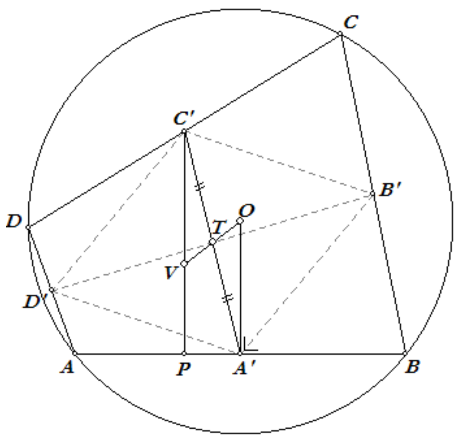
Het nevencentrum van een koordenvierhoek

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel
april 2008



$ABCD$ is een koordenvierhoek (met omcentrum O).
$A'B'C'D'$ is het 'bijbehorende' *Varignon-parallellogram* (A', B', C', D' zijn de middens van de zijden van $ABCD$) [1].
T is het snijpunt van de diagonalen van $A'B'C'D'$.
Dan is:

(1) $TA' = TC'$

Zij V het spiegelbeeld van O bij de puntspiegeling $\mathcal{M}$ met centrum T.

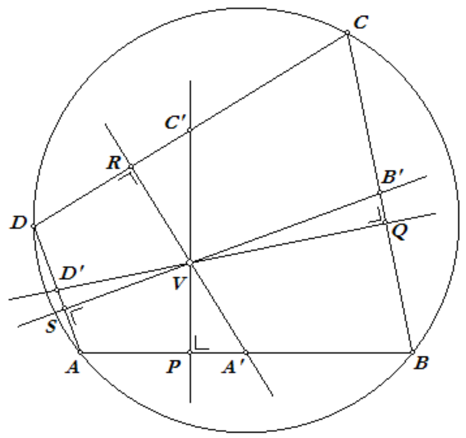
Dus: $\mathcal{M}(O) = V$

Maar ook, en zie daarvoor (1):

$\mathcal{M}(A') = C'$

Zodat: $\mathcal{M}(OA') = VC'$ én $OA' \,//\, VC'$

De lijn $C'V$ staat dan, in het punt P, loodrecht op AB; immers, OA' staat loodrecht op AB.

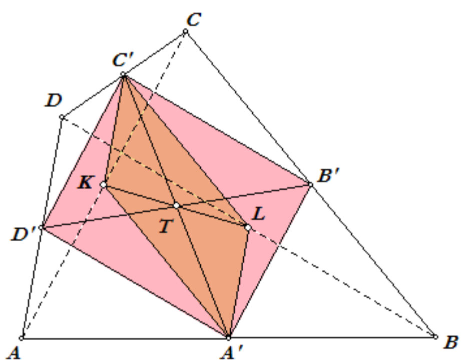


De ligging van het punt T, en daarmee ook die van het punt V, is *onafhankelijk* van de lijn $C'P$.
Ook de lijnen $A'V$, $B'V$, $D'V$ staan dan loodrecht op opvolgend CD, DA, BC.

En dus ook, omgekeerd:

E1. *De loodlijnen uit de middens van de zijden van een koordenvierhoek op de 'bijbehorende' overstaande zijde zijn concurrent in een punt V.*

Het punt V wordt wel het ***nevencentrum*** van de koordenvierhoek genoemd.

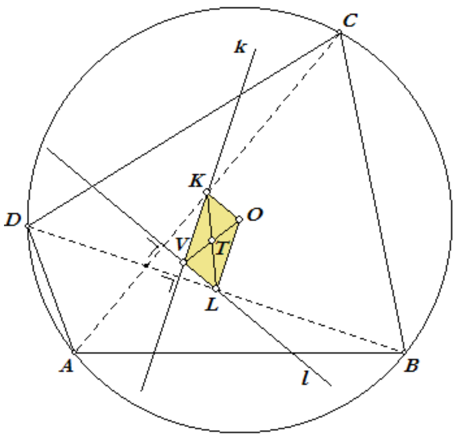


In de figuur hiernaast is $ABCD$ een *willekeurige vierhoek*.
$A'B'C'D'$ is het Varignon-parallelogram van $ABCD$.
K en L zijn de middens van de diagonalen van $ABCD$.
Nu is ook $A'LC'K$ een parallellogram [2].
Beide parallellogrammen hebben de diagonaal $A'C'$ gemeenschappelijk.
De lijnen KL, $B'D'$, $A'C'$ gaan dus door eenzelfde punt T (het diagonaalsnijpunt van $A'B'C'D'$).

Gevolg. Het punt T is (ook) het midden van het lijnstuk KL.

We bewijzen nu:

E2. *In een koordenvierhoek gaan de loodlijnen uit de middens van de diagonalen op de andere diagonaal door het nevencentrum van die koordenvierhoek.*



In de hiernaast staande figuur is *ABCD* een koordenvierhoek (omcentrum *O*) en zijn *K* en *L* de middens van de diagonalen *AC* en *BD*. Het punt *T* is het midden van *KL* (zie hierboven).

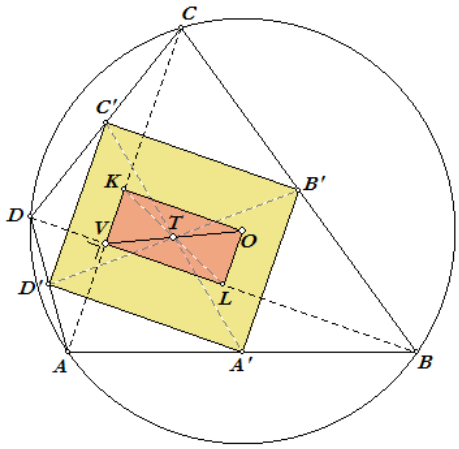
De lijnen *k* en *l* gaan door *K* en *L* en staan loodrecht op opvolgend *BD* en *AC*. Hun snijpunt is het punt *V*.
Nu is *OKVL* een parallellogram. Immers:
- $OL \perp BD$ en $k \perp BD$, zodat $OL \,//\, KV$;
- $OK \perp AC$ en $l \perp AC$, zodat $OK \,//\, LV$.

Het punt *T* is dus ook het midden van *OV*, waarmee *V* het nevencentrum is van *ABCD*.

Definitie. Een ***orthodiagonale vierhoek*** is een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

We hebben dan:

E3. *In een orthodiagonale <u>koorden</u>vierhoek valt het nevencentrum samen met het snijpunt van de diagonalen van die koordenvierhoek.*

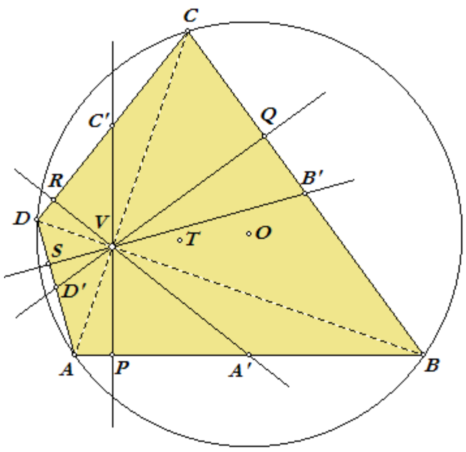


In de koordenvierhoek *ABCD* staan de diagonalen *AC* en *BD* in het punt *V* loodrecht op elkaar.

- *AC* is de loodlijn door *K* (het midden van *AC*) op *BD*;
- *BD* is de loodlijn door *L* (het midden van *BD*) op *AC*.

We hebben hierboven gezien (zie E2) dat dan het snijpunt van die loodlijnen - hier is dat het punt *V* - het nevencentrum is van de koordenvierhoek.

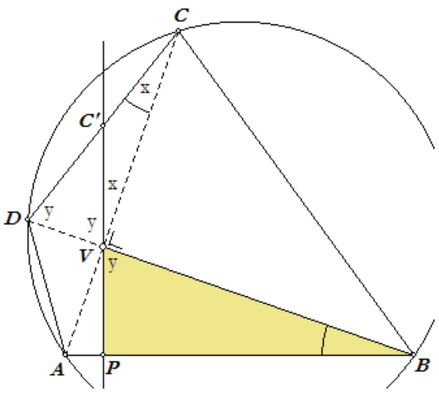
En ook (en daarom ging het eigenlijk):



E4. ***In een orthodiagonale koordenvierhoek staan de lijnen die gaan door de middens van de zijden en door het snijpunt van de diagonalen, loodrecht op de 'bijbehorende' overstaande zijde.***

Het bewijs van E4 is direct af te leiden uit de eraan voorafgaande eigenschappen.

Er is evenwel ook een *direct* bewijs, mede gebaseerd op een bekende eigenschap van een rechthoekige driehoek (namelijk de *stelling van Thales*).



In de figuur is $ABCD$ weer een *orthodiagonale* koordenvierhoek; C' is het midden van CD en V is het snijpunt van de diagonalen.
We willen opnieuw bewijzen dat de lijn $C'V$ (in P) loodrecht staat op AB (zie E4).

In de in V rechthoekige driehoek VCD is C' het middelpunt van de omcirkel van die driehoek (*stelling van Thales*).
Stellen we in de driehoek $\angle C = x$ en $\angle D = y$, dan is:

$$x + y = 90°$$

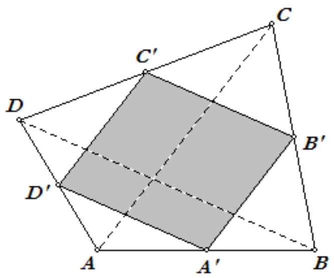
En omdat $C'D = C'V$ is: $\angle DVC' = y$
Dan is in driehoek PBV: $\angle V = y$ (*overstaande hoeken*)
en, volgens de *stelling van de omtrekshoek*:

$$\angle B = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{bg}(AD) = \angle ACD = x$$

Zodat ook in driehoek PBV geldt: $x + y = 90°$
Met andere woorden: de hoek bij P is recht. Waarmee E4 op en andere manier bewezen is.

Noten

[1] Het *Varignon-parallellogram* (ook wel *Varignon-vierhoek*) van een vierhoek is het parallellogram waarvan de hoekpunten de middens zijn van de zijden van die vierhoek (naar *Pierre Varignon*, 1654-1722, Frankrijk).



Dat de Varignon-vierhoek inderdaad een parallellogram is blijkt eenvoudig.

Zijn A', B', C', D' de middens van de zijden van vierhoek $ABCD$, dan is $A'B' // AC$ en $C'D' // AC$ (*middenparallelen* in opvolgend de driehoeken ABC en CDA). Dus is $A'B' // C'D'$. Analoog is $A'D' // B'C'$.

Zie voor andere eigenschappen van het Varignon-parallellogram:
Dick Klingens (2001): *De Stelling van Varignon, en meer*. Op: *www.pandd.demon.nl/vierh/varignon.htm* (website).

[2] Vierhoek $A'LC'K$ kan hier worden opgevat als het Varignon-parallellogram van de *niet-convexe* vierhoek $ABDC$.

