Verdubbeling van de kubus volgens Nicomedes

Inleiding

Het probleem van het 'verdubbelen van de kubus' staat in de wiskunde ook wel bekend als het 'Delisch probleem'.
Het probleem luidt: construeer de ribbe van een kubus die een twee keer zo grote inhoud heeft als die van een gegeven kubus.
Het probleem is een van de drie wiskundeproblemen uit de klassieke oudheid. De oude Grieken poogden de constructie uit te voeren met behulp van 'hun' constructiemiddelen: de passer en liniaal. Maar het bleek daarmee niet te kunnen.
Vele eeuwen later werd bewezen dat de oplossing met passer en liniaal niet mogelijk is.
Echter, er zijn wel andere middelen om de constructie uit te voeren. Zo heeft **Nicomedes** (ca. 180 v.Chr.) de **conchoïde**, een bijzondere kromme lijn, ontdekt. Naar verluidt – Pappos schreef er over, en ook Proklos in zijn commentaar op Euclides – heeft Nicomedes het Delisch probleem (en ook het probleem van de trisectie van de hoek) met behulp van z'n conchoïde opgelost.

Oplossing van het Delisch probleem

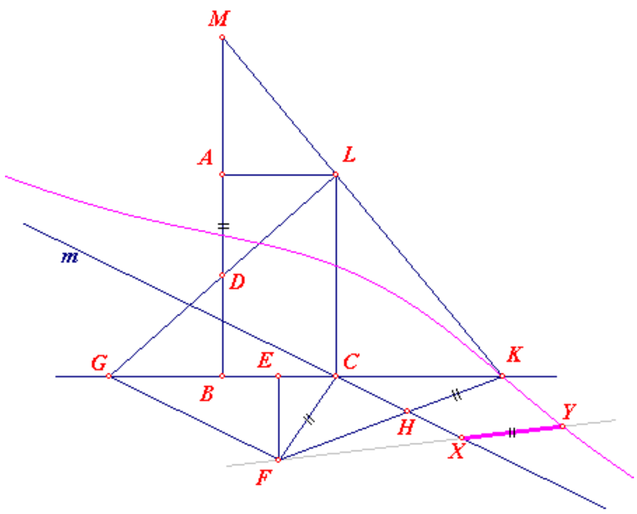
Stel de gegeven kubus heeft de ribbe a. We zoeken dan een lijnstuk x, zo, dat $x^3 = 2a^3$, zodat $x = a\sqrt[3]{2}$.
Van het getal $\sqrt[3]{2}$ kan bewezen worden dat het *niet-euclidisch* is: niet te construeren met passer en liniaal.
We gaan nu in hetgeen volgt uit van twee gegeven lijnstukken a en b en trachten de lijnstukken x en y (als middelevenredigen) zo te construeren, dat

$$a : x = x : y = y : b$$

Immers dan is: $x^2 = ay$ en $xy = ab$.
Daaruit volgt dan eenvoudig dat $x^3 = axy = a^2b$.
Kiezen we $b = 2a$, dan hebben we: $x^3 = 2a^3$.

We volgen nu verder de Engelse tekst (in een op enkele plaatsen aangepaste vertaling) van T. Heath in zijn *A History of Greek Mathematics*, vol. I, pp. 260-262 (New York: Dover Publications, 1981).
Niet duidelijk is of dit de tekst van Pappos of de tekst van Eutokios is.

Zijn AB, BC twee lijnstukken waarbij de middelevenredigen moeten worden gevonden.
Completeer dan het parallellogram $ABCL$.
D, E zijn de middens van AB en BC.
Teken LD en verleng het lijnstuk tot het punt G op CB.
Teken EF loodrecht op BC, zo, dat $CF = AD$.
Teken GF en teken een lijn m door C ermee evenwijdig.
Teken dan door F een lijn die m in H en het verlengde van EC in K snijdt, zo, dat $HK = CF = AD$.
Dit kan worden gedaan met een conchoïde waarvan F de pool is en CH de 'liniaal' en met een 'afstand' die gelijk is aan AD (of aan CF).
Zie de paragraaf "De conchoïde van Nicomedes" hieronder.
Deze conchoïde snijdt het verlengde van EC in het punt K.



Dan verbinden we K en F en bepalen het snijpunt H van m en KF, en uit de eigenschap van de conchoïde volgt dan dat $HK = CF = AD$.

De lijn KM snijdt het verlengde van BA in M.

(1) **CK en MA zijn dan de gezochte middelevenredigen.**

Er geldt, omdat E het midden is van BC en BC verlengd is naar K:

$$BK \cdot KC = (EK + BE)(EK - BE) = (EK + CE)(EK - CE) = EK^2 - CE^2$$

of

(2) $BK \cdot KC + CE^2 = EK^2$

Tellen we in (2) aan beide kanten EF^2 op, dan vinden we (volgens de stelling van Pythagoras):

(3) $BK \cdot KC + CF^2 = KF^2$

Ook is $MA : AB = ML : LK = BC : CK$ (evenwijdige lijnen).

Maar $AB = 2AD$ en $BC = ½GC$, zodat

$$MA : 2AD = ½GC : CK$$
$$MA : AD = GC : CK$$
$$= FH : HK$$

en dus ook

$$(MA + AD) : AD = (FH + HK) : HK$$
$$\boldsymbol{MD} : AD = \boldsymbol{FK} : HK$$

Blijkens de constructie is $AD = HK$, en dus is ook $MD = FK$, waaruit:

$$MD^2 = FK^2$$

Ook is:

(4) $MD^2 = BM \cdot MA + DA^2$, immers $(MD + DB)(MD - DA) = BM \cdot MA$, met $DB = DA$.

En eerder vonden we in (2):

(5) $BK \cdot KC + CF^2 = KF^2$

zodat uit (4) en (5) volgt:

$$BM \cdot MA + DA^2 = BK \cdot KC + CF^2$$

Maar $DA = CF$, zodat $BM \cdot MA = BK \cdot KC$

of

$$CK : MA = BM : BK$$
$$= LC : CK$$

En ook geldt:

$$BM : BK = MA : AL$$

zodat

$$LC : CK = CK : MA = MA : AL$$

of

$$AB : CK = CK : MA = MA : BC$$

Waarmee het in (1) gestelde is aangetoond.

De conchoïde van Nicomedes

We gaan uit van een punt P, een lijn l en een lijnstuk met lengte d.

We kiezen op l een willekeurig punt X en bepalen op de lijn $m = PX$ de punten Y_1 en Y_2 met

$$|XY_1| = |XY_2| = d.$$

De conchoïde van Nicomedes is dan de meetkundige plaats van de punten Y_1, Y_2 als X de lijn l doorloopt.

Het punt P heet de *pool* van de conchoïde, de lijn l is de *liniaal* van de conchoïde.