De stelling van Kiepert

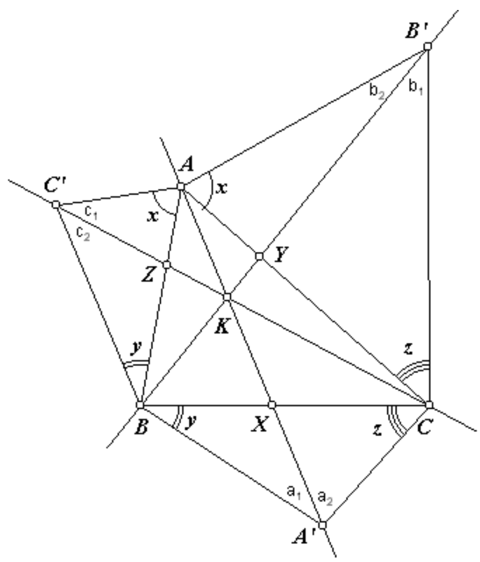
Dick Klingens
Krimpenerwaard College
Krimpen aan den IJssel (Nederland)
juni 2005

Definitie. Twee lijnen zijn **isogonaal verwant** tov. een hoek als die twee lijnen elkaars spiegelbeeld zijn in de bissectrice van die hoek.

Meestal wordt deze isogonale verwantschap gebruikt bij lijnen die door de hoekpunten van een driehoek gaan (bij hoektransversalen, dus).
We hebben, dit laatste als uitgangspunt nemend, de volgende belangrijke stelling.

Stelling 1. *Zijn de lijnenparen* (AB', AC'), (BC', BA'), (CA', CB') *isogonaal verwant tov. de daarbij behorende hoeken van een driehoek ABC* (zoals in figuur 1), *dan zijn de lijnen AA', BB', CC' concurrent.*

Figuur 1



In figuur 1 is $B'AC = BAC' = x$. Hierdoor voldoen de lijnen AB' en AC' aan de in de stelling genoemde eigenschap (ze zijn isogonaal verwant). Hetzelfde geldt voor de lijnen BC', BA' met hoek y en CA', CB' met hoek z.
Voorts is $AA' \wedge BC = X$, $BB' \wedge CA = Y$, $CC' \wedge AB = Z$.
We zullen nu aantonen dat [1]

$$(ABZ)(BCX)(CAY) = -1 \tag{1}$$

waardoor op basis van de stelling van Ceva kan worden besloten tot:

de hoekstransversalen AA', BB', CC' van driehoek ABC gaan door hetzelfde punt (in de figuur is dat het punt K).

We passen in verschillende driehoeken de sinusregel toe. Daarbij maken we gebruik van de hoeken a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 zoals die in figuur 1 zijn aangegeven.

[1] Onder (PQR) verstaan we de (van teken voorziene) **deelverhouding** RP/RQ op de lijn PQ. (PQR) is negatief als R op het lijnstuk PQ ligt.

In driehoek $AC'Z$ is: $ZA = C'Z\dfrac{\sin c_1}{\sin x}$ en in driehoek $BC'Z$: $ZB = C'Z\dfrac{\sin c_2}{\sin y}$.

Evenzo:

$$XB = A'X\frac{\sin a_1}{\sin y}, \qquad XC = A'X\frac{\sin a_2}{\sin z}$$

$$YC = B'Y\frac{\sin b_1}{\sin z}, \qquad YA = B'Y\frac{\sin b_2}{\sin x}$$

Nu is:

$$(ABZ)(BCX)(CAY) = \frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA} = -\frac{\sin c_1}{\sin c_2}\cdot\frac{\sin a_1}{\sin a_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin b_2} \tag{2}$$

Verder is in driehoek BAA': $\sin a_1 = \sin(B+y)\dfrac{AB}{AA'}$ en in driehoek CAA': $\sin a_2 = \sin(C+z)\dfrac{AC}{AA'}$.[2]

En analoog ook:

$$\sin b_1 = \sin(C+x)\frac{BC}{BB'}, \qquad \sin b_2 = \sin(A+x)\frac{AB}{BB'}$$

$$\sin c_1 = \sin(A+x)\frac{AC}{CC'}, \qquad \sin c_2 = \sin(B+y)\frac{BC}{CC'}$$

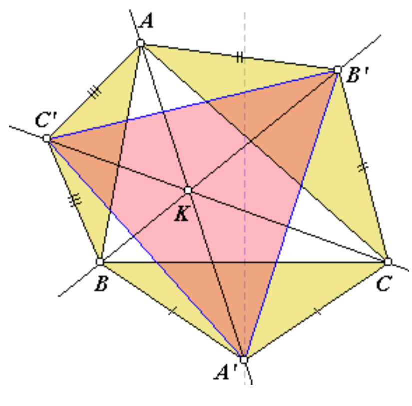
Uitdrukking (2) gaat daardoor over in:

$$\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA} = -\frac{\sin(A+x)\cdot AC}{\sin(B+y)\cdot BC}\cdot\frac{\sin(B+y)\cdot AB}{\sin(C+z)\cdot AC}\cdot\frac{\sin(C+z)\cdot BC}{\sin(A+x)\cdot AB} = -1$$

Waarmee stelling 1 bewezen is.

Stelling 2. (Stelling van Kiepert [3]) *Worden **gelijkvormige**, gelijkbenige driehoeken ABC', BCA' en CAB' op de zijden van driehoek ABC beschreven, dan zijn AA', BB', CC' concurrent.*

Figuur 2



Voor $x = y = z = \phi$, waarbij ϕ de grootte is van de basishoeken van de gelijkbenige driehoeken, volgt stelling 2 direct uit stelling 1.

Opmerking. Volgens de stelling van Desargues zijn de driehoeken *ABC* en *A'B'C'* nu ook lijnperspectief: de snijpunten van de lijnenparen (*AB*, *A'B'*), (*AC*, *A'C'*), (*CA*, *C'A'*) zijn dus collineair.

[2] De hoeken van driehoek *ABC* geven we aan met *A*, *B*, *C* indien er geen verwarring kan ontstaan met de hoekpunten zelf.
[3] Naar **Ludwig Kiepert**, 1846-1934, Duitsland.