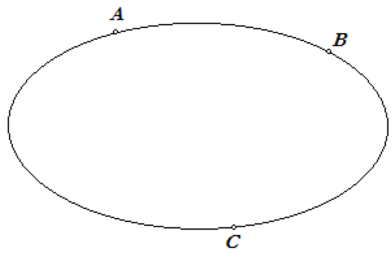
Bogen op kegelsneden in Cabri

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel
april 2008

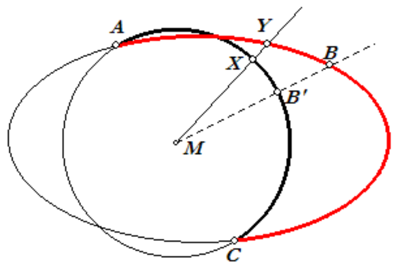
Het tekenen van een ellipsboog

Zomaar een vraag van een Cabri-gebruiker in de 'rubriek' *Cabri-FAQ* op mijn website: '*Hoe teken je een* ***ellipsboog****?*'

Ik beantwoordde die vraag (ongeveer) als volgt [1].

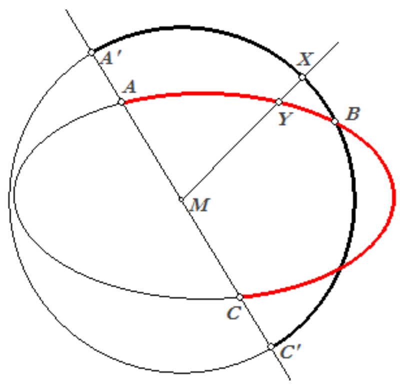


Kies op de ellips drie punten *A*, *B*, *C* die de boog gaan bepalen. *A* en *C* zijn de *eindpunten* van de boog en *B* is een *tussenpunt*, d.w.z. een punt op dát deel van de ellips waarop de boog gesitueerd moet worden.
En omdat de boog alleen als meetkundige plaats kan worden vastgelegd (hoe anders?), moet er dus voor een *sturend* (aandrijvend) punt *X* van die meetkundige plaats worden gezorgd.



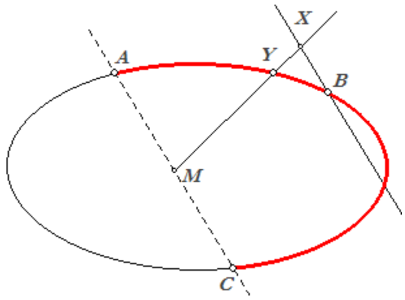
Het punt *X* plaatsen we op de halve cirkel *AB'C* met middellijn *AC* en middelpunt *M* die 'aan de kant' van *B* ligt. Het punt *B'* is daarbij het snijpunt van de halve lijn *MB* met de cirkel (*M*, *MA*).
Doorloopt nu *X* de cirkelboog *AB'C*, dan doorloopt het snijpunt *Y* van de halve lijn *MX* met de ellips de boog *ABC* op de ellips.

Tot hier mijn antwoord. De vraag en het antwoord gaven me voldoende stof tot wat verdere overpeinzingen. Allereerst. Het gegeven antwoord is niet het enige - en ook niet het eenvoudigste. Het antwoord hierboven werd ingegeven door het feit dat een sturend punt van een meetkundige plaats op een 'pad' moet liggen, en dan is de keuze van een cirkel of cirkelboog als pad bijna vanzelfsprekend.
Het kan ook met een *andere* cirkelboog.



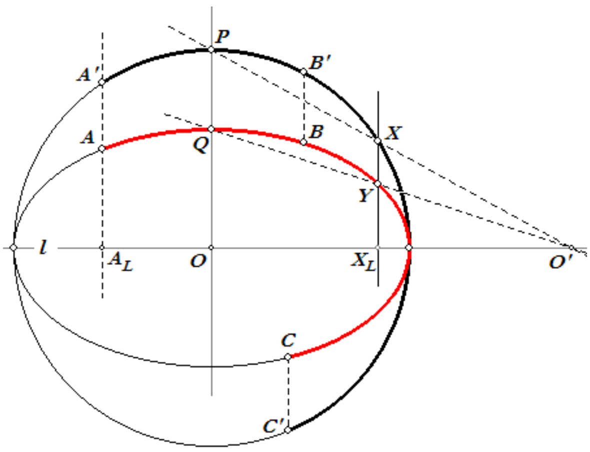
Het punt *M* is weer het midden van het lijnstuk *AC*.
Nu kiezen we het punt *X* op de boog van de cirkel (*M*, *MB*), die de lijn *AC* in de punten *A'* en *C'* snijdt.
X ligt dus op de cirkelboog *A'BC'*.
En ook hier is *Y* het snijpunt van de halve lijn *MX* met de ellips.

 Copyright © 2008, PandD Software, Rotterdam



De mijns inziens *eenvoudigste* oplossing wordt gevonden door het sturende punt X te situeren op de rechte lijn die door B gaat en die evenwijdig is met de lijn AC, waarbij ook in dit geval het punt Y het snijpunt is van de halve lijn MX met de ellips.

Maar er is nog een andere mogelijkheid. Is de ellips gegeven door de lengte van de *hoofdas* ($2a$) en die van de *nevenas* ($2b$), dan kunnen we de zogenoemde *hoofdcirkel* van de ellips gebruiken.
De hoofdcirkel is de cirkel die de halve hoofdas (a) als straal heeft en het middelpunt O van de ellips als middelpunt.
De ellips kan hierbij worden opgevat als *productfiguur* van die cirkel bij een loodrechte *lijnvermenigvuldiging* $\mathcal{L}$ met de factor b/a ten opzichte van de punten van de drager l van de hoofdas (zoals het punt A_L).[2]
Nu geldt voor het punt P, op de hoofdcirkel, en het punt Q, op de ellips, en beide op de nevenas van de ellips: $OP = a\,,\quad OQ = b$
Dus: $\mathcal{L}(P) = Q$



De punten A', B', C' liggen zó op de hoofdcirkel, dat:

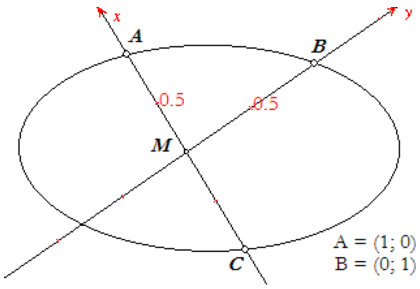
$$\mathcal{L}(A') = A,\quad \mathcal{L}(B') = B,\quad \mathcal{L}(C') = C$$

Het punt X kiezen we vervolgens (willekeurig) op de cirkelboog $A'B'C'$. Het punt Y vinden we dan met[3]:

- $XP \,\&\, l = O'$
- $O'Q \,\&\, XX_L = Y$

Daarbij is X_L het voetpunt van de loodlijn uit X op l.

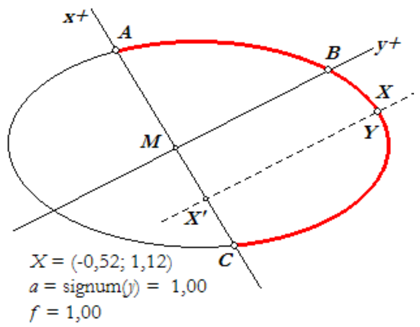
En (bijna) tot slot…



We kunnen het punt X ook *over de ellips zelf* laten lopen.

Om de positie van het punt X ten opzichte van de lijn AC vast te leggen brengen we een 'nieuw' assenstelsel MAB aan (met de Cabri-functie *NieuwAssenstelsel*[4]), waarbij de halve lijn MA de positieve x-as (x+) en de halve lijn MB de positieve y-as (y+) is. Daarbij kiezen we $A = (1, 0)$ en $B = (0, 1)$.

 Copyright © 2008, PandD Software, Rotterdam

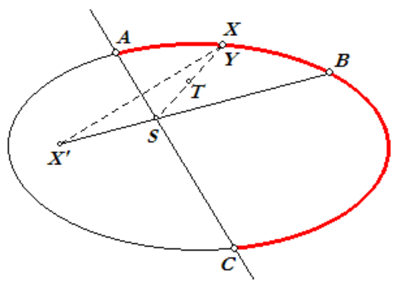


Als voor de y-coördinaat y_X van X in dit coördinatenstelsel geldt: $y_X \geq 0$
dan plaatsen we op de positie van het punt X een zogenoemd 'voorwaardelijk punt' Y.[5]
Is $y_X < 0$, dan doen we *niets* (de punten X en B liggen dan aan verschillende kanten van de lijn AC).
Het construeren van het voorwaardelijke punt Y verloopt als volgt:

- We bepalen met behulp van de *signum*-functie (**sign** in Cabri) het *teken a* van y_X; merk op dat a dan de waarden 1, 0 of -1 heeft.
- We berekenen (met Cabri's *Rekenmachine*) de waarde van het getal f met $f = (a + 1)/(a + 1)$. De mogelijke waarden van f zijn dan 1 (voor $a = 1$), 1 (voor $a = 0$) en 'bestaat niet' (voor $a = -1$).
- Als nu X' de projectie is van X op de x-as (projecteren evenwijdig met de lijn MB, de y-as), dan vermenigvuldigen we het punt X met de factor f en met X' als centrum (ook hier eigenlijk een *lijnvermenigvuldiging*). Dit geeft dan het punt Y (op dezelfde positie als die van het punt X).
  In het geval de waarde van f gelijk is aan 'bestaat niet', wordt het voorwaardelijke punt Y *niet* getekend.

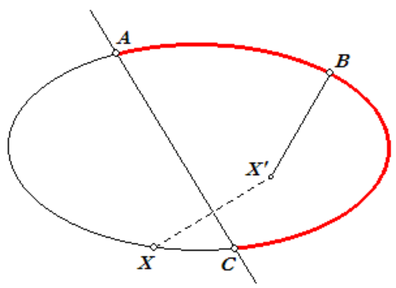
Als X dan de *gehele* ellips doorloopt, is de meetkundige plaats van het punt Y de bedoelde ellipsboog ABC.

Nu, wat betreft de ellips, echt tot slot…
We kunnen het in dit geval ook doen *zonder* een nieuw assenstelsel. We laten X weer over de gehele ellips lopen, waarbij we kijken of de punten X en B aan *dezelfde kant* van de lijn AC liggen.



Dat doen we door X te spiegelen in de lijn AC; het spiegelbeeld van X daarbij is X'.
Liggen X en B aan *dezelfde kant* van AC, dan snijdt het *lijnstuk* $X'B$ de lijn AC (in het punt S).
We kunnen nu het *voorwaardelijke* punt Y construeren door S te spiegelen in het midden T van XS (het punt Y krijgt daarbij dezelfde positie als die van X).[6]

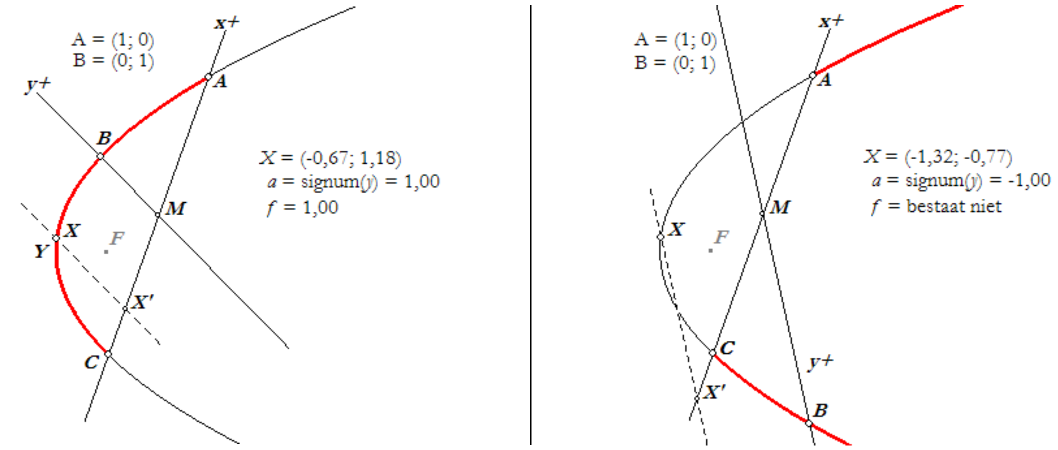
Als X de gehele ellips doorloopt, dan is de meetkundige plaats van het punt Y de gevraagd boog ABC.



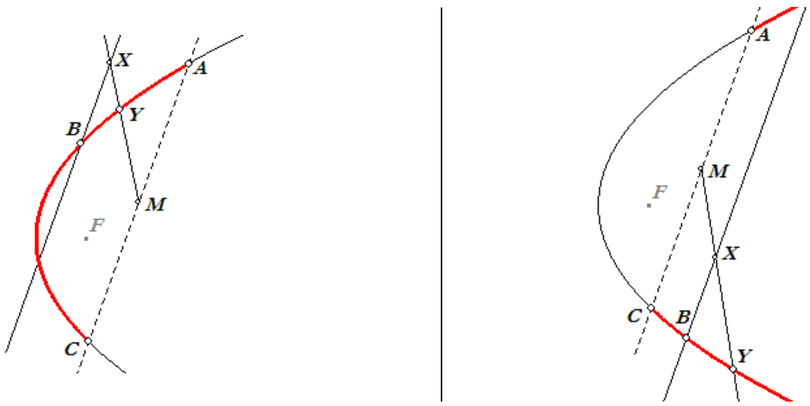
Nb. Liggen X en B aan *verschillende kanten* van AC (zie de figuur hiernaast), dan wordt het punt Y niet getekend (dan bestaat het punt $S = X'B$ & AC immers niet!).

Het tekenen van een paraboolboog

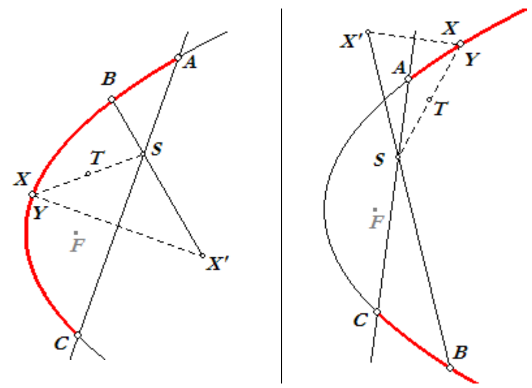
De methode waarbij gebruik gemaakt wordt van een nieuw assenstelsel, werkt ook voor een **paraboolboog**; zie onderstaande figuren. Links heeft de boog ABC een eindige lengte; de rechter figuur laat zien dat, als het punt B *niet* 'tussen' de punten A en C ligt, deze delen toch als één en dezelfde boog kunnen worden opgevat.



Overigens, ook de methode die gebaseerd is op de met AC evenwijdige lijn door het punt B (dat is dus de methode die voor de ellips door mij als het eenvoudigst is gekwalificeerd), kan óók voor een paraboolboog worden gebruikt.
Zie daarvoor onderstaande figuren waarin het sturende punt X van de meetkundige plaats gelegen is op de lijn door B evenwijdig met AC. Het punt Y is ook hier het snijpunt van de halve lijn MX met die lijn (M is weer het midden van het lijnstuk AC).



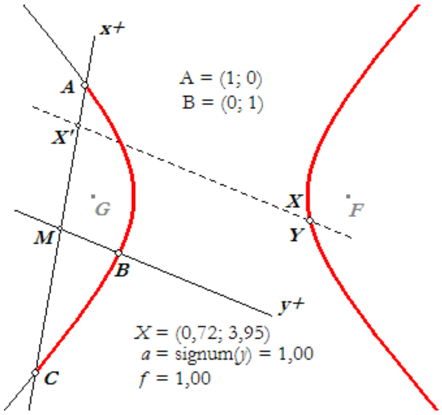
En ook hier kunnen we het punt X de parabool laten doorlopen *zonder* een nieuw assenstelsel te gebruiken (zie de methode bij de ellips aan het eind van de vorige paragraaf).



Het punt S is weer het snijpunt van het *lijnstuk* $X'B$ met de lijn AC (waarbij X' het spiegelbeeld is van X in die lijn).
En dan kan het voorwaardelijk punt Y (op dezelfde positie als die van X) worden gevonden door S te spiegelen in het midden T van XS.

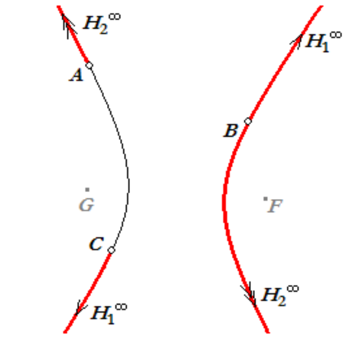
De gewenste boog ABC is dan weer de meetkundige plaats van het punt Y als X de parabool doorloopt.

En hoe zit het met een hyperboolboog?

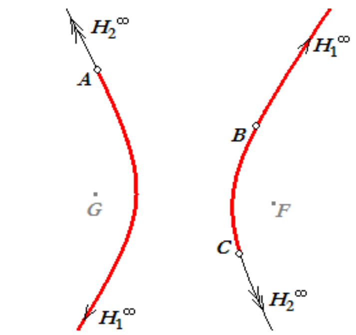


Wanneer we de methode waarbij gebruik gemaakt wordt van een nieuw assenstelsel, toepassen op de **hyperbool**, dan krijgen we helaas een meetkundige plaats die *niet* de verwachte gedaante heeft; zie nevenstaande figuur.
De oorzaak? Niet alleen de punten X op de (eindige) boog ABC op de linker tak, maar ook *alle* punten op de rechter tak van de hyperbool hebben een positieve y-coördinaat in het gedefinieerde assenstelsel!

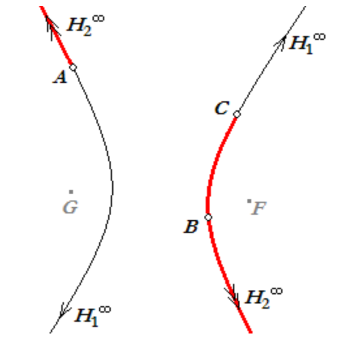
Wat we (ook) bij de hyperbool wensen, zijn bogen die ‘aansluitend’ zijn. In de volgende figuren is aangegeven hoe dat ‘aansluiten’ moet worden opgevat.
Als een punt X een hyperbool doorloopt, dan blijkt dat de takken via de *oneigenlijke* punten H_1^∞ en H_2^∞ met elkaar verbonden zijn; en daarvan moeten we gebruik maken.



boog ABC = boog $A\ H_2^\infty\ B\ H_1^\infty\ C$

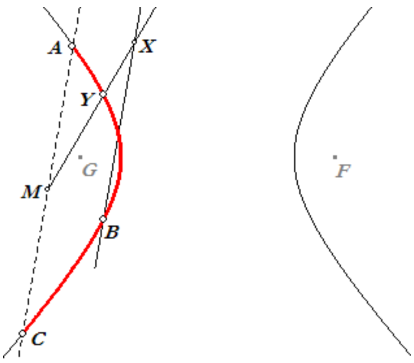


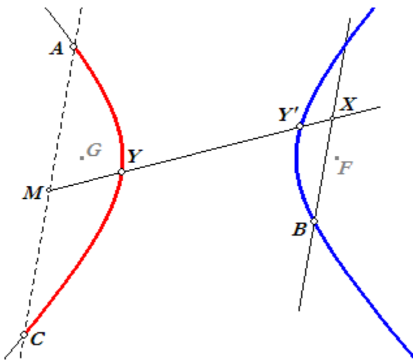
boog ABC = boog $A\ H_1^\infty\ B\ C$



boog ABC = boog $A\ H_2^\infty\ B\ C$

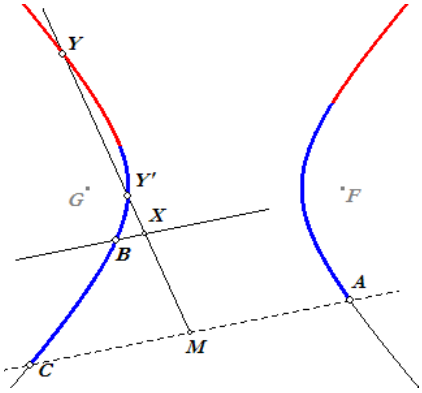
In eerste instantie lijkt het erop dat de methode met de door B gaande en met AC evenwijdige lijn *goed* werkt voor de hyperbool (zie de figuur hieronder, links).



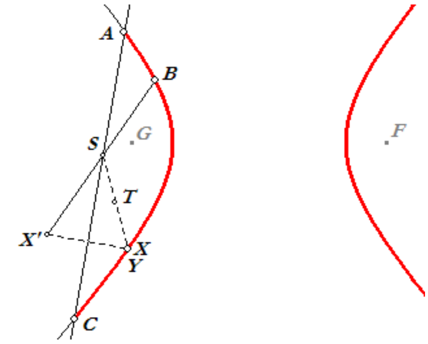


Maar ligt het punt B op de rechter tak van de hyperbool (zie de figuur rechts), dan heeft de meetkundige plaats opnieuw een gedaante die we niet wensen, te meer daar er nu *twee* snijpunten Y en Y''zijn van de lijn MX met de kegelsnede. Het punt Y beschrijft (ook hier) de (eindige) boog AC op de linker tak; het punt Y' beschrijft de *gehele* rechter tak (we hebben *twee* meetkundige plaatsen).

 Copyright © 2008, PandD Software, Rotterdam



Als de punten A en C op verschillende takken van de hyperbool liggen, krijgen we de gewenste boog evenmin. In dit geval is er (soms) ook sprake van *twee* snijpunten Y en Y' van de lijn MX met de hyperbool, met als gevolg dus ook *twee* meetkundige plaatsen.



De lezer ga na dat de methode waarbij gebruik gemaakt wordt van het spiegelbeeld X' van het punt X (*op* de hyperbool) in de lijn AC *ook niet* tot het gewenste resultaat leidt. Zie de figuur hiernaast.
Nb. Als X op de rechter tak van de hyperbool ligt, bestaat het punt $S = X'B$ & AC ook.

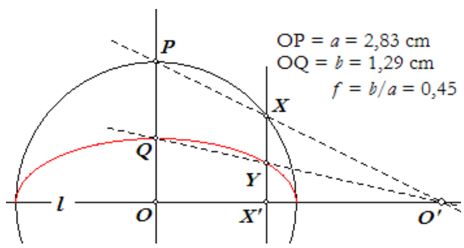
Het ziet er dus naar uit dat we voor het tekenen van een hyperboolboog een andere strategie zullen moeten volgen. Maar welke strategie dat is…?
Daarbij, het zou mooi zijn als we *eenzelfde* strategie zouden kunnen vinden voor de ellips, de parabool én de hyperbool!

Noten

[1] Zie *Cabri-FAQ*, vraag 48, dd. 16 april 2008. Op: *www.pandd.nl/vgv/faq48.htm* (website van de auteur).
Op die pagina is ook een Cabri-macro beschreven voor de betreffende ellipsboog.

[2] Zij X' een willekeurig punt van een middellijn l van de cirkel met middelpunt O en straal $OP = a$ (in O loodrecht op l).
Q is een vast punt op het lijnstuk OP met $OQ = b$. De factor f is nu gelijk aan b/a.
Bij de loodrechte *lijnvermenigvuldiging* L van de cirkel (ten opzichte van l) met factor f is:

$$\mathsf{L}(P) = Q \text{ (centrum } O), \quad \mathsf{L}(X) = Y \text{ (centrum } X')$$



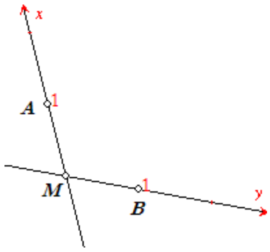
Maar dan is ook: $\mathsf{L}(PX) = QY$
En dus geldt voor het snijpunt O' van de lijnen PX en QY:

$$L(O') = O'$$

waaruit volgt dat O' (voor *iedere positie* van het punt X op de cirkel) op de lijn l ligt.

[3] Met l & m = X bedoelen we: het punt X is het snijpunt van de lijnen l en m.

[4] De Cabri-functie *NieuwAssenstelsel* heeft als parameters drie punten die de nieuwe oorsprong, de nieuwe x-as en de nieuwe y-as bepalen. De coördinaten van andere punten op het Cabri-tekenscherm kunnen ten opzichte van dit nieuwe assenstelsel (dat niet noodzakelijk rechthoekig behoeft te zijn) worden vastgelegd.



De help-tekst bij deze functie (die ook in Cabri II vs 1.0 beschikbaar is) luidt:
Creëer een assenstelsel gedefinieerd door drie punten. Het eerste punt legt de oorsprong vast, het tweede punt bepaalt de x-as en het derde punt de y-as.
Indien het tweede en derde punt reeds bestaan, bepalen deze punten de eenheden op die assen.

[5] Een *voorwaardelijk punt* in Cabri is een punt op het tekenscherm dat *alleen* bestaat als aan een bepaalde (meetkundige en/of rekenkundige) voorwaarde voldaan is.
Hier is er sprake van een *rekenkundige* voorwaarde: de y-coördinaat van het punt X is groter of gelijk aan 0.
Zie verder: *www.pandd.demon.nl/voorwptn.htm* (website van de auteur).

[6] Merk op dat er hier sprake is van een *meetkundige* voorwaarde bij het voorwaardelijke punt Y: het punt Y bestaat *alleen* als het punt $S = X'B$ & AC bestaat.

 Copyright © 2008, PandD Software, Rotterdam