LINIAALCONSTRUCTIES

Dick Klingens

Die Geometrie im engeren Sinne bedarf zu ihren Constructionen zweier Instrumente, des Zirkels und des Lineals. Ein italienischer Mathematiker, *Mascheroni*, hat auf eine scharfsinnige Weise gezeigt, dass alle geometrische Aufgaben mittelst des Zirkels allein gelöst werden können. Andererseits haben in der neuesten Zeit einige französische Mathematiker auf zahlreiche Aufgaben aufmerksam gemacht, deren Lösung nur die Hülfe des Lineals, oder das Ziehen gerader Linien zwischen gegebenen Punkten, erfordert. Ja es haben Einige sogar schon die Vermuthung ausgesprochen, dass mittelst des Lineals alle Constructionen ausführbar seihen, sobald in der Ebene irgend ein fester Hülfskreis gegeben ist. Die vorliegende kleine Schrift hat zum Zweck, diese Vermuthung zu bestätigen.

Jacob Steiner, Die geometrischen Constructionen (1833)

versie 0.7b
(februari 2004)

Inhoud

1. Inleiding
2. Enkele eenvoudige liniaalconstructies
3. Liniaalconstructies waarbij twee evenwijdige lijnen gegeven zijn
4. Liniaalconstructies waarbij een parallellogran gegeven is
5. Liniaalconstructies waarbij een cirkel gegeven is – Steiner-meetkunde
6. Wat meer Steiner-meetkunde
7. De hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde
8. Steiners bewijs
9. Harmonische afbeelding
10. Cirkelbundels
11. Het middelpunt van een cirkel

Appendix I
Appendix II
Appendix III
Literatuur

Ob es mir gelungen sei, den vorgesteckten Zweck auf die einfachste Weise zu erreichen, vermag ich nicht zu entscheiden, auch bin ich nicht einmal überzeugt, ob selbst bei dem von mir eingeschlagen Weg überall die bequemsten Constructionen angewendet worden sind oder nicht. Wenn indessen der Gegenstand einiges Interesse erregen sollte, so wird, bei dem eifrigen Betriebe der Geometrie in unserer Zeit, das Fehlende bald von Anderen ergänzt werden, und ich durfte dann wohl auf einige Nachsicht rechen.

Jacob Steiner, Die geometrischen Constructionen (1833)

1. Inleiding

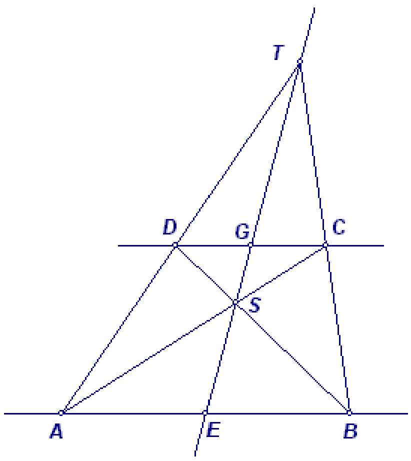
In hetgeen volgt zullen we een aantal constructies behandelen waarbij de liniaal als enig toegelaten constructiehulpmiddel wordt gebruikt. We spreken in dit geval wel van *liniaalconstructies* (en soms ook wel van *liniaalmeetkunde* of, in een bijzonder geval, ***Steiner-meetkunde***).
We gaan daarbij uit van aanwezige kennis omtrent het begrip dubbelverhouding en van de stellingen van Pappos, van Pascal en va Desargues (dit zijn stellingen uit de projectieve meetkunde).
Voorts worden ook de begrippen volledige vierzijde, volledige vierhoek en oneigenlijk punt bekend verondersteld, alsmede het begrip machtlijn van twee cirkels en inversie ten opzichte van een cirkel.

We bewijzen allereerst een fundamentele stelling.

Stelling 1
De rechte lijn door het snijpunt van de diagonalen van een trapezium en door het snijpunt van de opstaande zijden, deelt de beide evenwijdige zijden middendoor.

1e bewijs – Beschouw de volledige vierzijde *CTDS*.
We gebruiken de stelling:

Twee diagonalen van een volledige vierzijde scheiden de hoekpunten op de derde diagonaal harmonisch.



Nu zijn *A* en *B* hoekpunten van die vierhoek en *AB* is dan dus een diagonaal. De beide andere diagonalen, *CD* en *ST*, scheiden *A* en *B* dus harmonisch (volgens de genoemde stelling), d.w.z. hun snijpunten met *AB* liggen harmonisch met *A* en *B*. *ST* snijdt *AB* in *E*. Het vierde harmonische punt is het *oneigenlijk* snijpunt van *AB* en *CD*. *E* is dus het midden van *AB*.
Evenzo kan bewezen worden dat *G* het midden is van *CD*. □

2e bewijs – We hebben de volgende paren gelijkvormige driehoeken: (*AET*, *DGT*), (*EBT*, *GCT*) en (*AES*, *CGS*), (*EBS*, *GDS*). Hieruit volgt dan:

$$\frac{AE}{DG}=\frac{ET}{ES},\quad \frac{EB}{GC}=\frac{ET}{ES}\ \text{ en }\ \frac{AE}{CG}=\frac{ES}{GS},\quad \frac{EB}{GD}=\frac{ES}{GS}$$

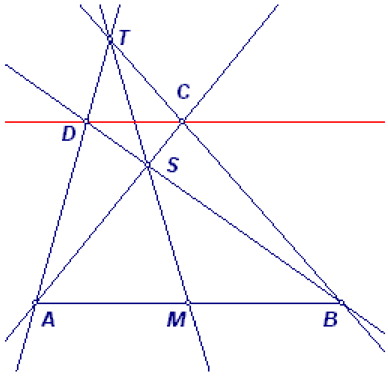
Door gelijkstelling vinden we:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC}\ \text{ en }\ \frac{AE}{EB}=\frac{CG}{GD}$$

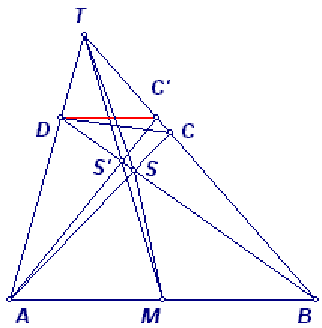
Vermenigvuldiging van beide relaties geeft dan: $\left(\dfrac{AE}{EB}\right)^2=1$

Waaruit volgt: *AE* = *EB*.
Op dezelfde manier kunnen we bewijzen dat *DG* = *GC*. □

Constructie 1
Gegeven is een lijnstuk *AB* met midden *M*. Construeer door een gegeven punt *D* een lijn evenwijdig met de lijn *AB*.



Constructiebeschrijving – Teken de lijnen *AD* en *BD*. Kies een punt (willekeurig) *T* op het verlengde van *AD*. Teken dan de lijn *MT*. Het snijpunt daarvan met *BD* is het punt *S*. Teken *AS* en *BT*, die elkaar snijden in *C*. De lijn *CD* is dan de gevraagde lijn.
Bewijs – We gebruiken Stelling 1 bij een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat *CD* niet evenwijdig is met *AB*. Dan is er op *BT* een van *C* verschillend punt *C'* waarvoor geldt dat *C'D* evenwijdig is met *AB*.

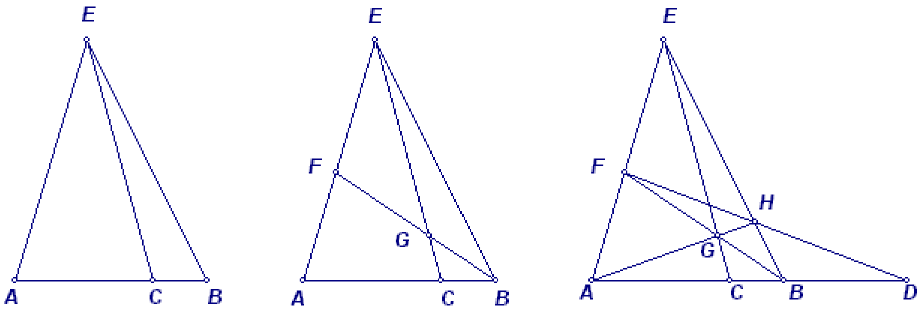


ABC'D is dan een trapezium. De diagonalen daarvan snijden elkaar in *S'* (dat verschilt van *S*; immers is *S* = *S'*, dan vallen *C* en *C'* ook samen).
Volgens Stelling 1 gaat de lijn de lijn *TS'* door het midden *M* van *AB*. Maar ook *TS* gaat door *M*. Op de lijn *BD* liggen dus twee punten die op de verbindingslijn van de punten *T* en *S* liggen. En dat is niet mogelijk. Zodat inderdaad *CD* // *AB*. □

2. Enkele eenvoudige liniaalconstructies

Constructie 2
Op een lijn *m* zijn drie verschillende punten *A*, *B*, *C* gegeven. Construeer op *m* het punt *D*, dat samen met C de punten *A* en *B* harmonisch scheidt.[1]
Met andere woorden: construeer het punt *D* zodat (*ABCD*) = -1.

Constructiebeschrijving – De constructie is gebaseerd op de harmonische eigenschappen van een volledige vierhoek. We laten hieronder alle stappen van de constructie in enkele afzonderlijke figuren zien (voor *m* geldt dus: $m \equiv AB$).

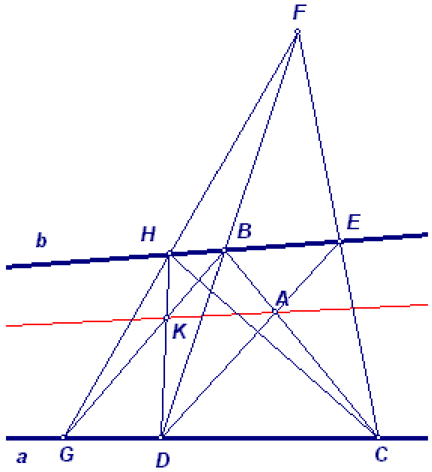


Kies een willekeurig punt *E* buiten de lijn *m* en teken de lijnen *AE*, *BE*, *CE*. Op *AE* kiezen we een punt *F*, niet-samenvallend met *A* en *E*. De lijn *BF* snijdt nu de lijn *CE* in het punt G. De lijn *AG* snijdt *BE* in het punt *H*. De lijn *FH* snijdt dan de lijn *m* in het gezochte punt *D*.
Bewijs – De lijn *AB* is een diagonaal van de volledige vierhoek *EFGH*. Daarom is nu (*ABCD*) = -1. □

Opmerking – Hierboven is de constructie weergegeven als het punt *C* op het lijnstuk *AB* ligt. De constructie is identiek als *C* buiten het lijnstuk *AB* op de lijn *AB* ligt.

Constructie 3
Teken een rechte lijn door een gegeven punt *A* en door het *ontoegankelijke*[2] snijpunt *X* van twee gegeven snijdende lijnen *a* en *b*.

Constructiebeschrijving – Zij *F* een punt buiten de lijnen *a* en *b*, niet samenvallend met *A*.
We vatten de lijnen *a* en *b* en de lijnen *AX* en *FX* op als diagonalen van een volledige vierhoek *BDCE*. Hierbij ligt *B* op *b* en *C* op *a*. De lijn *XA* is dan de vierde harmonische bij de lijnen *a* ; *b* ; *XF*.



Beschouwen we de volledige vierhoek *BDGH*, dan is ook *XK* de vierde harmonische lijn bij *a* ; *b* ; *XF*.
De lijnen *XA* en *XK* vallen dus samen.

[1] Is er in deze tekst sprake van een dubbelverhouding (*ABCD*), dan gaan we er in hetgeen volgt van uit, dat de punten *A*, *B*, *C*, *D* collineair zijn.
[2] De delen van een figuur die in het vlak van tekening liggen en niet zichtbaar zijn (of geacht worden niet zichtbaar te zijn), worden o n t o e g a n k e l i j k genoemd. Het begrip "ontoegankelijk" wordt meestal alleen gebruikt bij punten.

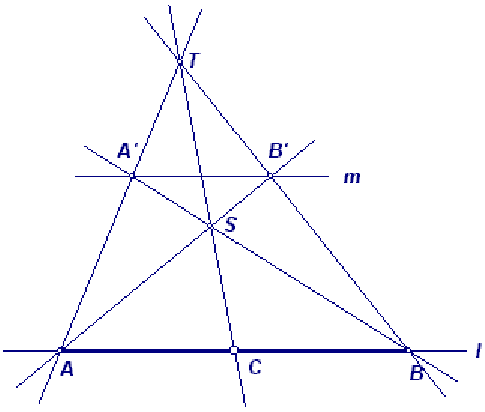
De lijn *AK* is dus de gevraagde lijn.
Bewijs – Zie de constructiebeschrijving.

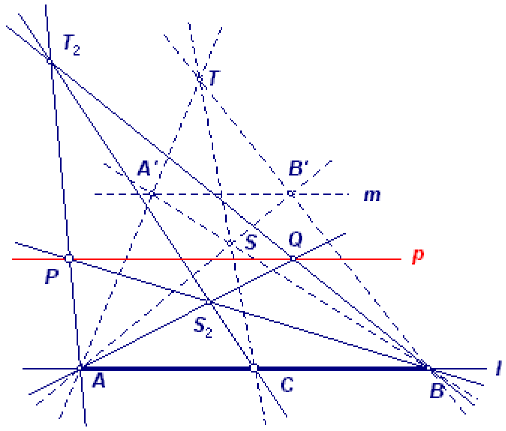
Opmerking – Het bewijs volgt ook uit de stelling van Desargues. Bekijk de driehoeken *BGC* en *DHE*. De verbindingslijnen van de 'overeenkomstige' hoekpunten, *BD*, *GH*, *CE*, zijn concurrent in het punt *T*. De driehoeken zijn dus puntperspectief. De snijpunten van de overeenkomstige zijden zijn dus (volgens Desargues) collineair: $BG \wedge DH = K$, $BC \wedge DE = A$, $GC \wedge HE = X$. *AK* gaat dus door *X*.[3] □

[3] Met $AB \wedge CD$ wordt bedoeld: het snijpunt van de lijnen (lijnstukken) *AB* en *CD*.

3. Liniaalconstructies waarbij twee evenwijdige lijnen gegeven zijn

Constructie 4
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen l en m. Verdeel een gegeven lijnstuk AB op l in twee gelijke stukken.



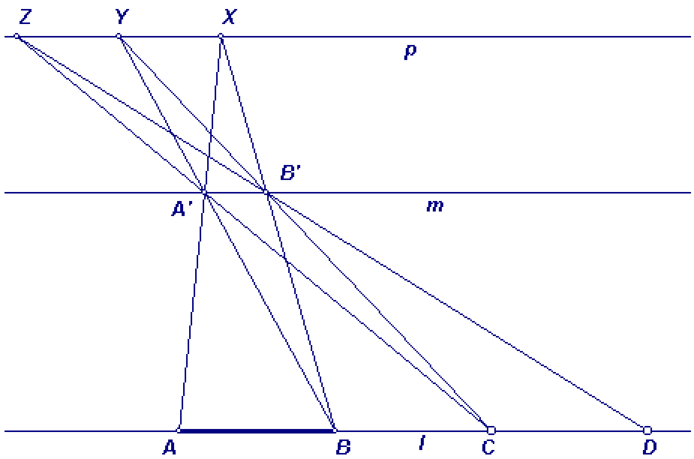


Constructiebeschrijving – Zie de linker figuur hierboven. Kies de punten A' en B' op m en zij $S = AB' \wedge BA'$. TS is dan de lijn die het lijnstuk AB in het snijpunt C halveert.
Bewijs – Zie Stelling 1. □

Constructie 5
Teken een lijn p evenwijdig met twee gegeven evenwijdige lijnen l en m door een punt P dat buiten die lijnen ligt.

Constructiebeschrijving – Zie de rechter figuur bij Constructie 4. Kies (bijvoorbeeld) op de lijn l een willekeurig lijnstuk AB en construeer conform Constructie 4 het midden C van AB (hierbij wordt dus de lijn m gebruikt). Construeer dan volgens Constructie 1 (gebruik makend van de punten T_2, S_2 en Q) de lijn p door P evenwijdig met AB. □

Constructie 6
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen l en m en een lijnstuk AB op l. Construeer een lijnstuk dat n keer zo lang is als AB (n is een geheel getal).



Constructiebeschrijving – Kies een punt X buiten de lijnen l en m. Construeer door X een lijn p evenwijdig met l (volgens Constructie 5). De lijnen XA en XB snijden de lijn m in de punten A', B'. De lijn BA' snijdt p in het punt Y. De lijn YB' snijdt de lijn l in het punt C. Nu is $|BC| = |AB|$, en dus $|AC| = 2\,|AB|$.[4] Op

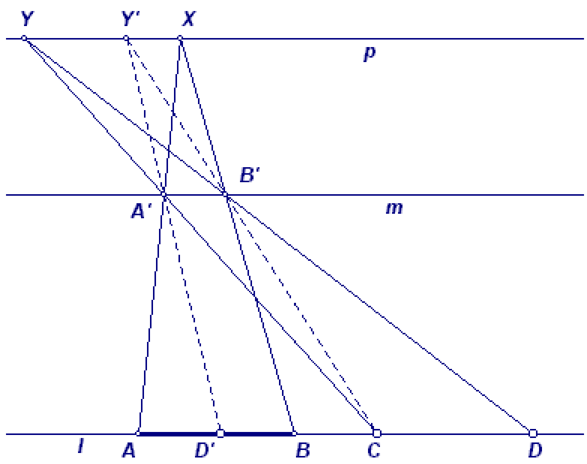
[4] Met $|XY|$ wordt bedoeld de 'lengte van het lijnstuk XY'. Indien er geen verwarring omtrent de betekenis kan ontstaan, wordt ook wel (zoals gebruikelijk) XY geschreven.

dezelfde manier (via het punt *Z*) kunnen we ook het punt *D* construeren met |*CD*| = |*BC*|, zodat |*AD*| = 3 |*AB*|. Enzovoorts.
Bewijs – Zie Stelling 1. □

Constructie 7
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen *l* en *m*, een lijnstuk *AB* op *l* en een punt *C* op *l*. Construeer een lijnstuk *CD* op *l* met |*CD*| = |*AB*|.

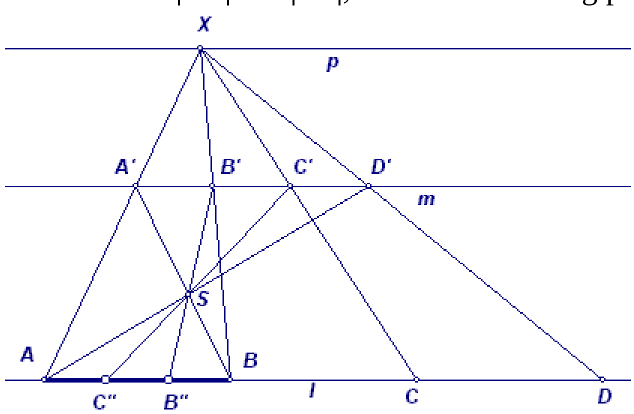
Constructiebeschrijving – Construeer weer door een punt *X* buiten de lijnen *l* en *m* een lijn *p* evenwijdig met *l* (gebruik makend van de snijpunten van *XA* en *XB* met *m*). *CA'* snijdt de lijn *p* in *Y*. De lijn *YB'* snijdt de lijn *l* in *D*. Dan is |*AB*| = |*CD*|.

Opmerking – Het probleem heeft twee oplossingen. De tweede oplossing is het lijnstuk *CD'* (via het punt *Y'* op *p*; zie onderstaande figuur). □



Constructie 8
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen *l* en *m*, en een lijnstuk *AB* op *l*. Verdeel dit lijnstuk in *n* gelijke delen.

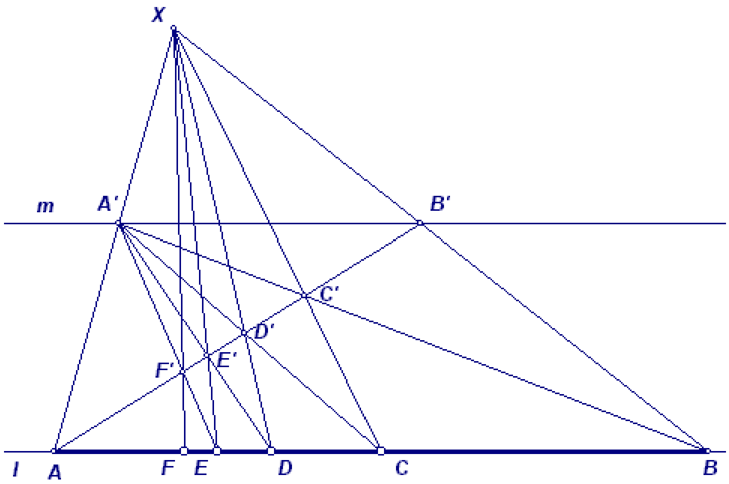
Constructiebeschrijving – We geven de constructie voor *n* = 3.
We construeren eerst een lijnstuk *AD* met |*AD*| = 3 |*AB*|, via een willekeurig punt *K* (zie Constructie 7).



Op de lijn *m* hebben we dan |*A'B'*| = |*B'C'*| = |*C'D'*|. Zij nu *S* = *AD'* ∧ *BA'*. De lijnen *B'S* en C'S snijden nu het lijnstuk AB in opvolgend B'' en C''. Deze punten delen het lijnstuk AB in drie gelijke stukken. □

Constructie 9
Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen *l* en *m*. *AB* is een lijnstuk op *l*. Construeer een lijnstuk *CD* op *l* met $|CD| = \frac{1}{n}|AB|$ (*n* is geheel).

N.B. In Constructie 8 moesten $n - 1$ deelpunten worden geconstrueerd; in Constructie 9 is slechts één deelpunt noodzakelijk.



Constructiebeschrijving – Bij een willekeurig punt X, buiten l en m zijn A' en B' de snijpunten van opvolgend XA en XB met m. De lijnen AB' en BA' snijden elkaar in C'. De lijn XC' snijdt de lijn l in het punt C. C is dan het midden van AB (zie Stelling 1). $D' = CA' \wedge AB'$ en $D = XD' \wedge l$.

We zullen nu bewijzen, dat $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$.

We beschouwen de volledige vierhoek $AD'C'X$. De punten A, C, D, B vormen een harmonisch viertal; dus: ($ACDB$) = -1 of $\dfrac{DA}{DC} : \dfrac{BA}{BC} = -1$.

Dit betekent dat $DA : DC = BA : BC = 2 : 1$, zodat $|DA| = 2\,|DC|$ en dus $DA : BA = 2 : 6 = 1 : 3$, met andere woorden $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$.

Door de analoge constructie van E' en F' op AB' vinden we de punten E en F op l met $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$ en $|AF| = \frac{1}{5}|AB|$. Enzovoorts. □

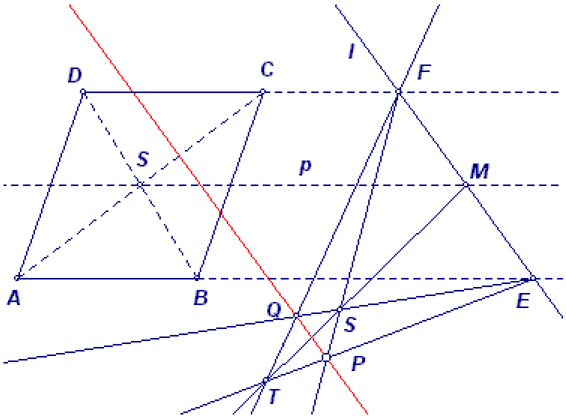
Opmerking – Constructie 9 is afkomstig van *Charles Julien Brianchon* (1783-1864, Frankrijk). Hij publiceerde de constructie in '*Application de la théorie des tranversales*' (1818).

4. Liniaalconstructies waarbij een parallellogram gegeven is

We merken allereerst op, dat indien een parallellogram gegeven is, alle constructies uit de voorgaande paragrafen eveneens met liniaal alleen uitvoerbaar zijn.

Constructie 10
Gegeven is een parallellogram *ABCD*. Construeer door een gegeven punt *P* een lijn *m* die evenwijdig is met een gegeven lijn *l*.

Constructiebeschrijving – *E* en *F* zijn de snijpunten van de lijnen *AB* en *CD* met de lijn *l*. We kunnen door het snijpunt *S* van de diagonalen van *ABCD* een lijn *p* tekenen evenwijdig met de zijde *AB* van dat parallellogram (zie Constructie 5).

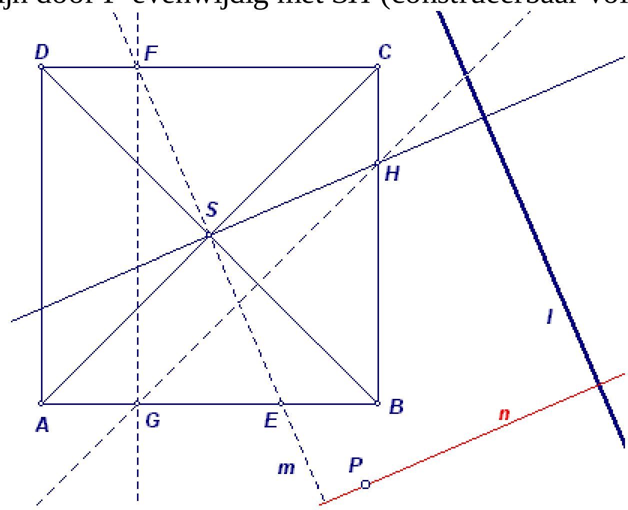


Deze lijn snijdt *l* in *M*. Het punt *M* is nu het midden van het lijnstuk *EF*. Volgens Constructie 1 is de gevraagde lijn door *P* (de lijn *PQ*) dan construeerbaar. □

Kiezen we in plaats van het op voorhand gegeven parallellogram een **vierkant**, dan kunnen ook de volgende twee constructieproblemen worden opgelost met een liniaalconstructie.

Constructie 11
Gegeven is een vierkant *ABCD*. Construeer door een gegeven punt *P* een loodlijn op een gegeven lijn *l*.

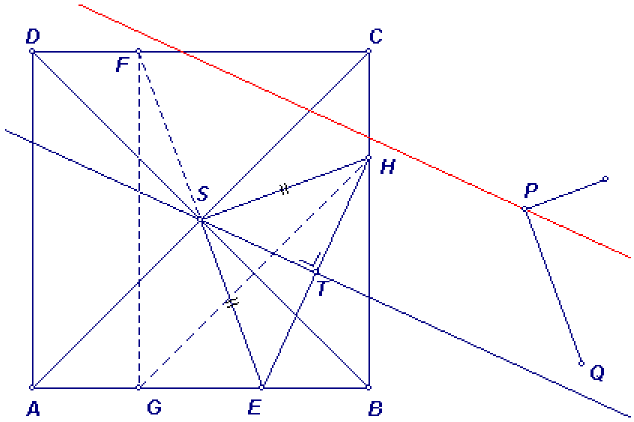
Constructiebeschrijving – Zij *S* het snijpunt van de diagonalen van *ABCD*. Door *S* kunnen we (volgens Constructie 10 een lijn *EF* construeren die evenwijdig is met *l*. Door *F* construeren we de lijn *FG* die evenwijdig is met *AC* en dan door *G* de lijn *GH* die evenwijdig is met *AC*. We kunnen nu aantonen dat *SH* loodrecht staat op *l*.
De gevraagde lijn is dan de lijn door *P* evenwijdig met *SH* (construeerbaar volgens Constructie 10).



Bewijs – We tonen aan dat *SH* loodrecht staat op *l*.

HSB is congruent met *FSC* (ZHZ), waaruit volgt dat $\angle HSB = \angle FSC$. Nu is:
$\angle HSE = \angle HSB + \angle BSE = \angle CSF + \angle FSD = 90^\circ$. □

Constructie 12
Gegeven een vierkant *ABCD*. Construeer de bissectrice van een gegeven rechte hoek.



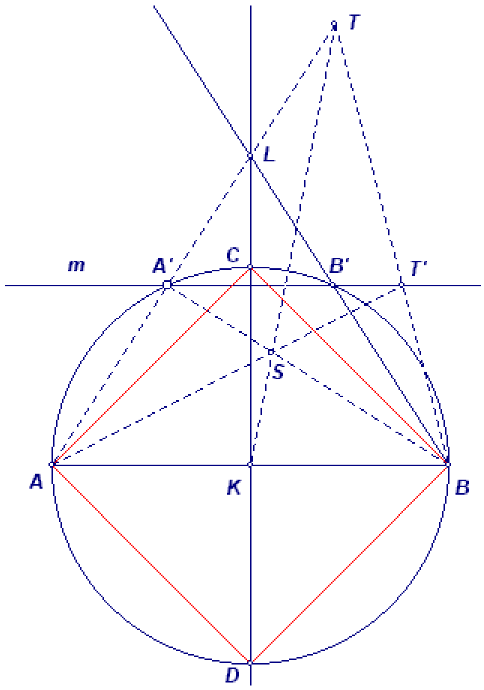
Constructiebeschrijving – Zij *P* de gegeven rechte hoek.
Met $PQ \equiv l$ construeren we, op dezelfde manier als in Constructie 11, opvolgend de punten *E*, *F*, *G* en *H*.
Nu is $HS = FS = SE$, zodat *HSE* een gelijkbenige en in *S* rechthoekige driehoek is. De bissectrice van *S* in deze driehoek gaat door het midden *T* van *HE* (of ook: *ST* staat loodrecht op *HE*). De gevraagde bissectrice is dus de lijn door *P* evenwijdig met *ST*. □

5. Liniaalconstructies waarbij een cirkel gegeven is – Steiner-meetkunde

We gaan bij de constructies die we hierna geven, uit van een **in ligging gegeven cirkel met gegeven middelpunt**.
Indien we nu in staat zijn een **vierkant** te construeren, dan zijn alle in de voorgaande paragrafen behandelde constructies eveneens uitvoerbaar met liniaal alleen.
Vandaar:

Constructie 13
Gegeven is een cirkel (K) met middelpunt K.[5] Construeer een vierkant.

Constructiebeschrijving – We tekenen allereerst een middellijn AB van (K). Volgens Constructie 1 kunnen we nu door een punt A' van (K) een lijn m construeren die evenwijdig is met AB (immers we kennen het midden K van AB; bij de constructie van m zijn de punten T, S, T', B' (in deze volgorde) in bovenstaande tekening gebruikt).



De lijnen AA' en BB' snijden elkaar in L. De lijn KL snijdt (K) in de punten C en D. Nu is $ADBC$ het gevraagde vierkant. □

De euclidische meetkunde waarbij ten behoeve van liniaalconstructies een vaste cirkel en het middelpunt daarvan gegeven zijn, wordt ook wel **Steiner-meetkunde** genoemd (zie paragraaf 6).

[5] De cirkel met middelpunt X wordt aangegeven met (X).

6. Wat meer Steiner-meetkunde

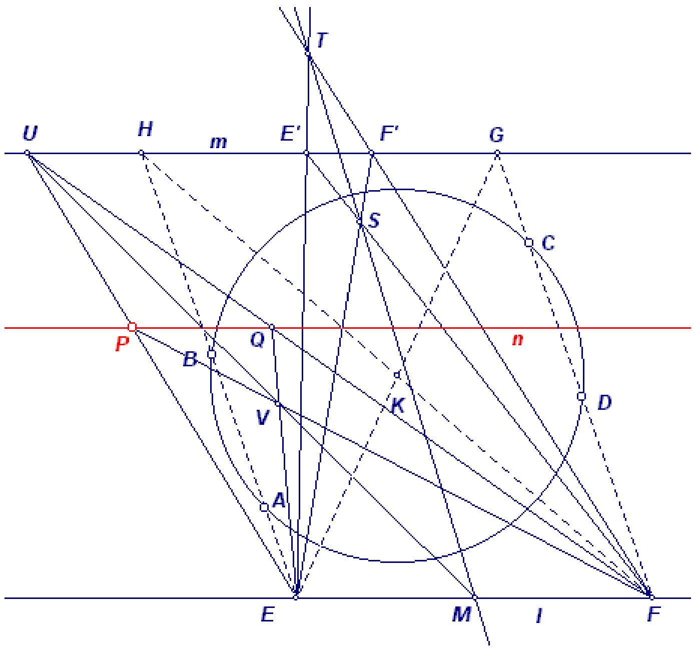
Het hoofddoel in deze paragraaf en vooral de volgende paragraaf is aan te tonen, dat alle constructies die zijn uit te voeren met passer-en-liniaal, ook uit te voeren zijn met liniaal alleen, mits een cirkel met middelpunt in ligging gegeven is.
Deze eigenschap is voor het eerst vermeld door de Franse wiskundige *Jean-Victor Poncelet* (1789-1867), en onafhankelijk van hem, door de Zwitserse wiskundige *Jacob Steiner* (1796-1867) bewezen.
Uiteraard is het niet mogelijk met een liniaal een cirkel te construeren. Maar het blijkt mogelijk te zijn een willekeurig punt van een cirkel te construeren indien vijf punten van die cirkel bekend zijn (zie Appendix I).

Bij de passer-en-liniaal-constructies die gebruik maken van een cirkel, worden slechts de volgende twee bewerkingen gebruikt (ze worden wel de *hoofdconstructies* van de Steiner-meetkunde genoemd):

- het vinden van de snijpunten van een lijn en een cirkel;
- het vinden van de snijpunten van twee cirkels.

We zullen laten zien dat ook deze constructies mogelijk zijn door alleen gebruik te maken van een liniaal, uiteraard onder de voorwaarde dat er een vaste cirkel *in ligging*[6] gegeven is.
Echter, bij bepaalde problemen zijn soms (relatief) eenvoudiger constructies mogelijk. Enkele van deze constructies zullen we dan ook als eerste de revue laten passeren.

Constructie 14
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Construeer door een punt P een lijn n evenwijdig met een gegeven lijn l.



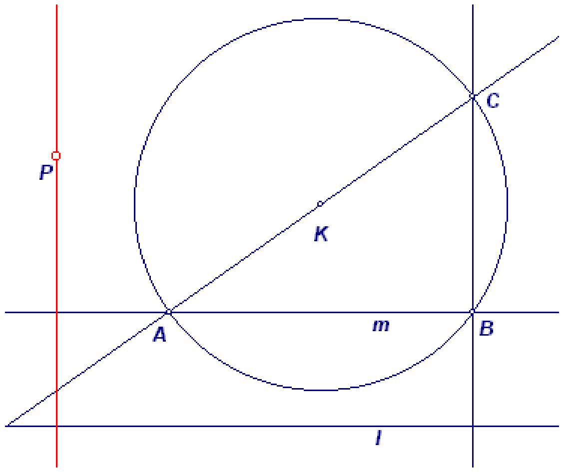
Constructiebeschrijving – Gaat de lijn l door K dan kunnen we te werk gaan volgens Constructie 1.
Gaat l niet door K, kunnen we een willekeurige lijn m evenwijdig met l construeren en dan door P de gevraagde lijn, evenwijdig met l en m (Constructie 5; gebruikte punten in volgorde van de constructie: A, B – beide willekeurig op (K) – E, C, D, F, G, H).
Hoe een en ander vervolgens in zijn werk kan gaan, beschrijven we hieronder.
Het midden M van EF kan gevonden worden volgens Constructie 4 (de gebruikte punten in bovenstaande figuur zijn opvolgend: E', T, F', S, M).

---

[6] Met "in ligging geven" bedoelen we in hetgeen volgt, dat een vaste cirkel (K) daadwerkelijk getekend is, en dat de plaats van het middelpunt K eveneens is aangegeven.

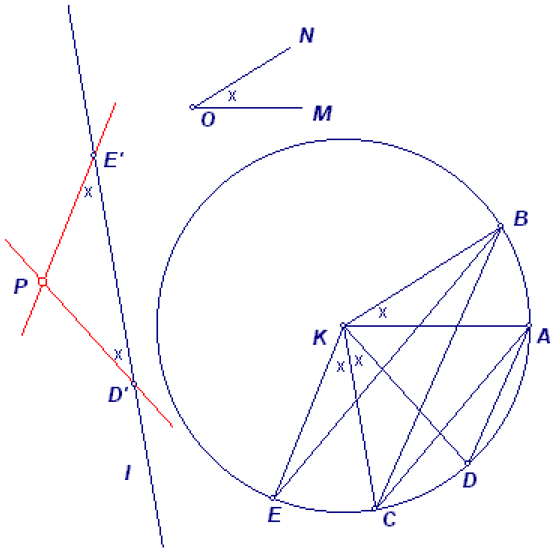
Is eenmaal het punt *M* gevonden, dan kunnen we de lijn *n* door evenwijdig met *l* krijgen volgens Constructie 1 (gebruikte punten opvolgend: *U*, *V*, *Q*). □

Constructie 15
De cirkel (*K*) is in ligging gegeven. Construeer door een gegeven punt *P* een loodlijn op een gegeven lijn.



Constructiebeschrijving – Als de gegeven lijn (in de figuur is dat de lijn *m*) de cirkel (*K*) snijdt in de punten *A* en *B* (maar niet door *K* gaat), dan tekenen we de middellijn *AC*. De lijn *CB* staat dan loodrecht op *m*. Dan kunnen we door *P* de gevraagde lijn construeren die loodrecht staat op *l*, namelijk evenwijdig met *CB*.
Snijdt de gegeven lijn (*l* in de figuur) de cirkel niet, dan construeren we eerst een met *l* evenwijdige lijn *m* die de cirkel wel snijdt (niet gaande door *K*; door een punt *A* op de cirkel) en we construeren volgens het bovenstaande de loodlijn door *P* op *m*. □

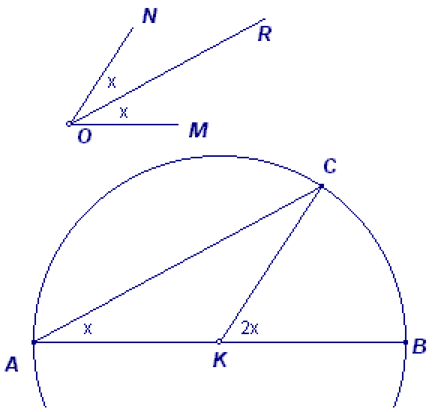
Constructie 16
De cirkel (*K*) is in ligging gegeven. Construeer door een gegeven punt *P* een lijn die een gegeven hoek maakt met een gegeven lijn *l*.



Constructiebeschrijving – Zij *MON* = *x* de gegeven hoek. De constructie staat in bovenstaande figuur en is ontstaan op basis van achtereenvolgens: *KA* // *OM*, *KB* // *ON*, *KC* // *l*, *AD* // *BC*, *BE* // *AC*, *PD'* // *KD* en *PE'* // *KE*.
De lijnen *PD'* en *PE'* zijn de gevraagde lijnen.
Bewijs – bg(*CD*) = bg(*BA*), immers ∠*DAC* = ∠*BCA*. bg(*BA*) = bg(*CE*), immers ∠*BCA* = ∠*CBE*. Dus ook ∠*DKC* = ∠*CKE* = ∠*BKA*. □

Opmerking – Constructie 16 heeft twee oplossingen als ∠*MON* scherp is. Dit is ook het geval als ∠*MON* stomp is.

Constructie 17
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Verdubbel een gegeven hoek.

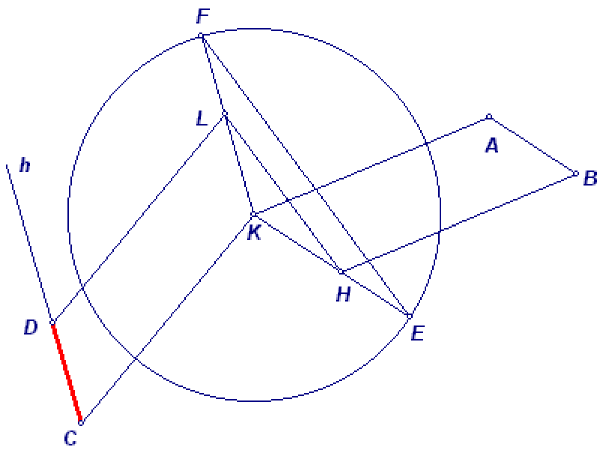


Constructiebeschrijving – Zij $MOR = x$ de gegeven hoek. AB is de middellijn van (K) met AB // OM. De koorde AC is evenwijdig met OR. Nu is $\angle BKC = 2x$. De halve lijn ON is evenwijdig met KC, zodat $\angle MON = 2x$. □

Constructie 18
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Construeer de bissectrice van een gegeven hoek.

Constructiebeschrijving – Zie de figuur bij Constructie 17. Hierin is $MON = 2x$ de gegeven hoek. AB is de middellijn van (K) die evenwijdig is met OM. Teken nu KC // ON en OR // AC. Dan is OR de bissectrice van $\angle MON$. □

Constructie 19
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Voorts zijn gegeven een lijnstuk AB en een halve lijn h met eindpunt C. Construeer een lijnstuk CD op h met $|CD| = |AB|$.

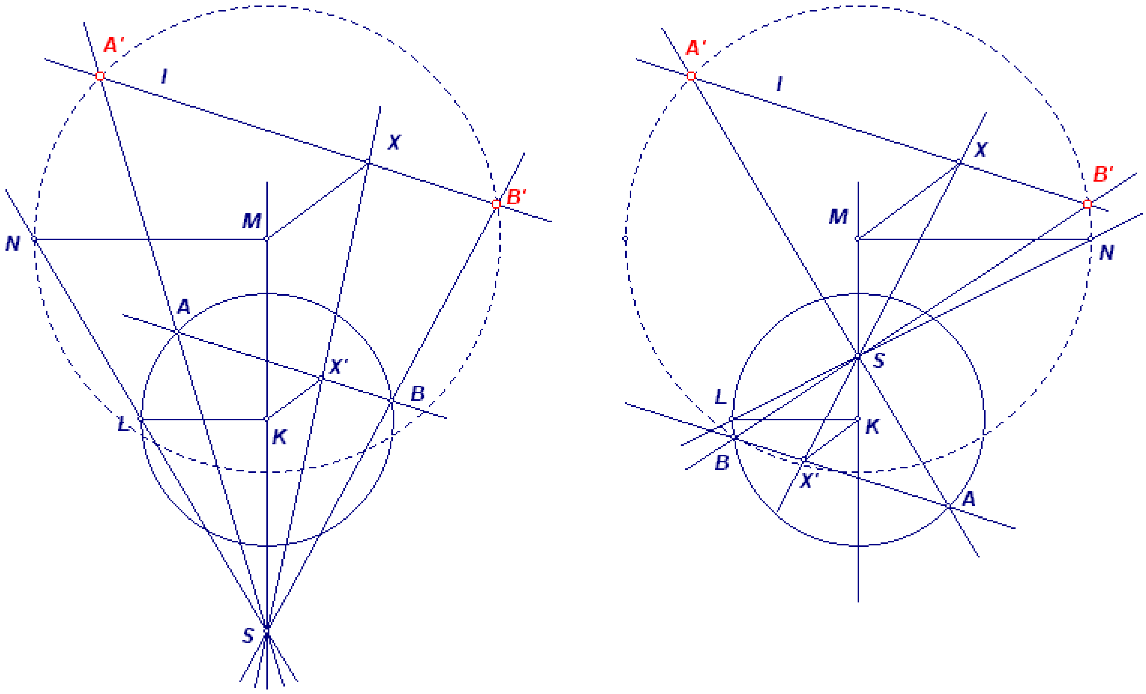


Constructiebeschrijving – We construeren met K, A, B als hoekpunten een parallellogram $KABH$ op KA en AB. KF is een straal van de cirkel die evenwijdig is met h. Het snijpunt van de halve lijn KH met de cirkel is E. De lijn HL, met L op KF, is evenwijdig met EF. We construeren vervolgens met L, K en C het parallellogram $LKCD$ op KL en KC. Het lijnstuk CD is dan het gevraagde lijnstuk.
Bewijs – Uit de constructie volgt $AB = KH$ en $CD = KL$. Driehoek KEF is gelijkbenig, waaruit direct volgt dat $KH = KL$, zodat $AB = CD$. □

7. De hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde

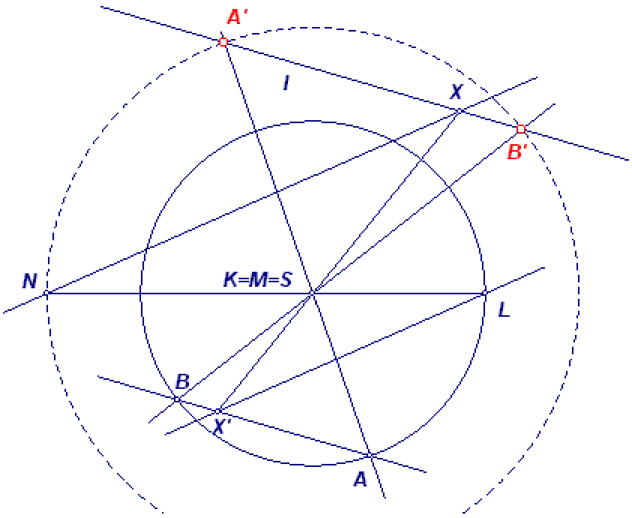
Dan volgt nu de eerste van de twee hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde.

Constructie 20 – 1e hoofdconstructie
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Construeer de snijpunten van een gegeven lijn l met een cirkel die slechts gegeven is door het middelpunt M en een straal MN.



Constructiebeschrijving – Zie bovenstaande figuur, links. We tekenen allereerst de straal KL van cirkel (K) die evenwijdig is met MN (de straal van de gegeven cirkel). De lijnen MK en NL snijden elkaar in het uitwendig gelijkvormigheidspunt S van beide cirkels (indien althans de richting van beide stralen dezelfde is). Zij nu X een willekeurig punt op l. Het beeld van X bij de gelijkvormigheidstransformatie (vermenigvuldiging met S als centrum) waarbij (K) het beeld is van (M), is het punt X'. De lijn door X' evenwijdig met l snijdt (K) in de punten A en B. De inverse S-vermenigvuldiging beeldt de punten A en B af op de punten A' en B', de gezochte snijpunten.
In de rechter figuur hierboven is dezelfde constructie uitgevoerd. Echter daarin is het inwendig gelijkvormigheidspunt van beide cirkels, ook weer aangegeven met S, gebruikt.
Het inwendig gelijkvormigheidspunt moet ook worden gebruikt als het uitwendig gelijkvormigheidspunt ontoegankelijk is.
Bewijs – Dit volgt direct uit de constructiebeschrijving. □

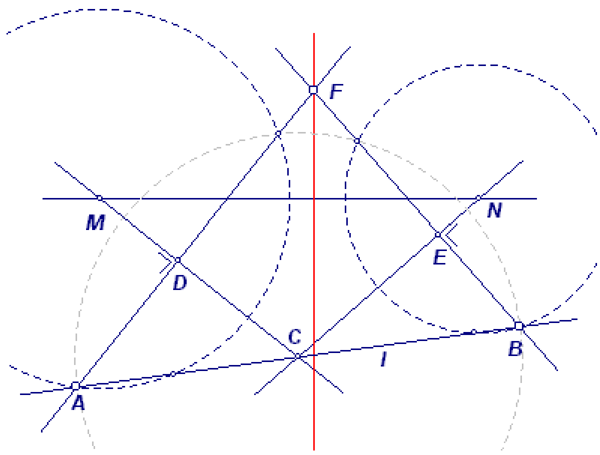
Opmerking – De constructie van de snijpunten verloopt iets anders als (M) concentrisch is met (K).



De punten K, M en S (het inwendig gelijkvormigheidspunt van beide cirkels) vallen nu samen. Zij X weer een willekeurig punt van de lijn l. Het punt X' wordt nu gevonden als snijpunt van de lijn door L evenwijdig met XN en van de lijn XS. Immers in de driehoeken $KX'L$ en KXN geldt dan $\dfrac{KX'}{KX} = \dfrac{KL}{KN} = f$, waarbij f de factor van vermenigvuldiging is. A en B zijn weer de snijpunten van (K) met de lijn door X' evenwijdig met l. De punten A' en B', de snijpunten van l met (M), worden dan weer gevonden via de inverse vermenigvuldiging met S als centrum.

Voordat we de tweede hoofdconstructie voor de Steiner-meetkunde geven, laten we een constructie volgen die als hulp bij die tweede hoofdconstructie kan worden gebruikt: de machtlijn van twee cirkels.

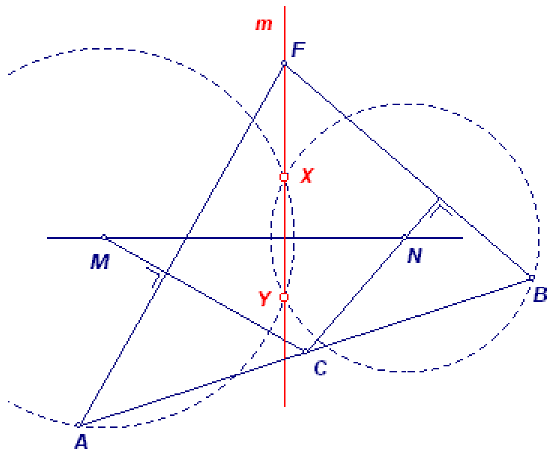
Constructie 21
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Construeer de machtlijn van twee cirkels (M) en (N) die gegeven zijn door de middelpunten M en N en door hun stralen.



Constructiebeschrijving – We kiezen een willekeurige lijn l die de cirkels (M) en (N) snijdt. De snijpunten van l en die cirkels kunnen geconstrueerd worden volgens Constructie 20 (daarbij wordt de in de figuur niet opgenomen vaste cirkel (K) gebruikt). Zijn A op (M) en B op (N) snijpunten met l en is C het midden van AB. De loodlijnen AD op CM en BE op CN snijden elkaar in het punt F. De loodlijn uit F op MN is dan de gevraagde machtlijn.
Bewijs – Het punt F is het machtpunt van de cirkels (M), (N) en de cirkel (C) met middellijn AB. □

De tweede hoofdconstructie van de Steiner-meetkunde is nu een direct gevolg van Constructie 21.

Constructie 22 – 2e hoofdconstructie
De cirkel (K) is in ligging gegeven. Construeer de snijpunten X en Y van twee cirkels (M) en (N) die gegeven zijn door de ligging van hun middelpunten M en N en door hun stralen.



Constructiebeschrijving – Volgens Constructie 21 construeren we de machtlijn *m* van de cirkels (*M*) en (*N*).
Daarna construeren we volgens Constructie 20 de snijpunten *X* en *Y* van *m* met één van beide cirkels. □

Hiermee hebben we bewezen:

Stelling 2 (Poncelet-Steiner)
Een (euclidische) constructie die uitvoerbaar is met passer-en-liniaal, is eveneens uitvoerbaar met liniaal alleen, mits een vaste cirkel in ligging gegeven is.

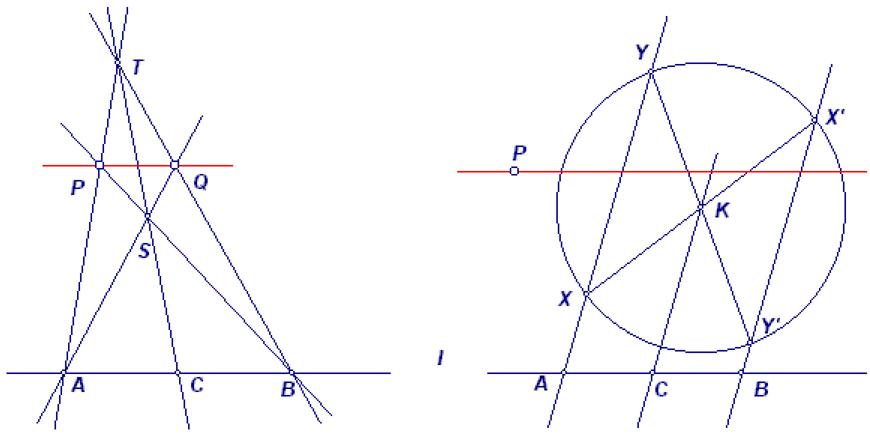
8. Steiners bewijs

Het is zeker wel interessant te zien hoe Steiner zelf het probleem heeft aangepakt. We zullen zijn arbeid in deze paragraaf min of meer op de voet volgen, daarbij echter weglatend wat niet direct met het doel te maken heeft.
Steiner gebruikte in zijn bewijs voornamelijk constructies zoals die vermeld zijn in paragraaf 6 en paragraaf 7. Hieronder geven we enkele constructies (Constructie S5 en de beide hoofdconstructies) die gebaseerd zijn op de vierde evenredige en op de middelevenredige.
Uiteraard mondt een en ander ook nu uit in het bewijzen van de beide hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde.
Bij onderstaande constructies wordt telkens uitgegaan van de aanwezigheid van een vaste cirkel met middelpunt *K*. We vermelden dat niet meer afzonderlijk bij de constructies. Deze cirkel noemen we in deze paragraaf **Poncelet-cirkel**.

Constructie S1
Door een gegeven punt een lijn te tekenen evenwijdig met een gegeven lijn.

Constructiebeschrijving – Steiner onderscheidt hierbij twee gevallen:
1. *Constructie van een parallel aan een gerichte lijn* [7]
Zie onderstaande figuur, links. Zij *P* het gegeven punt en *l* de gerichte lijn. Teken *AP* en kies een punt *T* op het verlengde van *AP*. Verbind *P* met *B* en met *M* (het midden van *AB*), teken *BP* en teken de lijn *AS*, met $S = BP \wedge MT$. Zij dan $Q = AO \wedge BS$. *PQ* is dan de gevraagde lijn.

Opmerking – Deze constructie komt overeen met Constructie 1 uit paragraaf 1.

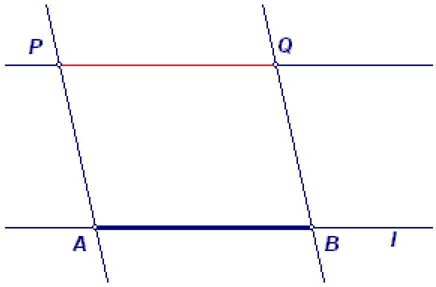


2. *Constructie van de parallel aan een 'gewone' lijn*
Zie bovenstaande figuur, rechts. We verbinden een willekeurig punt *C* van de lijn *l* (de gegeven lijn) met het middelpunt *K* van de Poncelet-cirkel en bepalen vervolgens de snijpunten *U* en *V* van die lijn met (*K*). De punten *U*, *V*, *K* bepalen nu een gerichte lijn. Volgens 1a tekenen we een parallel aan *KC* en wel zo, dat die de cirkel (*K*) snijdt in de punten *X* en *Y* (kies hierbij bijvoorbeeld *X* al op de Poncelet-cirkel). *XY* snijdt *l* in *A*. De middellijnen *XK* en *YK* snijden de cirkel voor de tweede keer in opvolgend *X'* en *Y'*. De lijn *X'Y'* snijdt dan *l* in het punt *B*, waarbij *AC* = *BC*. De lijn *l* is hiermee een gerichte lijn geworden, bepaald door *A*, *B*, *C*. Dit maakt het mogelijk volgens 1a een lijn door *P* te tekenen die evenwijdig is met de lijn *l*. □

Gevolg
Op basis van Constructie S1 is dan ook de volgende constructie met liniaal alleen uitvoerbaar.

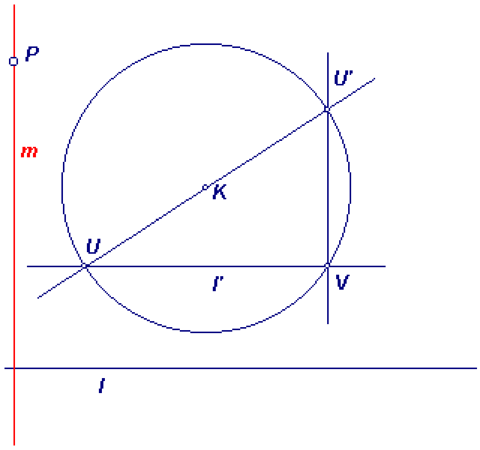
Construeer bij een gegeven punt *P* een punt *Q* zodat de lijn *PQ* evenwijdig is met een gegeven lijnstuk *AB* en waarbij |*PQ*| = |*AB*|.

[7] Een gerichte lijn is een rechte lijn waarvan twee punten A en B bekend zijn, én het midden van het lijnstuk AB.



Constructiebeschrijving – De lijn $AB \equiv l$ is construeerbaar. Q is het snijpunt van de parallel aan AP door B en de parallel aan AB door P. Dan is $ABPQ$ een parallellogram, waarin inderdaad |PQ| = |AB|. □

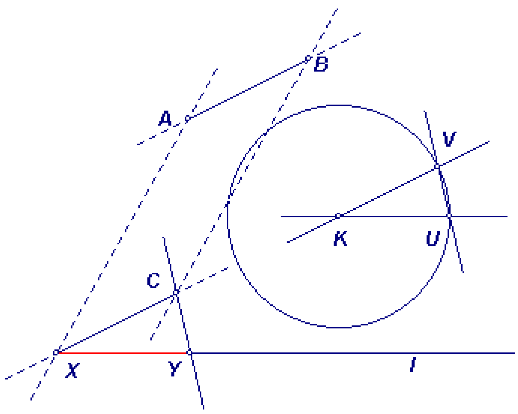
Constructie S2
Teken een loodlijn door een gegeven punt P op een gegeven lijn l.



Constructiebeschrijving – Teken $l' \,//\, l$ en wel zo, dat l' de Poncelet-cirkel snijdt in de punten U en V (dus $UV \equiv l'$). We tekenen nu de middellijn UKU' en de koorde $U'V$ die volgens de stelling van Thales loodrecht staat op l', en dus ook loodrecht op l.
De lijn m door P evenwijdig met $U'V$ is dan de gevraagde lijn. □

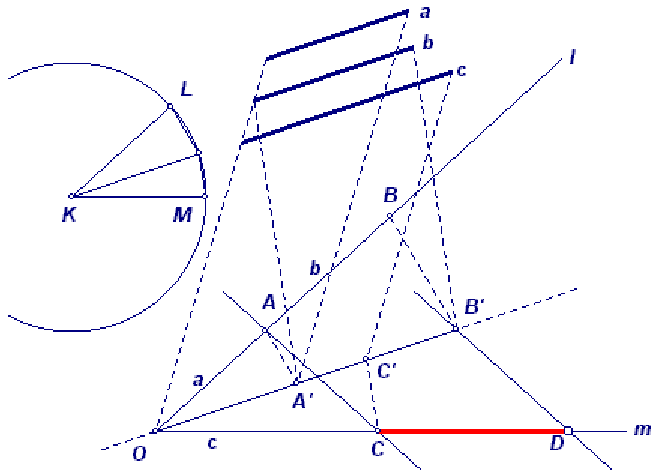
Opmerking – Zie ook Constructie 15 in paragraaf 6.

Constructie S3
Een punt Y te construeren op een halve lijn l met eindpunt X, waarbij $|XY|$ gelijk is aan de lengte $|AB|$ van een gegeven lijnstuk AB.



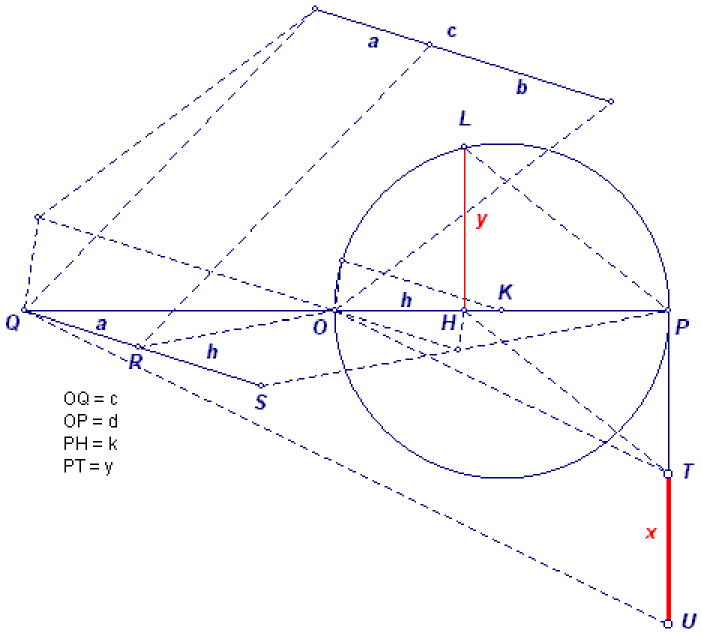
Constructiebeschrijving – Het Gevolg van C1 maakt het mogelijk AB te verplaatsen naar XC, met $XC \,//\, AB$ en $|XC| = |AB|$. KU en KV zijn de middellijnen van (K) met $KU \,//\, l$ en $KV \,//\, XC$. De lijn door C evenwijdig met UV snijdt l in het punt Y. XY is het gevraagde lijnstuk.
Bewijs – XYC en KUV zijn gelijkbenige driehoeken met een gelijke tophoek. □

Constructie S4
Gegeven zijn drie lijnstukken met lengtes a, b, c. Construeer daarbij een lijnstuk als vierde evenredige.



Constructiebeschrijving – l en m zijn twee halve lijnen met eindpunt O. Op l kunnen de gegeven lijnstukken a en b worden afgezet (volgens S3), waarbij $OA = a$ en $AB = b$. Op m kan het lijnstuk c worden afgezet (eveneens volgens S3), waarbij $OC = c$.
We tekenen de lijn door B evenwijdig met AC, die de lijn m in het punt D snijdt. Nu is CD de vierde evenredige bij a, b, c. □

Constructie S5
Gegeven zijn twee lijnstukken met lengtes a en b. Construeer de middelevenredige bij a en b.



Constructiebeschrijving – We tonen eerst de construeerbaarheid van de middelevenredige aan door berekening.
Zij $d = |OP|$ de diameter van de Poncelet-cirkel. En zij verder $c = a + b$. Het lijnstuk c kan geconstrueerd worden volgens S3.

Zij verder h de vierde evenredige bij c, d, a, dan is: $h = \dfrac{ad}{c}$.

Zij k de vierde evenredige bij c, d, b, dan is $k = \dfrac{bd}{c}$. Dus:

$$h + k = \frac{(a+b)d}{c} = d\,.$$

Zij nu $x = \sqrt{ab}$ dan is $y = \sqrt{hk} = \sqrt{\dfrac{ad}{c} \cdot \dfrac{bd}{c}} = \dfrac{d\sqrt{ab}}{c} = \dfrac{d}{c} \cdot x$.

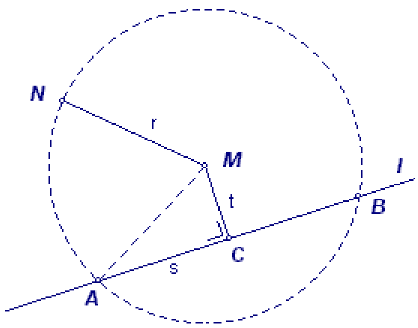
x is dus als vierde evenredige te construeren bij d, c, y, mits y construeerbaar is.

Op de diameter OP van cirkel (K) construeren daartoe we een punt H zodat $|OH| = h$ (volgens S3). De loodlijn in H op OP (volgens S2) snijdt de cirkel o.a. in het punt L.
Nu is: $OL = \sqrt{hk} = y$, waaruit blijkt dat y inderdaad construeerbaar is.
De middelevenredige x bij a en b, is dus eveneens construeerbaar. □

Op basis van bovenstaande constructies (S1 – S5) bewijst Steiner de mogelijkheid tot uitvoering van de beide hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde (zie ook paragraaf 7. De hoofdconstructies van de Steiner-meetkunde).

Hoofdconstructie 1
Gegeven is de cirkel (M) slechts bepaald door M en straal MN. Construeer de snijpunten van een gegeven lijn l met cirkel (M).

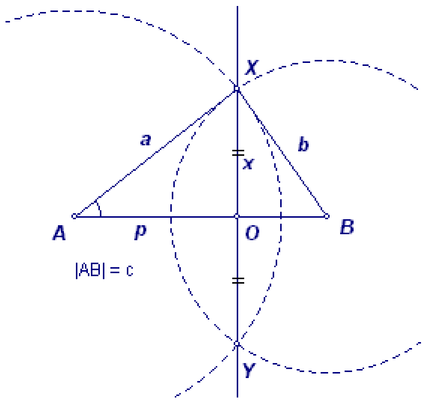
Constructiebeschrijving – Zijn A en B de gevraagde snijpunten. Zij verder $2s = |AB|$, en C het midden van AB met $|MC| = t$. C is construeerbaar als snijpunt van de loodlijn uit M op l.



Dan is (volgens de stelling van Pythagoras in driehoek ACM):
$$s^2 = r^2 - t^2$$
of
$$s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$$
De lijnstukken $r + t$ en $r - t$ zijn construeerbaar (volgens S3). Dus is s construeerbaar (volgens S5).
Vanuit C kan nu s volgens S3 in beide richtingen worden afgezet op de lijn l. Dit geeft de snijpunten A en B van l met cirkel (M). □

Hoofdconstructie 2
Construeer de snijpunten van twee gegeven cirkels, waarvan alleen het middelpunt en straal gegeven zijn.

Constructiebeschrijving – Zijn (A, a) en (B, b) de gegeven cirkels, met $c = |AB|$, waarbij verder X en Y de gevraagde snijpunten zijn.



Is nu $O = XY \wedge AB$, met $|OA| = p$ en $|OX| = x$. Volgens de projectiestelling (cq. de cosinusregel met $p = a\cos(XAO)$) is dan in driehoek ABX:
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2pc$$
Merk op dat in deze uitdrukking p vooralsnog onbekend is.
Stel nu $c^2 + a^2 = d^2$, dan is d construeerbaar volgens S2 en S3, zodat uit $b^2 = d^2 - 2pc$ volgt:

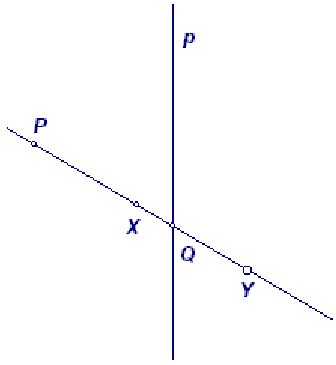
$$p = \frac{d^2 - b^2}{2c} = \frac{(d+b)(d-b)}{2c}$$

p is dan vierde evenredige bij *d* + *b*, *d* – *b*, 2*c*, en dus construeerbaar.
In *AOX* hebben we $x^2 = a^2 - p^2$ of $x = \sqrt{(a+p)(a-p)}$, waaruit blijkt dat *x* middelevenredige is tussen *a* + *p* en *a* – *p*.
Bepaal nu de plaats van *O* op *AB* met |AO| = *p*. Construeer in *O* volgens S2 de loodlijn op *AB* en pas *x* naar beide kanten vanuit *O* af (volgens S3). Daarmee zijn de punten *X* en *Y* gevonden. □

En opnieuw hebben we een bewijs (maar nu min of meer dat van Steiner zelf) van de hoofdstelling voor de Steiner-meetkunde, de stelling van Poncelet-Steiner (zie het einde van paragraaf 7).

9. Harmonische afbeelding

We bekijken een bijzondere afbeelding van het platte vlak op zichzelf, de zogenoemde **harmonische afbeelding**. Bij die afbeelding gaan we uit van een vast punt P en een vaste lijn p (opvolgend de **pool** en de **poollijn** van de harmonische afbeelding).



Definitie
De **harmonische afbeelding** h wordt voor elk punt X (niet samenvallend met P en niet liggend op p) gedefinieerd door

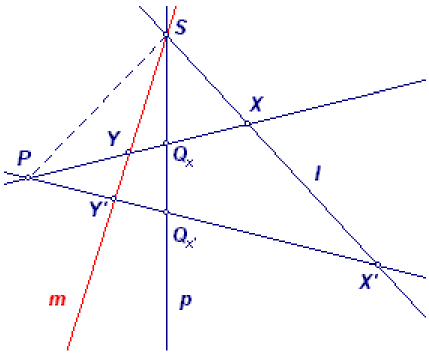
$$h(X) = Y, \text{ met } (PQXY) = -1 \text{ en } Q = PX \wedge p$$

Verder definiëren we ook: $h(P) = P$, en $h(X) = X$ voor X op p.

Opmerking – Volgens Constructie 2 is het punt Y met liniaal alleen te construeren. De harmonische afbeelding is dus een toegestane operatie binnen de liniaalmeetkunde.

Gevolgen

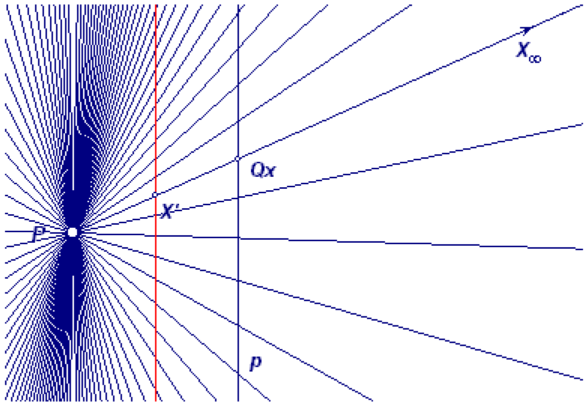
1. Als $h(X) = Y$, dan is volgens de definitie ook $h(Y) = X$, immers uit $(PQXY) = -1$ volgt $(PQYX) = -1$.
2. Zij l een lijn door P. Elk punt X van de lijn l wordt nu afgebeeld op een punt Y van de lijn l. De lijn l wordt dan dus (niet puntsgewijs) op zichzelf afgebeeld.



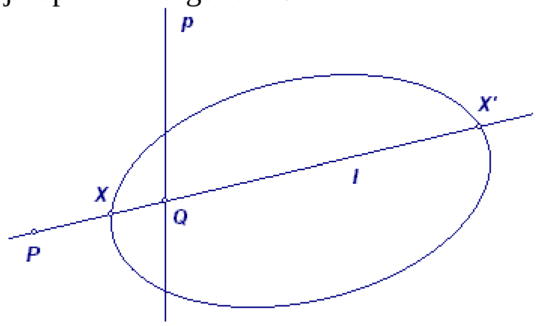
3. Zij l een lijn die *niet* door P gaat. We tonen nu aan, dat $h(l) = m$, waarbij m een rechte lijn is die gaat door het snijpunt S van l en p.
   Zij X een willekeurig punt van l met $h(X) = Y$. Dan is $m \equiv SY$. Zij namelijk X' een tweede punt van l, met $h(X') = Y'$, dan ligt Y' eveneens op m. Dit laatste volgt direct uit de invariantie van de dubbelverhouding bij de centrale projectie (perspectiviteit) met centrum S:
   $(PQ_{X'}X'Y') = (PQ_XXY) = -1$. □

Bijzondere gevallen

1. Is S een oneigenlijk punt, dan geldt $l \,//\, p \,//\,$ m.
2. Is l de oneigenlijke rechte, dan deelt m de lijnstukken die P verbinden met punten Q_x op p middendoor. Ook dan is $m \,//\, p$.



3. Is P de pool van een lijn p ten opzichte van een kegelsnede $\mathcal{K}$, dan wordt $\mathcal{K}$ door h op zichzelf afgebeeld. De snijpunten van een lijn l door P met de kegelsnede worden door de harmonische afbeelding met P als pool en p als poollijn op elkaar afgebeeld.

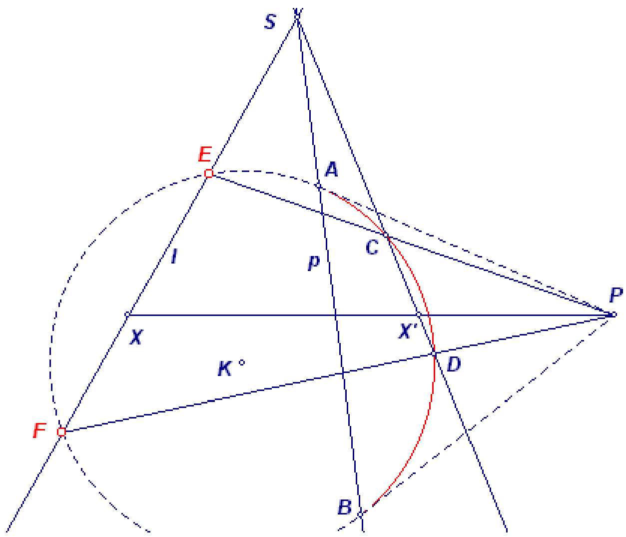


Dit geldt dus in het bijzonder voor een **cirkel**.

In Appendix II wordt aangetoond, dat het mogelijk is met liniaal alleen een raaklijn in een punt van een cirkel te construeren.

Zodat we nu (op basis van hetgeen vermeld is in Appendix II) kunnen bewijzen:

Stelling 3
Gegeven is een in ligging gegeven **cirkelboog** met middelpunt K. Het is mogelijk de snijpunten van een lijn l met de bij de gegeven boog behorende cirkel met liniaal alleen te construeren.



Bewijs – We kiezen de lijn door de eindpunten A en B van de cirkelboog als poollijn bij een harmonische afbeelding. De pool van P van p, het snijpunt van de raaklijnen in A en B aan de cirkel(boog), kunnen we met liniaal alleen construeren (zie Stelling 3).
Zonder de algemeenheid geweld aan te doen mogen we veronderstellen, dat de lijn l geen punten gemeenschappelijk heeft met de gegeven boog AB. Zij nu $S = l \wedge AB$. Zij verder X een willekeurig punt van de lijn l. En zij verder X' beeld van X bij de harmonische afbeelding met P als pool en p als poollijn. Het beeld van l is dan de lijn SX'. SX' snijdt boog AB in de punten C en D. De beelden E en F van opvolgend

C en *D* bij de bedoelde harmonische afbeelding (zie Bijzonder geval 3 hierboven) zijn dan de gevraagde snijpunten van *l* met de cirkel. □

Gevolg
De Poncelet-cirkel kan vervangen worden door een in ligging gegeven cirkelboog met bijbehorend middelpunt.

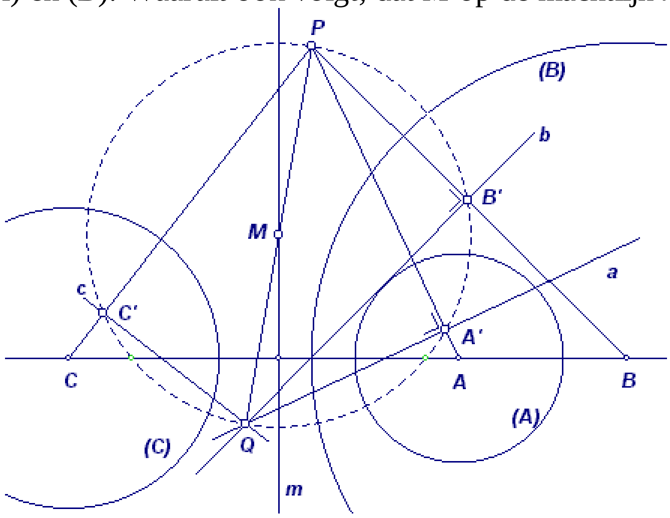
Opmerking – Bovenstaande conclusie is voor het eerst getrokken door de Italiaanse wiskundige *Francesco Severi* (1879-1961) en, onafhankelijk van hem, ook door de Russische wiskundige *Dimitrii Mordukhai-Boltkovskoy* (1876-1952).

10. Cirkelbundels

Definitie
Een verzameling cirkels vormt een **cirkelbundel** als dezelfde lijn de machtlijn is van elk tweetal cirkels uit die verzameling. De lijn wordt de **machtlijn van de bundel** genoemd.

Stelling 4
De poollijnen van een punt *P* ten opzichte van de cirkels van een cirkelbundel zijn concurrent in een punt *Q*, waarbij het midden van *PQ* ligt op de machtlijn van de bundel.

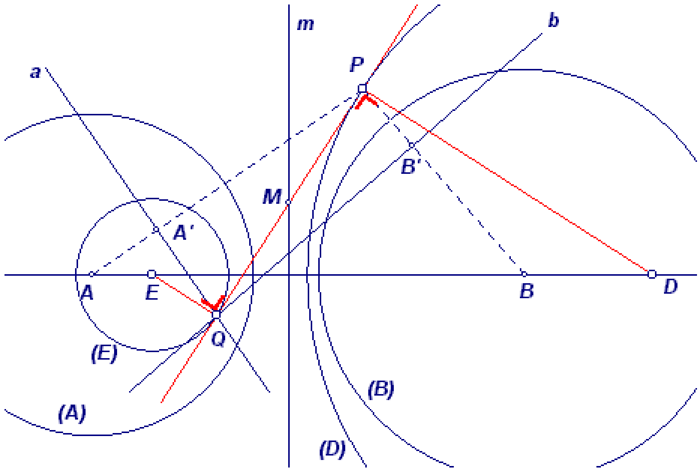
Bewijs – Zijn (*A*) en (*B*) twee cirkels van een cirkelbundel met machtlijn *m*, en zijn *A'* en *B'* de inversen van *P* ten opzichte van die cirkels. De bijbehorende poollijnen *a* en *b* van *P* snijden elkaar in Q. We construeren nu de cirkel (*M*) met middellijn *PQ*. Wegens de rechte hoeken bij *A'* en *B'* gaat deze cirkel door de punten *A'* en *B'* (stelling van Thales). Uit de inversietheorie volgt verder, dat (*M*) orthogonaalcirkel[8] is van (*A*) en (*B*). Waaruit ook volgt, dat *M* op de machtlijn *m* van de bundel ligt.



Zij nu (*C*) een derde cirkel van de bundel. De lijn *PC* snijdt cirkel (*M*) verder nog in *C'*. De poollijn *c* van *P* ten opzichte van (*C*) gaat nu door *C'*, omdat (*M*) ook orthogonaalcirkel is van (*C*), en *c* staat ook loodrecht op *PC*. Maar *PC'Q* = 90°, omdat *C'* op de Thales-cirkel (*M*) ligt. De lijn *C'Q* is dus de poollijn van *P* ten opzichte van (*C*).
Waarmee de stelling is bewezen. □

Gevolg
Uit de *pooltheorie* volgt dat de poollijnen van *Q*, ten opzichte van alle cirkels van de bundel, door *P* gaan.[9]
We beschouwen nu de cirkel (*D*) van de cirkelbundel die gaat door het punt *P*. De poollijn van *P* ten opzichte van dat bundelexemplaar is de raaklijn in *P* aan (*D*). Deze raaklijn gaat dus door het punt *Q*. Met andere woorden: de lijn *PQ* is de raaklijn in *P* aan (*D*).
Maar dan is ook *PQ* de raaklijn in *Q* aan de door *Q* gaande cirkel (*E*) van de bundel.

[8] Een cirkel (*X*) is orthogonaalcirkel van een cirkel (*Y*), als de beide cirkels elkaar loodrecht snijden. Blijkbaar is dan (*Y*) ook orthogonaalcirkel van (*X*).
[9] De hoofdstelling van de pooltheorie luidt: Ligt het punt *Q* op de poollijn van een punt *P* ten opzichte van een kegelsnede, dan ligt *P* op de poollijn van *Q* ten opzichte van die kegelsnede.

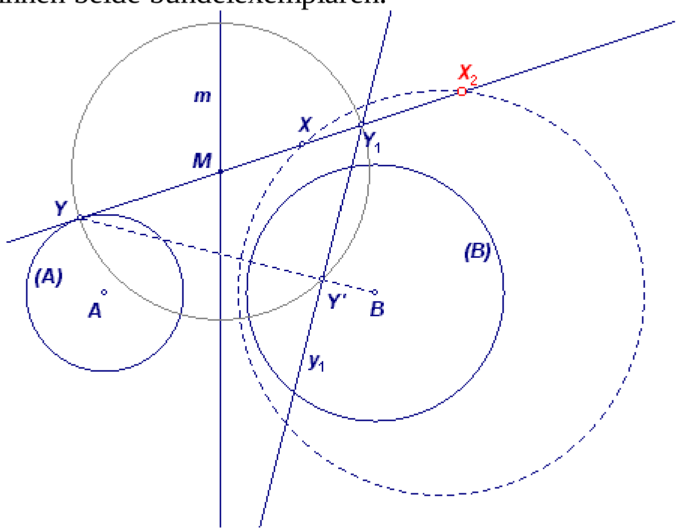


De lijn PQ is dus de gemeenschappelijke raaklijn in P aan het bundelexemplaar dat door P gaat en in Q aan het bundelexemplaar dat door Q gaat. □

Opmerking – De punten P en Q heten ook wel elkaars **polair toegevoegde** (**polair geconjugeerde**) ten opzichte van de bundel.

Constructie B1
Gegeven is een cirkelbundel, vastgelegd door twee cirkels (A) en (B). Construeer van een derde bundel-exemplaar, waarvan slechts één punt X gegeven is, vier andere punten.

We onderscheiden twee gevallen:
Geval 1. Het punt X ligt buiten ten minste één van de gegeven bundelexemplaren.
Geval 2. Het punt X ligt binnen beide bundelexemplaren.

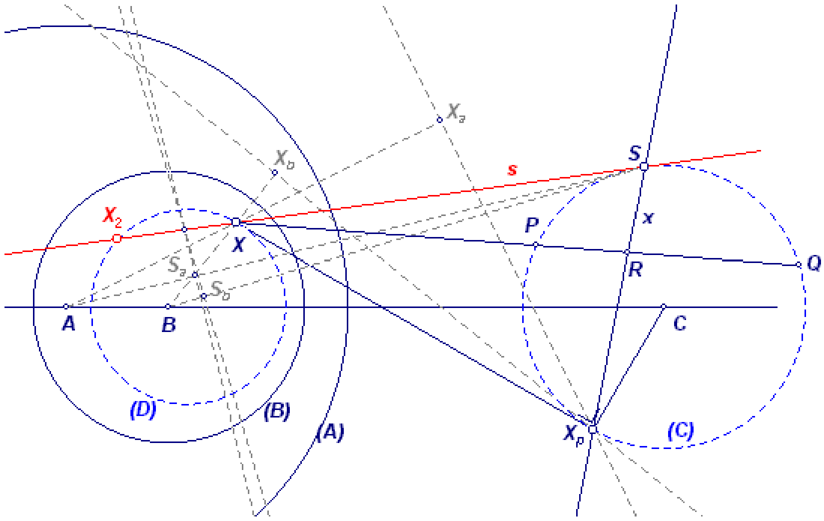


Constructiebeschrijving bij geval 1 – We gaan ervan uit, dat het punt X in ieder geval buiten (A) ligt. Zij Y het raakpunt van één van de raaklijnen uit X aan (A)[10]. Verder is y_1 de poollijn van Y ten opzichte van cirkel (B). y_1 snijdt de lijn XY in het punt Y_1. X_2 is dan de vierde harmonische bij Y, Y_1, X.
Het punt X_2 is dan een punt van de 'onbekende' cirkel.
De constructie kan dan worden voortgezet via de tweede raaklijn uit X_2 aan cirkel (A); immers ook X_2 ligt buiten (A); X_2 ligt immers op de raaklijn aan (A).
Dit levert dan het punt X_3. De punten X_4, X_5 worden analoog gevonden.
Bewijs – Het punt X_2 ligt inderdaad op de onderhavige cirkel. Immers, de poollijn van Y ten opzichte van cirkel (B) gaat (volgens Stelling 5) door het punt Y_1. De harmonische afbeelding met Y als pool en y_1 als poollijn beeldt de snijpunten van XY met de derde cirkel op elkaar af (zie hiervoor ook Bijzonder geval 3 in paragraaf 9). □

[10] In Appendix II wordt aangetoond dat het mogelijk is vanuit een punt buiten een cirkel de beide raaklijnen aan die cirkel met liniaal alleen te construeren, indien althans die cirkel in ligging gegeven is.

Opmerking – (1) Is de machtlijn van de bundel gegeven, dan kunnen we het punt Y_1 direct vinden als tweede snijpunt van de lijn XY met cirkel (M), door Y, waarbij M het snijpunt is van XY met die machtlijn; een en ander eveneens volgens Stelling 5.
(2) Hebben we eenmaal vijf punten van de cirkel, dan kunnen nieuwe punten worden geconstrueerd zonder de cirkels (A) en (B) te gebruiken. Zie daarvoor Appendix I.

Constructiebeschrijving geval 2 – We moeten nu nog laten zien, dat de constructie eveneens mogelijk is als het punt X binnen beide bundelexemplaren ligt. We zoeken punten van het bundelexemplaar (D) dat door het punt X gaat.



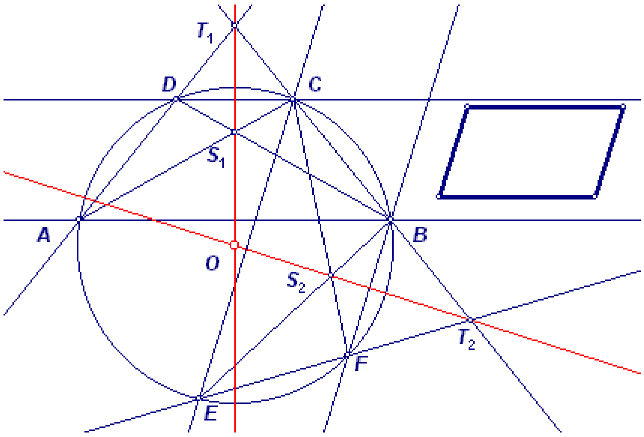
We construeren allereerst de polair geconjugeerde X_p van het punt X (via de punten X_a en X_b). Van het bundelexemplaar (C) dat door X_p gaat kunnen we nu volgens Constructie B1, geval 1, op basis van de poollijn x van X ten opzichte van (C) een willekeurig aantal punten construeren.
Zij P zo'n (nieuw) punt op (C). Het tweede snijpunt Q van de lijn XP met (C) kunnen we eveneens vinden. R is dan de vierde harmonische van P, Q, X, waarmee de poollijn x van X ten opzichte van (C) eveneens gevonden is. x snijdt de cirkel (C) in het punt S. De lijn $s \equiv XS$ is dan raaklijn aan (C). Op s ligt dan een punt X_2 dat ook (D) ligt. Het punt X_2 is te construeren met behulp van de poollijnen van S ten opzichte van de cirkels (A) en (B), via de punten S_a en S_b.
Het punt X_3 van (D) kan analoog worden geconstrueerd door te beginnen met het punt X_2. Hebben we eenmaal X, X_2, …, X_5, dan kunnen nieuwe punten op cirkel (D) worden gevonden onafhankelijk van de cirkels (A) en (B). Zie voor dit laatste Appendix I. □

11. Het middelpunt van een cirkel

De vraag of we van een gegeven cirkel het middelpunt met liniaal alleen kunnen construeren, kan bevestigend beantwoord worden als een *parallellogram* of een *tweede, vaste cirkel* en het middelpunt daarvan (de Poncelet-cirkel) in het vlak van tekening van de eerste cirkel gegeven zijn.

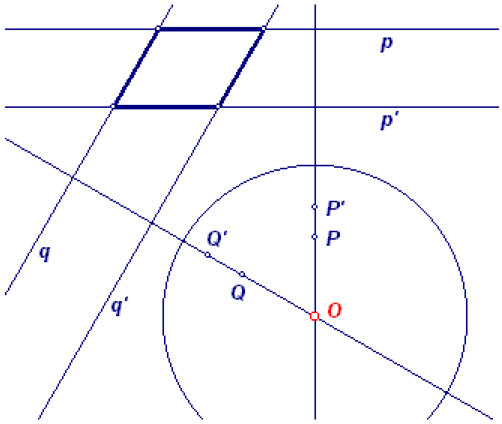
We geven hieronder zeven constructies van het middelpunt van een willekeurige cirkel.

M1. Constructie bij een gegeven parallellogram



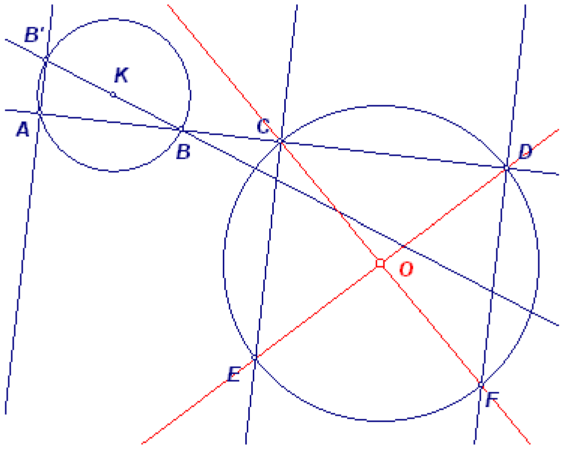
Constructie beschrijving – We construeren met behulp van de evenwijdige zijden van het parallellogram twee in de cirkel ingeschreven trapezia, *ABCD* en *BCEF*.
Volgens Stelling 1 delen nu de lijnen door de snijpunten S_1, S_2 van de diagonalen, en de snijpunten T_1 en T_2 van de opstaande zijden, de beide evenwijdige zijden middendoor.
Het gezochte middelpunt O is dan $O = T_1S_1 \wedge T_2S_2$. □

Opmerking – In Appendix III zullen we laten zien, dat het mogelijk is met liniaal alleen de pool van een lijn (en de poollijn van een punt) ten opzichte van een kegelsnede (cirkel) te construeren. Op basis hiervan is een 'directe' constructie van een middellijn van een cirkel mogelijk.



Zijn nu p, p' en q, q' de dragers van de zijden van een parallellogram. P, P' en Q, Q' zijn de polen van die lijnen ten opzichte van de gegeven cirkel. De lijnen PP' en QQ' snijden elkaar in het gezochte middelpunt O van de cirkel. □

M2. Constructie bij een gegeven cirkel



Constructiebeschrijving – A en B zijn de snijpunten van een lijn die de gegeven (vaste) cirkel (K) snijdt. C en D zijn de snijpunten van die lijn met de cirkel waarvan we het middelpunt willen construeren.
We tekenen de middellijn BB' van (K) en de lijn AB'. Door C en D tekenen we nu lijnen CE en DF evenwijdig met AB'. De lijnen CF en DE, diagonalen van de rechthoek $CEFD$, snijden elkaar in het gezochte punt O. □

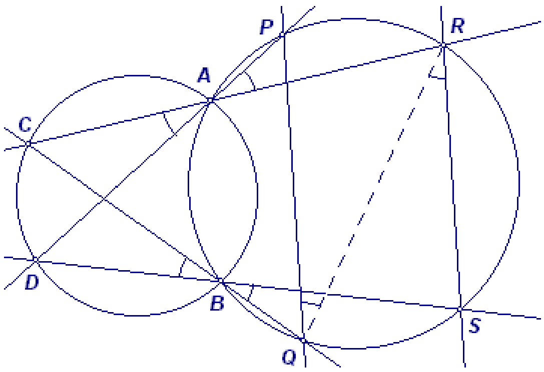
M3 … M7 – Andere middelpuntsconstructies

We geven hieronder nog enkele constructies van het middelpunt van een cirkel met liniaal alleen.
We onderscheiden de volgende gevallen:

M3. Twee gegeven snijdende cirkels, beide met onbekend middelpunt.
M4. Twee gegeven rakende cirkels, beide met onbekend middelpunt.
M5. Twee gegeven concentrische cirkels met onbekend gemeenschappelijk middelpunt.
M6. Twee gegeven niet-concentrische, niet snijdende cirkels met onbekend middelpunt, maar met een gegeven punt *P* van hun machtlijn.
M7. Twee gegeven niet-concentrische, niet snijdende cirkels met onbekend middelpunt, maar met een gegeven punt *P* van de centraal van beide cirkels.

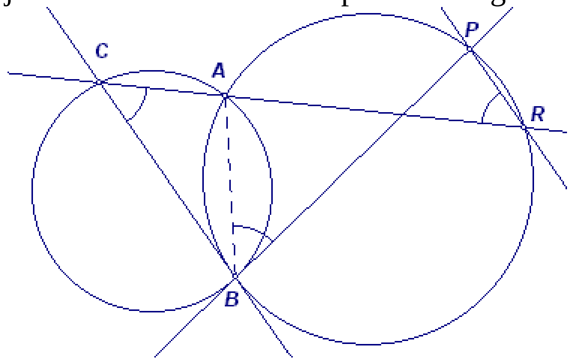
In elk van deze gevallen zullen we laten zien, dat het mogelijk is een parallellogram vast te leggen, zodat het volgens Constructie M1 mogelijk is de middelpunten van de cirkels te construeren.

Eerste constructiebeschrijving M3 – We kiezen twee punten C en D op één van beide cirkels, niet samenvallend met de gemeenschappelijke punten A en B. In de andere cirkel construeren we nu twee evenwijdige lijnen PQ en RS, zoals in onderstaande figuur is aangegeven.



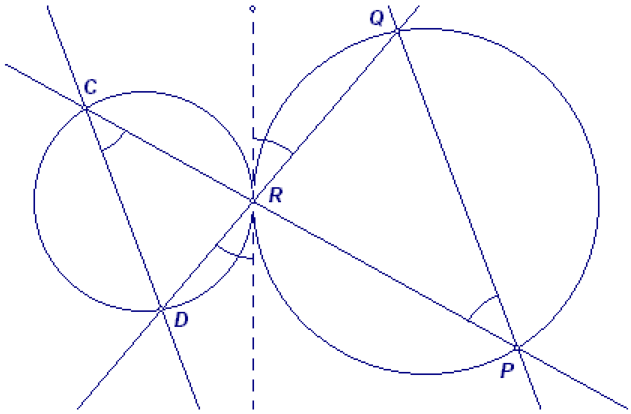
Kiezen we nogmaals twee punten (nu ook verschillend van C en D) dan kunnen we opnieuw twee evenwijdige lijnen construeren. De vier evenwijdige lijnen bepalen dan een parallellogram.
De middelpunten van beide cirkels kunnen nu worden geconstrueerd volgens M1.
Bewijs – De juistheid van de constructie van de evenwijdige lijnen PQ en RS kan worden aangetoond via de gemarkeerde hoeken. Telkens is er sprake van twee omtrekshoeken die op dezelfde boog van een van de cirkels staan. □

Tweede constructiebeschrijving M3 – In het gemeenschappelijk punt *B* van beide cirkels tekenen we de raaklijn *BP* aan de eerste cirkel (zie Appendix II). Op die cirkel kiezen we ook een punt *C* en tekenen de lijnen *CA* en *CB*. De lijn *CA* snijdt de tweede cirkel in het punt *R*. Nu geldt: *CB* // *PR*.



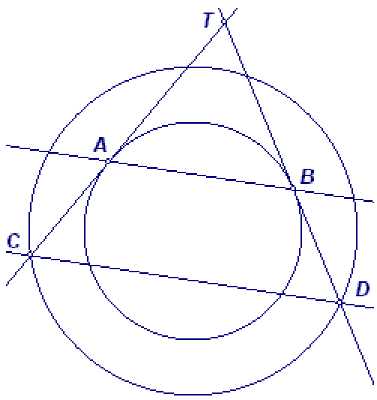
Kiezen we nogmaals een punt als *C* op de eerste cirkel, dan krijgen we opnieuw twee evenwijdige lijnen. De twee paren evenwijdige lijnen bepalen ook nu een parallellogram, met behulp waarvan we volgens M1 de middelpunten van beide cirkels kunnen tekenen.
Bewijs – De juistheid van de constructie van de evenwijdige lijnen *CB* en *PR* kan worden aangetoond via de gemarkeerde hoeken. Telkens is er sprake van twee omtrekshoeken die op dezelfde boog van een van de cirkels staan. □

Constructiebeschrijving M4 – De constructie van de evenwijdige lijnen *CD* en *PQ* staat in de figuur hieronder.



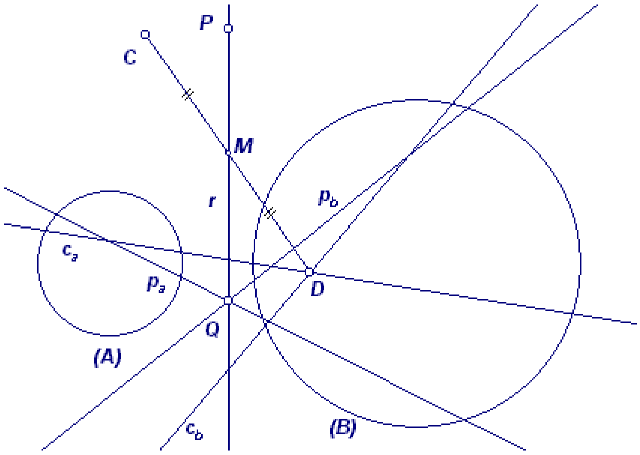
Bewijs – Zie de in de figuur gemarkeerde omtrekshoeken. □

Constructiebeschrijving M5 – In twee willekeurige punten *A* en *B* van de binnenste cirkel tekenen we de raaklijnen aan die cirkel. Die raaklijnen snijden de buitenste cirkel in de punten *C* en *D*. Nu zijn de lijnen *AB* en *CD* evenwijdig. Met een tweede stel punten als *A* en *B* krijgen we een tweede paar evenwijdige lijnen, en dus opnieuw een parallellogram.



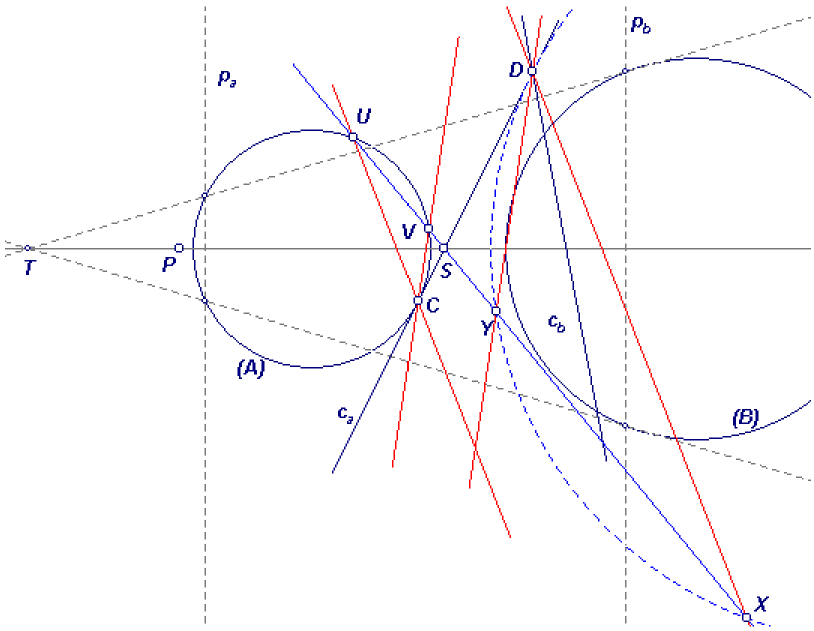
Bewijs – Met congruentie van driehoeken rond het middelpunt van de beide cirkels kan worden bewezen dat $\angle TAB = \angle TCD$. □

Constructiebeschrijving M6 – We construeren allereerst – via de poollijnen p_a en p_b – de polair geconjugeerde Q van het punt P ten opzichte van de bundel die bepaald wordt door (A) en (B), de beide gegeven cirkels. Q ligt eveneens op de machtlijn van beide cirkels. PQ is dus die machtlijn (de lijn r). We kiezen nu een punt C buiten de machtlijn en construeren de polair geconjugeerde D van C (via de poollijnen c_a en c_b). Volgens Stelling 5 ligt het midden van CD op de machtlijn.
De lijn CD is dus een gerichte lijn. Volgens S1, geval 1, kunnen we nu een lijn construeren evenwijdig met CD.



Door een tweede punt zoals C te kiezen kunnen we een tweede paar evenwijdige lijnen vinden, waarmee ook weer een parallellogram is vastgelegd. □

Constructiebeschrijving M7 – We construeren allereerst de poollijnen p_a en p_b van P ten opzichte van de cirkels (A) en (B). Hiermee kan het punt T op de centraal geconstrueerd worden, en daarmee dus ook de centraal zelf: de lijn TP (volgens Stelling 1).
Zij nu C een willekeurig punt van (A). Construeer nu – via de poollijnen c_a en c_b – de polair geconjugeerde D van het punt C ten opzichte van de bundel. Van het bundelexemplaar dat door D gaat, kunnen we nu vijf punten construeren. Zij X één van die punten.



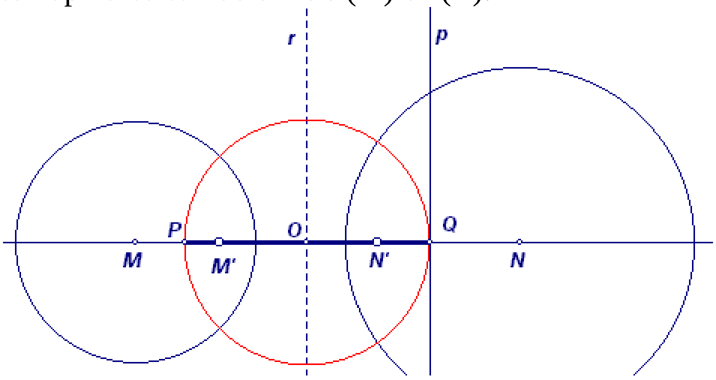
De lijn CD is gemeenschappelijke raaklijn aan (A) en aan het door D gaande bundelexemplaar. Het snijpunt S van CD met de centraal is dus het (inwendig) gelijkvormigheidspunt van die cirkels. De lijn XS snijdt (A) in de punten U en V. Het tweede snijpunt Y van XS met het bundelexemplaar door D kunnen we eveneens construeren (zie Appendix I). Nu hebben we: CU // DX en CV // DY, dus wederom twee paren evenwijdige lijnen die een parallellogram vastleggen. □

De Constructies M6 en M7 gaan uit van twee gegeven, elkaar niet snijdende cirkels. In beide gevallen is daarbij van een extra punt gegeven – een punt van de machtlijn of een punt van de centraal – om het middelpunt van die cirkels te construeren. En met behulp van die middelpunten we construeerden een parallellogram, waarmee de constructie van de middelpunten mogelijk werd conform Constructie M1.

Het ligt voor de hand ons af te vragen of we ook *zonder* dat extra gegeven de middelpunten kunnen construeren.
Het antwoord op die vraag luidt echter ontkennend. We kunnen namelijk de volgende stelling bewijzen.

Stelling 5
Zijn twee niet-snijdende cirkels (geen middelpunten) gegeven, dan is het **onmogelijk** de middelpunten van die cirkels te construeren **met liniaal alleen**.

Bewijs – Zijn (M) en (N) de gegeven cirkels, waarvan in onderstaande figuur de middelpunten ten behoeve van het bewijs zijn aangegeven.
Zij O het snijpunt van de machtlijn r van die cirkels met hun centraal. We tekenen nu een cirkel (O) die orthogonaalcirkel is van beide gegeven cirkels. (O) snijdt de lijn MN in de punten P en Q. Zij verder p de loodlijn in Q op MN.
Nu is p de poollijn van P ten opzichte van de cirkels (M) en (N).



We passen nu de harmonische afbeelding toe met P als pool en p als poollijn. De cirkels (M) en (N) worden daardoor op zichzelf afgebeeld (niet punt-voor-punt).
Dat is echter niet het geval met de middelpunten M en N van die cirkels. Immers deze liggen *buiten* het lijnstuk PQ en ze worden door de harmonische afbeelding afgebeeld op punten M' en N' die liggen op het lijnstuk PQ.

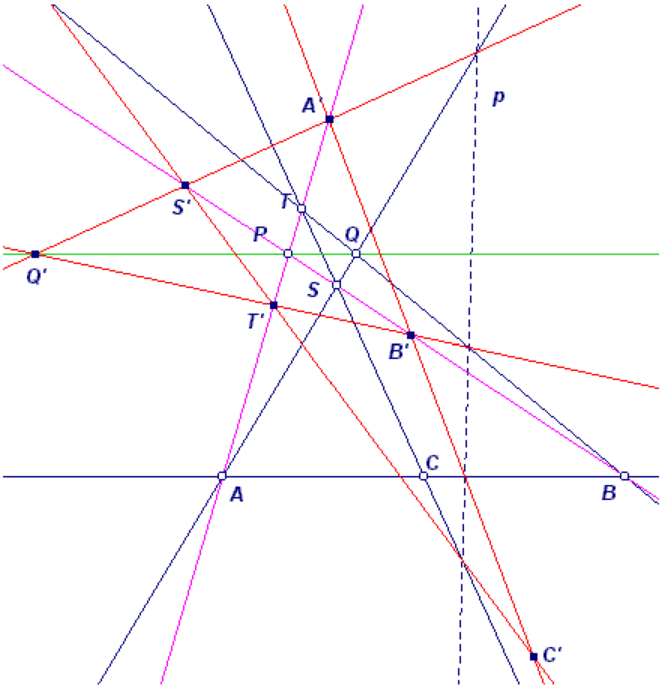
Stel nu dat het *wel* mogelijk is de middelpunten van (M) en (N) met liniaal alleen te construeren. Een dergelijke constructie zal bestaan uit het kiezen van een aantal punten, het tekenen van lijnen door die punten en het bepalen van de snijpunten van die lijnen onderling en van die lijnen met de beide gegeven cirkels. Dit resulteert uiteindelijk in het vinden van M en N als snijpunt van telkens twee van die eerder geconstrueerde lijnen.
We passen nu op deze constructie de in paragraaf 9 gedefinieerde harmonische afbeelding toe. Daardoor ontstaat een nieuwe figuur. Echter, die nieuwe figuur is opgebouwd uit dezelfde constructies die in de eerste constructie zijn uitgevoerd. Het enige verschil is, dat de lijnen en punten andere zijn dan in de eerste figuur. Daarom is de nieuwe constructie equivalent aan de eerste.
Als de veronderstelling juist is, leiden beide constructies dus tot de gezochte middelpunten van de cirkels.

Dit is echter onmogelijk omdat de harmonische afbeelding de punten M en N afbeeldt op andere punten, zeker niet op zichzelf, en evenmin op elkaar. De rechte lijnen die elkaar snijden in M (of in N), worden dus afgebeeld lijnen die elkaar niet snijden in dat middelpunt (of in het andere).
Waarmee de juistheid van de stelling is aangetoond. □

Gevolg
Het is dus ook niet mogelijk het middelpunt van een cirkel te construeren met liniaal alleen als slechts die ene cirkel gegeven is.

Voorbeeld – In de onderstaande figuur is Constructie 1 uitgevoerd (via de punten A, B, C, met $|AC| = |BC|$, T, S, Q) om een lijn door P te construeren evenwijdig met AB.

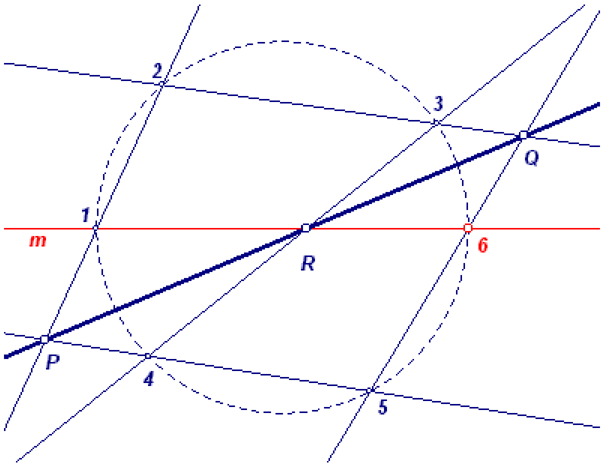
Daarna is de harmonische afbeelding met P als pool en p als poollijn op de constructie toegepast (via de punten A', B', C', T', S', Q').



We merken op, dat nu $|A'C'| \neq |B'C'|$, en voorts, dat Q' op de lijn PQ ligt, zodat ook PQ' evenwijdig is met de lijn AB.
Dat Q' op PQ ligt volgt uiteraard uit de definitie van de harmonische afbeelding, □

Appendix I

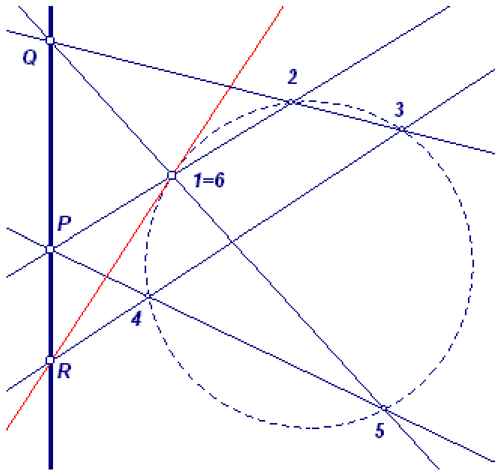
Stelling A1
Het is mogelijk van een cirkel die gegeven is door slechts vijf punten, met liniaal alleen een zesde punt te construeren.



Constructiebeschrijving – We nummeren de gegeven punten op de cirkel *1*, *2*, *3*, *4*, *5*.
We kiezen een willekeurige lijn *m* door het punt *1* en construeren dan het tweede snijpunt (punt nummer *6*) van *m* met de cirkel.
We beschouwen nu de zeshoek *123456* die ingeschreven is in de gegeven cirkel. Dan is '*61*' ≡ *m*.
Zij nu *P* = '*12*' ∧ '*45*' en *R* = '*34*' ∧ *m*.
Het punt *Q* = '*23*' ∧ '*56*' ligt nu op de lijn *PR* (de Pascal-lijn van de zeshoek), zodat *Q* = '*23*' ∧ *PR*.
Het snijpunt van de lijnen '*5Q*' en *m* is dan het gezochte tweede snijpunt van de lijn *m* en de cirkel.
Bewijs – Het bewijs berust op de stelling van Pascal. □

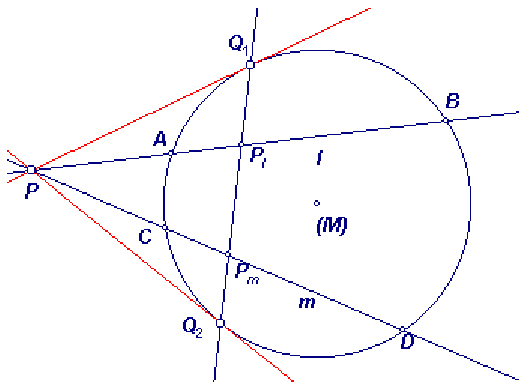
Appendix II

Stelling A2.1
Het is mogelijk met liniaal alleen de raaklijn in een punt van een door vijf punten vastgelegde cirkel te construeren.



Constructiebeschrijving – We leggen de cirkel vast door 5 punten, genummerd *1*, *2*, *3*, *4*, *5*. We construeren de raaklijn in het punt *1*. We kiezen een punt *6* samenvallend met punt *1* – de lijn '*16*' is daarom de gezochte raaklijn.
Beschouwen we nu de zeshoek *123456*. Deze is ingeschreven in de cirkel. Volgens de stelling van Pascal zijn dan de snijpunten van overstaande zijden van die zeshoek collineair (op Pascal-lijn van de zeshoek).
Zij nu: P = '*12*' $\wedge$ '*45*' en Q = '*23*' $\wedge$ '*51*' (immers '*51*' $\equiv$ '*56*').
Het snijpunt R van '*34*' en '*61*' (de raaklijn) ligt dus ook op PQ (de Pascal-lijn), zodat $R = PQ$ $\wedge$ '*34*'.
De lijn '*R1*' is dan de gezochte raaklijn.
Bewijs – Het bewijs van bovenstaande constructie berust dus op de stelling van Pascal. □

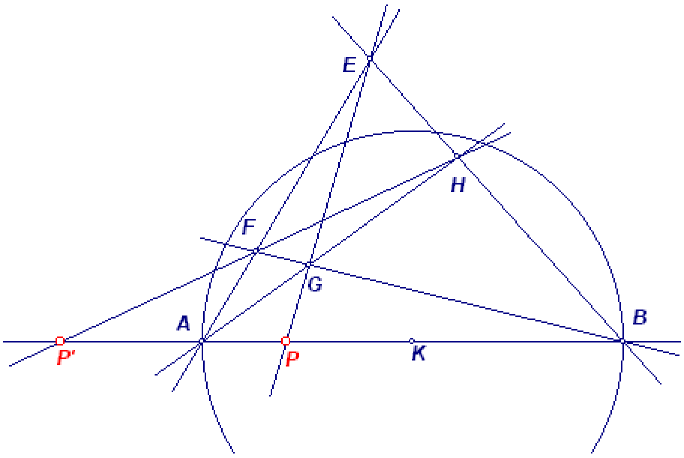
Stelling A2.2
Het is mogelijk met liniaal alleen de raaklijnen uit een gegeven punt aan een gegeven cirkel te construeren.



Constructiebeschrijving – Zij P het gegeven punt en (M) de gegeven cirkel. We tekenen door P twee lijnen l en m die de cirkel opvolgend in A, B en C, D snijden. P_l is de vierde harmonische bij A, B, P en P_m is de vierde harmonische bij C, D, P. De lijn $P_lP_m \equiv p$ is dan de poollijn van P ten opzichte van de cirkel. Omdat P buiten (M) ligt, snijdt p de cirkel in twee punten Q_1 en Q_2. De lijnen PQ_1 en PQ_2 zijn dan raaklijnen aan de cirkel.
Bewijs – Dit volgt direct uit de pooltheorie. Q_1 (Q_2) ligt op de poollijn van P, dus P ligt op de poollijn van Q_1 (Q_2). Maar de poollijn van Q_1 (Q_2) is de raaklijn in Q_1 (Q_2) aan de cirkel. □

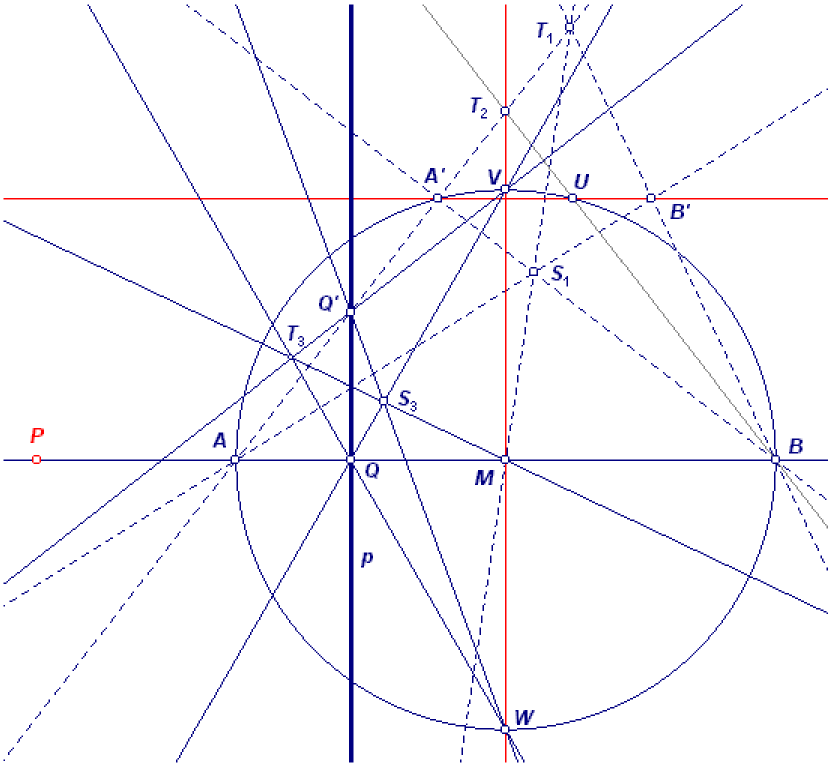
Appendix III

Stelling A3.1
Het is mogelijk met liniaal alleen de inverse van een punt ten opzichte van een cirkel, waarvan ook het middelpunt bekend is, te construeren (inversie).



Constructiebeschrijving – Zij *P* het gegeven punt en (*K*) de gegeven cirkel.. We kiezen een punt *E* buiten de lijn *PK* en tekenen de lijnen *EA*, *EB*, *EP* (waarbij *A*, *B* de snijpunten zijn van *PK* met de cirkel). Op *AE* kiezen we een punt *F* en bepalen het snijpunt *G* van *BF* en *EP*. Nu is $H = AG \wedge EB$. De lijn *HF* snijdt de lijn *PK* dan in het inverse punt *P'* van *P* ten opzichte van cirkel (*K*).
Bewijs – Voor de punten *A*, *B*, *P*, *P'* geldt $(ABPP') = -1$. Waaruit het gestelde volgt. □

Stelling A3.2
Het is mogelijk met liniaal alleen de poollijn van een gegeven punt ten opzichte van een cirkel, waarvan ook het middelpunt bekend is, te construeren.

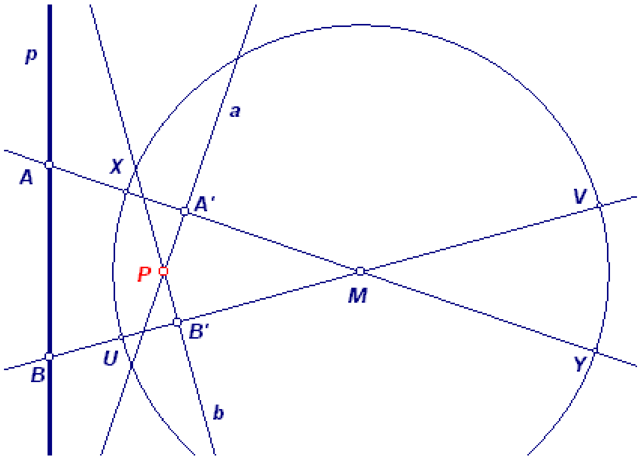


Constructiebeschrijving (poollijn) – We zullen de poollijn *p* construeren van een gegeven punt *P* ten opzichte van de gegeven cirkel (*M*). In bovenstaande figuur staat een groot gedeelte van de (algemene) constructie.

We weten in ieder geval al, dat de lijn *PM* loodrecht staat op *p*. Via de snijpunten *A* en *B* van *PM* met de cirkel construeren we, omdat ook het midden *M* van *AB* bekend is, door een willekeurig punt *A'* van de cirkel een lijn evenwijdig met *PM* (volgens Constructie 1, via de punten T_1, S_1, *B'*). De lijn *A'B'* snijdt dan de cirkel in het punt *U*. *ABUA'* is dan een gelijkbenig trapezium. Volgens Constructie 13 kunnen we nu een loodlijn in *M* op *PM* construeren (zie de punten T_2, *V* en *W*).
De constructie van de vierde harmonische *Q* bij *A*, *B*, *P* is niet in de figuur weergegeven; *Q* is het snijpunt van de gezochte poollijn met de lijn *PM*. Volgens Constructie 2 is de constructie van *Q* eveneens uit te voeren met liniaal alleen. Door *Q* construeren we dan een lijn evenwijdig met *VW* (volgens Constructie 1 via de punten T_3, S_3 en *Q'*, gebruik makend van het midden *M* van *VW*). De lijn *QQ'* staat dan loodrecht op *PM* is dus de gevraagde poollijn. □

Stelling A3.3
Het is mogelijk met liniaal alleen de pool van een gegeven lijn ten opzichte van een cirkel, waarvan ook het middelpunt bekend is, te construeren.

Constructiebeschrijving (pool) – We construeren nu de pool *P* van de gegeven lijn *p* ten opzichte van cirkel (*M*).



Op de gegeven poollijn *p* kiezen we twee punten *A* en *B*. Van deze punten kunnen we volgens stelling A3.2 de poollijnen *a* en *b* construeren. De lijnen *a* en *b* snijden elkaar (volgens de hoofdstelling van de pooltheorie) in de pool *P* van de lijn *p*. □

Literatuur

[1] H. Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications (New York,1965)

[2] Martin Kindt: *Lessen in Projectieve Meetkunde*, Epsilon Uitgaven (Utrecht, 1996, 2e druk)

[3] George E. Martin: *Geometric Constructions*, Springer (New York, 1998)

[4] Jacob Steiner: *Die Geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, Dümmler (Berlin, 1833). Herausgegeben von A.J. von Oettingen, Wilhelm Engelmann, Ostwald's Klassiker Nr. 60 (Berlin, 1895)

[5] S.C. van Veen: *Passermeetkunde*, J. Noorduijn en Zoon N.V. (Gorinchem, 1951)

[6] Hk. de Vries: *Historische Studiën, deel I*, P. Noordhoff (Groningen, 1925) / Op pp. 84-112 een uitvoerige bespreking van [4]