hebben we: $A'E : AE = \underline{A'T} : \underline{AQ}$.

En wegens $\triangle DA'T \sim \triangle DAP$ (hh) hebben we: $\underline{A'T} : \underline{AP} = DA' : DA$.

Nu is, omdat $AP = AQ$:

$$\frac{AD}{A'D} : \frac{AE}{A'E} = \frac{AP}{A'T} : \frac{AQ}{A'T} = 1$$

Met andere woorden, rekening houdend met de oriëntatie van de lijnstukken op de lijn m :

$$(AA'DE) = (DEAA') = -1. \square$$

[einde Opmerking]

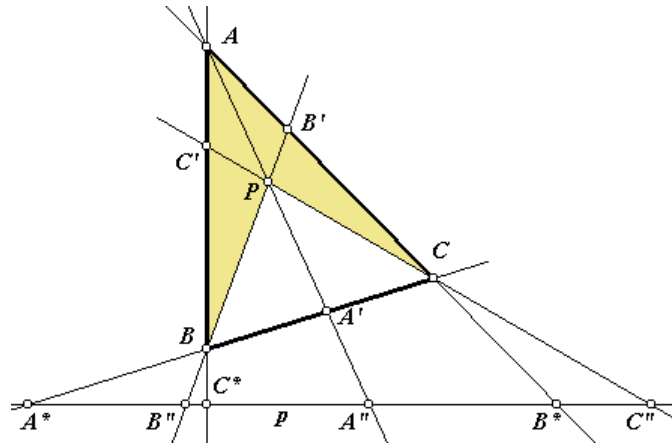
4. De harmonikaal van een driehoek

Zij ABC een willekeurige driehoek, P een willekeurig punt en p een willekeurige lijn; zie figuur 10. De snijpunten van de zijden van de driehoek met p zijn: A^*, B^*, C^* .

Via het punt P bekijken we nu twee projecties:

- die van de hoekpunten op de overstaande zijden: A', B', C' ; daardoor liggen op elke zijde van de driehoek vier punten;
- deze punten worden via P ook geprojecteerd op de lijn p : A'', B'', C'' .

Figuur 10



We hebben dan projectieve afbeeldingen van de zijden op de lijn p , met:

$$\begin{aligned} (ABC'C^*) &= (A''B''C''C^*) \\ (BCA'A^*) &= (B''C''A''A^*) \\ (CAB'B^*) &= (C''A''B''B^*) \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van de linker leden van deze uitdrukking en gelijktijdige uitwerking van de rechter leden geeft:

$$\mathcal{P} = (ABC'C^*)(BCA'A^*)(CAB'B^*) = \left(\frac{C''A''}{C''B''} : \frac{C^*A''}{C^*B''} \right) \cdot \left(\frac{A''B''}{A''C''} : \frac{A^*B''}{A^*C''} \right) \cdot \left(\frac{B''C''}{B''A''} : \frac{B^*C''}{B^*A''} \right)$$

In het rechter lid vinden we nu in teller en noemer $C''A''$ met $A''C''$, $A''B''$ met $B''A''$, $B''C''$ met $C''B''$, zodat

$$\mathcal{P} = - \frac{B''C'' \cdot C''A'' \cdot A''B''}{A''C'' \cdot B''A'' \cdot C''B''}$$

Nu is $ABCP$ een volledige vierhoek, waarvan de paren overstaande zijden (AB, CP) , (AC, BP) , (BC, PA) door p worden gesneden in de puntenparen (C^*, C'') , (B^*, B'') , (A^*, A'') . En deze paren vormen een involutie op de lijn p .

Volgens Opmerking 3 uit paragraaf 1 (bij stelling 1) geldt voor de genoemde puntenparen:

$$\frac{A^*B''}{A''B^*} \cdot \frac{B^*C''}{B''C^*} \cdot \frac{C^*A''}{C''A^*} = -1$$

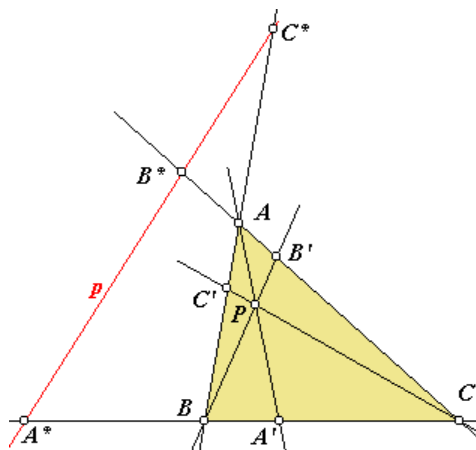
Vergelijken we dit met de hierboven staande uitdrukking voor \mathcal{P} , dan blijkt dat $\mathcal{P} = -1$.

Zodat voor elke configuratie $[ABC, P, p]$ geldt:

$$(ABC'C^*)(BCA'A^*)(CAB'B^*) = -1$$

Hebben twee van deze dubbelverhoudingen de waarde -1 , dan is de derde dus ook gelijk aan -1 .

Figuur 11



Daarmee hebben we bewezen (zie figuur 11):

Stelling 4. Zijn A', B', C' de ceviaanpunten^[8] van een punt P bij een driehoek ABC en zijn A^*, B^*, C^* de daarbij behorende vierde harmonische punten op de zijden van ABC , dan liggen de punten A^*, B^*, C^* op een rechte lijn p .

Deze lijn p heet de **harmonikaal** van P bij driehoek ABC .

Schrijven we de uitdrukking

$$(ABC'C^*)(BCA'A^*)(CAB'B^*) = -1$$

als:

$$\left(\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \right) : \left(\frac{C^*A}{C^*B} \cdot \frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B^*C}{B^*A} \right) = -1$$

dan blijkt dat de eerste factor in het linker lid alleen afhangt van het punt P en de tweede factor alleen van de lijn p .

Kiezen we nu de oneigenlijke rechte als de lijn p , dan worden alle quotiënten in de tweede factor gelijk aan 1.

We hebben dan de stelling (**zie figuur 11**):

Stelling 5. (Stelling van Ceva^[9]) Zijn A', B', C' de ceviaanpunten van een punt P bij een driehoek ABC , dan geldt:

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1$$

Opmerking. Ook de omgekeerde stelling van Ceva is juist. Het bewijs daarvoor kan geleverd worden via een *bewijs uit het ongerijmde* onder toepassing van stelling 5 zelf.

[einde Opmerking]

We bekijken tenslotte de twee hierboven gevonden uitdrukkingen:

$$\left(\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \right) : \left(\frac{C^*A}{C^*B} \cdot \frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B^*C}{B^*A} \right) = -1$$

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = -1$$

Nu geldt dus:

$$\frac{C^*A}{C^*B} \cdot \frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B^*C}{B^*A} = 1$$

We kunnen dit formuleren als (**zie figuur 12**):

Stelling 6. (Stelling van Menelaos^[10]) Snijdt een lijn de (eventueel verlengde) zijden van een driehoek ABC in de punten A^*, B^*, C^* , dan geldt:

$$\frac{C^*A}{C^*B} \cdot \frac{A^*B}{A^*C} \cdot \frac{B^*C}{B^*A} = 1$$

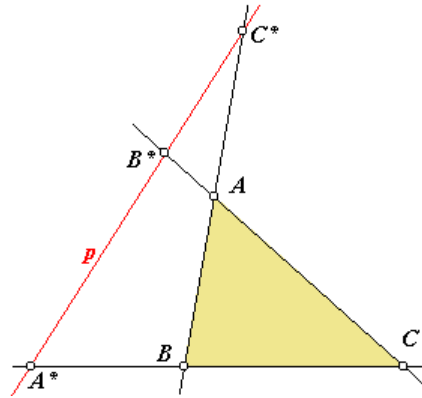
[8] Een *ceviaan* (ook wel *hoektransversaal*) van punt P bij een driehoek is een lijn door P en door een hoekpunt van die driehoek.

Een *ceviaanpunt* van een punt P (bij een driehoek) is het snijpunt van een ceviaan met de 'bijbehorende' (eventueel verlengde) overstaande zijde van de driehoek.

[9] Naar Giovanni Ceva, 1647-1734, Italië.

[10] Naar Menelaos van Alexandrië, 80-130, Egypte.

Figuur 12



Opmerking. De omgekeerde stelling van Menelaos kan eveneens worden bewezen via een *bewijs uit het ongerijmde* onder toepassing van de stelling (stelling 6) zelf.
[einde Opmerking]

5. Toepassingen

We bewijzen als eerste toepassing van het bovenstaande:

Stelling 7. De raaklijnen in de hoekpunten van een driehoek \mathcal{D} aan de omcirkel van \mathcal{D} worden door de overstaande zijden van die hoekpunten gesneden in collineaire punten.

(De driehoek gevormd door deze raaklijnen wordt wel *raaklijndriehoek* van driehoek \mathcal{D} genoemd.)

Bewijs:

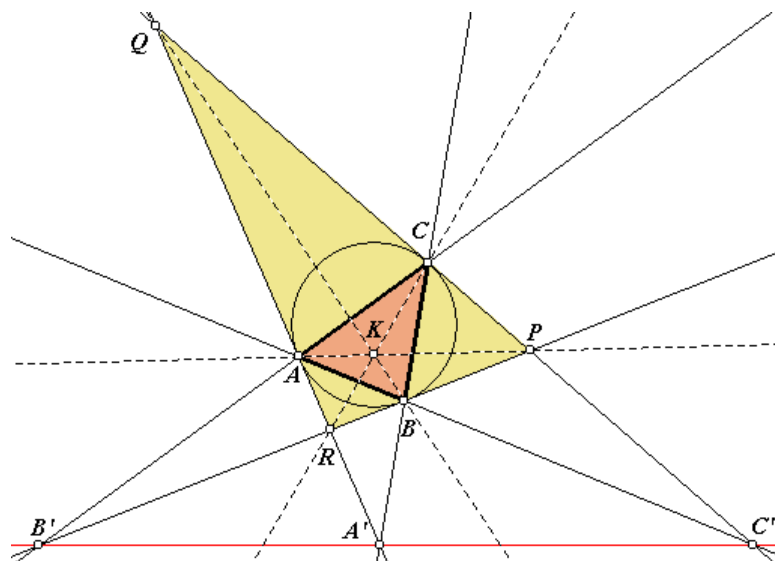
In figuur 13 is PQR de raaklijndriehoek van ABC . Verder is $AB \cap PQ = C'$, $BC \cap QR = A'$, $CA \cap PR = B'$.

We zullen aantonen dat de punten A' , B' , C' collineair zijn.

We bekijken op basis van de omgekeerde stelling van Menelaos (zie stelling 6) de uitdrukking:

$$\mathcal{P} = \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A}$$

Figuur 13



We werken deze uitdrukking om tot:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = \left(\frac{C'A \cdot C'B}{(C'B)^2} \right) \left(\frac{A'B \cdot A'C}{(A'C)^2} \right) \left(\frac{B'C \cdot B'A}{(B'A)^2} \right) = \\ &= \left(\frac{C'C}{C'B} \right)^2 \left(\frac{A'A}{A'C} \right)^2 \left(\frac{B'B}{B'A} \right)^2 \end{aligned}$$

Nu is $CAC' \sim BCC'$ (hh), immers $\angle CAC' = \angle CAB = \frac{1}{2}bg(BC)$ en $BCC' = \frac{1}{2}bg(BC)$, terwijl beide driehoeken $\angle C'$ gemeenschappelijk hebben.

Uit die gelijkvormigheid volgt dan: $C'C : BC' = CA : CB = b : a$.

Analoog kunnen we bewijzen dat ook:

$$A'A : CA' = AB : AC = c : b \text{ en } B'B : AB' = BC : BA = a : c$$

Zodat: $\mathcal{P} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$, waaruit via de omgekeerde stelling van Menelaos inderdaad blijkt dat de punten A', B', C' collineair zijn. \square

Opmerking. De lijn $A'B'C'$ heet **Lemoine-lijn**^[11] van driehoek ABC . De punten A', B', C' worden wel **Nobbs-punten**^[12] van driehoek ABC genoemd.

De omcirkel van ABC is de incirkel van PQR . De lijnen PA, QB, RC gaan door hetzelfde punt K . Dit is het zogenoemde **Gergonne-punt**^[13] van driehoek PQR . De lijnen PA, QB, RC zijn in driehoek PQR de cevianen van het punt K . De lijn $A'B'C'$ heet daarom ook de *Gergonne-lijn* van driehoek PQR .

Het punt K is het **Lemoine-punt** van driehoek ABC . K heet ook wel *symmediaanpunt* of *Grebe-punt*^[14] van ABC .

Het Lemoine-punt van een driehoek is het gemeenschappelijk snijpunt van de symmedianen^[15] van die driehoek.

In Appendix A wordt bewezen, dat K inderdaad het Lemoine-punt is van driehoek ABC .

[einde Opmerking]

We hebben nu op basis van het bovenstaande:

Stelling 8. Het Lemoine-punt van een driehoek \mathcal{D} is het Gergonne-punt van de raaklijndriehoek van \mathcal{D} .

We bewijzen tenslotte:

Stelling 9. De Lemoine-lijn van een driehoek \mathcal{D} is de harmonikaal van het Lemoine-punt van \mathcal{D} .

Bewijs:

In figuur 14 is $A'B'C'$ de zogenoemde *ceviaandriehoek*^[16] van het punt K . De zijden van $A'B'C'$ snijden de 'overeenkomstige' zijden van ABC in de punten A'', B'', C'' .

De driehoeken ABC en $A'B'C'$ zijn puntperspectief in K ; ze zijn dus (volgens de stelling van Desargues) ook lijnperspectief: de punten A'', B'', C'' zijn collineair op de lijn k .

^[11] Naar Emile Lemoine, 1840-1912, Frankrijk.

^[12] Van Nobbs zijn vooralsnog geen biografische gegevens bekend.

^[13] Naar Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859, Frankrijk.

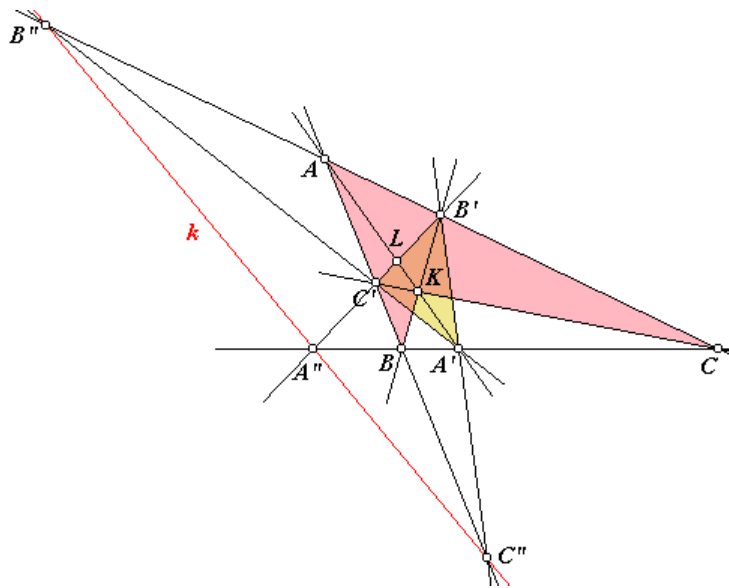
^[14] Naar Ernst Wilhelm Grebe, 1804-1874, Duitsland

^[15] Een *symmediaan* van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice van het bijbehorende hoekpunt.

^[16] De *ceviaandriehoek* van een punt (bij een driehoek) is de driehoek die de cevianpunten van dat punt als hoekpunten heeft.

Nu is $ABKC$ een volledige vierhoek met als diagonaalpunten C' , B' en A' .

Figuur 14



Dan is $(BCA'A'') = -1$ (zie hiervoor de stelling in Appendix B).

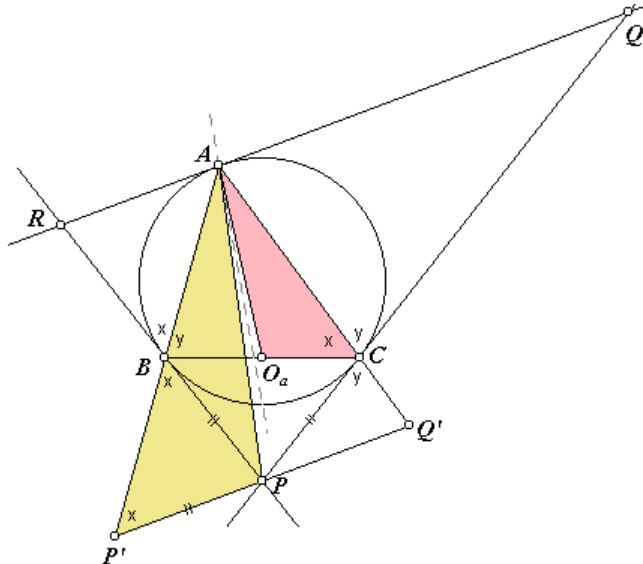
Evenzo is $(CAB'B'') = -1$ en $(ABC'C'') = -1$.

Waarmee, volgens de definitie bij stelling 4, de lijn k de harmonikaal is van het punt K . \square

Appendix A

Stelling. De raaklijnen in twee hoekpunten van een driehoek \mathcal{D} aan de omcirkel van \mathcal{D} snijden elkaar op de symmediaan van het derde hoekpunt.

Figuur A - 1



Bewijs:

In figuur A-1 is PQR de raaklijndriehoek van ABC .

We zullen bewijzen dat de lijn AP een symmediaan is van driehoek ABC .

We kiezen op het verlengde van AB het punt P' zo, dat $PP' = PB$. De lijn $P'P$ snijdt het verlengde van AC in het punt Q' .

In de figuur zijn gelijke hoeken aangegeven met de letters x en y , bijvoorbeeld:

$$RBA = \frac{1}{2}bg(AB) = BCA = x$$

en

$$ABC = \frac{1}{2}bg(AC) = ACQ = y$$

Nu is $ABC \sim AQ'P'$ (hh), zodat

$$AQ'P' = ABC = y$$

Driehoek $PQ'C$ is dan, evenals BPP' , een gelijkbenige driehoek, waardoor P het midden is van het lijnstuk $P'Q'$. De lijn AP is dus zwaartelij van driehoek $AP'Q'$.

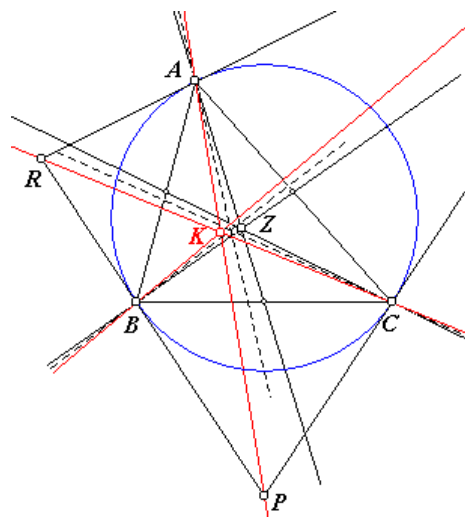
Het punt O_a is het midden van BC . De lijn AO_a is dus zwaartelij in driehoek ABC .

Omdat de driehoeken ABC en $AQ'P'$ gelijkvormig zijn, zijn de 'halve' driehoeken AO_aC en APP' eveneens gelijkvormig. Dus $AO_aC = PAP'$.

De lijnen AO_a en AP zijn dus elkaars spiegelbeeld in de bissectrice van hoek A .

En dan ligt het punt P op de A -symmediaan van driehoek ABC . Waarmee het gestelde bewezen is. \square

Figuur A - 2

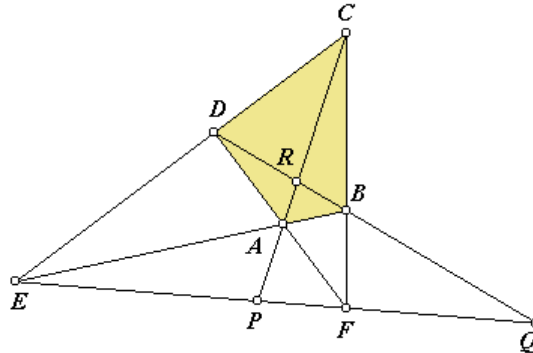


In figuur A-2 is een en ander nog eens in beeld gebracht.

Appendix B

Stelling. Twee diagonalen van een volledige vierzijde scheiden de hoekpunten op de derde diagonaal harmonisch.

Figuur B - 1



Bewijs:

Zie figuur B-1. De lijnen AB, BC, CD, DA zijn de zijden van een volledige vierzijde $ABCD$.

Verder is: $E = AB \cap CD, F = BC \cap DA$.

We moeten nu bewijzen, dat de hoekpunten E en F van $ABCD$ harmonisch gescheiden worden door de diagonalen AC en BD .

Zij nu $P = AC \cap EF, Q = BD \cap EF$, dan moet dus gelden $(EFPQ) = -1$.

Uit de stelling van Menelaos en de stelling van Ceva (zie de stellingen 6 en 5 hierboven), toegepast op driehoek CEF met transversaal DBQ , volgt^[17]:

$$(1) \quad (EFQ)(FCB)(CED) = 1$$

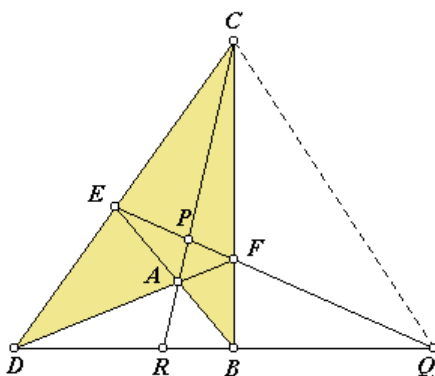
$$(2) \quad (EFP)(FCB)(CED) = -1$$

Uitdrukking (2) gedeeld door uitdrukking (1) geeft dan direct: $\frac{(EFP)}{(EFQ)} = \frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = (EFPQ) = -1$.

Waarmee de stelling bewezen is. \square

In figuur B-2 is dezelfde configuratie weergegeven.

Figuur B - 2



We bekijken nu opnieuw de vierhoek $ABCD$.

Nu is nog steeds $(EFPQ) = -1$.

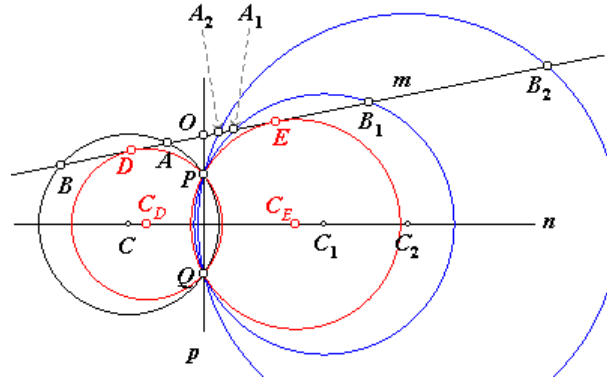
Door (centrale) projectie van de puntenrij E, P, F, Q vanuit het punt C hebben we nu ook $(DBRQ) = -1$ op de lijn DQ .

^[17] We schrijven hier (ABX) in plaats van XA / XB .

Appendix C

Een cirkelbundel \mathcal{B} kan ook worden vastgelegd door een cirkel C (we geven hier de cirkel aan met de naam van het middelpunt) en een snijlijn p van die cirkel (zie figuur C - 1).

Figuur C - 1



Zijn P en Q de snijpunten van p met C (P en Q zijn dan de basispunten van \mathcal{B}) en ligt het punt O op p – in dit geval op het verlengde van QP – dan heeft het punt O gelijke machten ten opzichte van alle exemplaren van \mathcal{B} ; immers die macht is steeds gelijk aan $OP \cdot OQ = k$.

Is nu m een rechte lijn die door O gaat, dan gaat door elk (van O verschillend) punt van m een exemplaar van \mathcal{B} ; de lijn m snijdt dus oneindig veel exemplaren van \mathcal{B} , zonder dat m echter alle exemplaren van \mathcal{B} hoeft te snijden.

Zijn A en B de snijpunten van m met C , A_1 en B_1 de snijpunten van m met C_1 en A_2 en B_2 die van m met C_2, \dots , dan is:

$$\begin{aligned} OP \cdot OQ = k &= OA \cdot OB \\ &= OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2 = \dots \end{aligned}$$

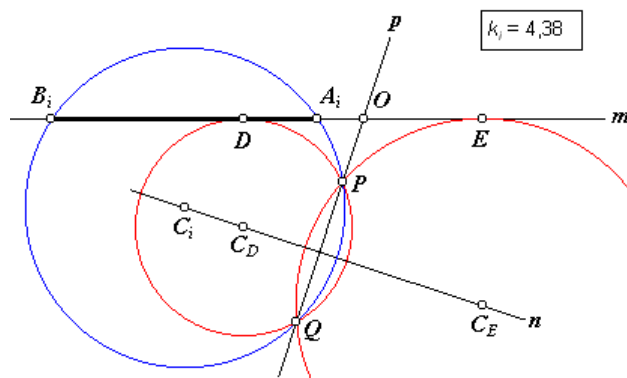
Maar dan behoren de puntenparen (A, B) , (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , ... volgens de definitie van paragraaf 1 tot een involutie op de lijn m met centrum O .

Opmerking. Het punt O vormt samen met het oneigenlijk punt van de lijn m eveneens een paar van die involutie.

[einde Opmerking]

Omdat O buiten het lijnstuk PQ ligt, is er hier sprake van een *hyperbolische involutie*. De bundel \mathcal{B} bevat nu twee exemplaren die aan de lijn m raken (zie in figuur C-1 de cirkels C_D en C_E). De dubbelpunten van de involutie zijn de punten D en E op m , met $OD = OE = \sqrt{k}$.

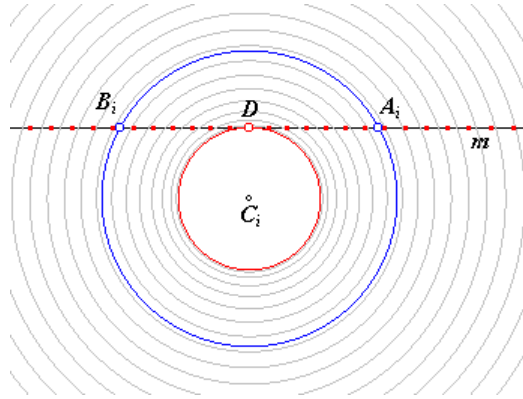
Figuur C - 2



Zie figuur C-2. Houden we bij een hyperbolische involutie op m het dubbelpunt D vast en verplaatsen we het tweede dubbelpunt E over de lijn m naar het oneigenlijk punt van m , dan gaat het punt O ook 'naar oneindig' en wordt de waarde van k steeds groter; $\lim_{j \rightarrow \infty} k = \infty$ (waarbij j een bij het punt E behorende index is).

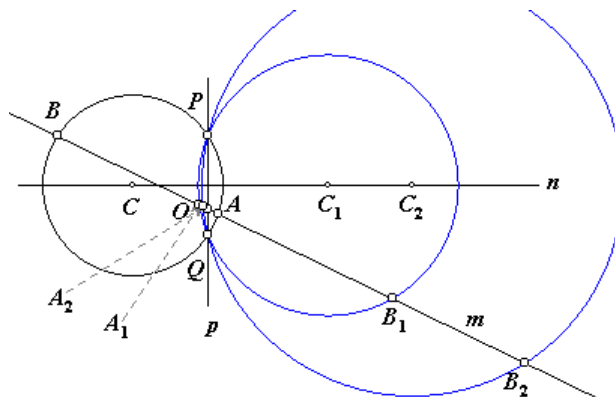
Zijn nu (A_i, B_i) puntenparen van de involutie, dan is in de 'limietstand' het punt D telkens het midden van het lijnstuk $A_i B_i$.

Figuur C - 3



Bekijken we in dit geval de situatie op de lijn m (zie figuur C-3), dan kunnen we de involutie ook beschrijven met een bundel van concentrische cirkels.

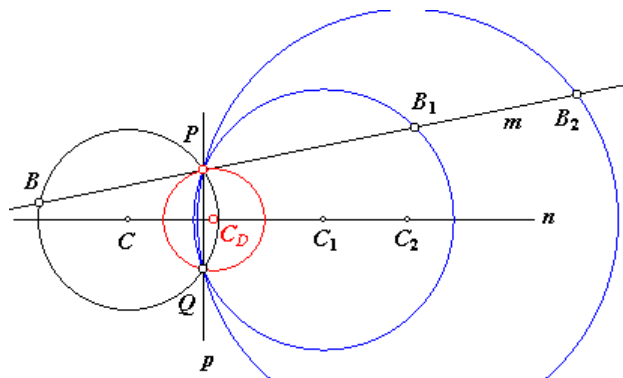
Figuur C - 4



Zie figuur C-4. We krijgen een *elliptische involutie* door het punt O op het lijnstuk PQ (dus tussen P en Q) te kiezen.

Duidelijk is dat nu er geen exemplaren van \mathcal{B} zijn die raken aan de lijn m .

Figuur C - 5



Zie figuur C-5. Laten we het punt O samenvallen met het punt P (of met het punt Q), dan is $OP \cdot OQ = 0$, en dan is $O = P = A = A_1 = A_2 = \dots$. Er is hier sprake van een *parabolische involutie*. Er is nu precies één exemplaar van \mathcal{B} (het middel van die cirkels is middelpunt C_D) dat raakt aan de lijn m .