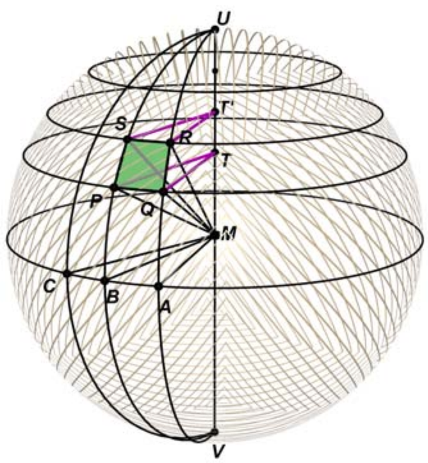
Inhoud en oppervlakte van een bol
zonder integraalrekening

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (NL)
september 2008

In de moderne leerboeken over stereometrie (3-dimensionale ruimtemeetkunde) is het gebruikelijk de formules voor de inhoud en de oppervlakte van een bol met straal $\boldsymbol{R}$ (resp. $\frac{4}{3}\pi\boldsymbol{R}^3$ en $4\pi\boldsymbol{R}^2$) af te leiden met behulp van de integraalrekening.
In hetgeen volgt doen we het zonder (hoewel… [1]).

1. Inhoud van een bol

figuur 1



We gaan uit van een bol met middelpunt M en straal $\boldsymbol{R}$.

We verdelen een middellijn UV van de bol in $2n$ gelijke stukken en brengen door de deelpunten (zoals T, T' en ook M) vlakken aan loodrecht op UV. Deze vlakken snijden de bol volgens parallelcirkels.[2]
Op de cirkel in het vlak door M loodrecht op HT kiezen we $2n$ punten die een regelmatige $2n$-hoek $ABC\ldots$ vormen.
De vlakken door A, B, C, … en de lijn UV snijden de bol volgens cirkels die elk de cirkels van de eerste serie loodrecht snijden.

Twee 'opeenvolgende' cirkels van de eerste serie (middelpunten T en T') snijden twee 'opeenvolgende' cirkels van de tweede serie (omtrekspunten A en B) in punten (hier P, Q, R, S) die een *bolvierhoek* vormen.
We hebben nu:
- $MA \,//\, TQ \,//\, T'R$ en $MB \,//\, TP \,//\, T'S$, zodat $\angle AMB = \angle QTP = \angle RT'S$

immers, de vlakken MAB, TPQ en $T'SR$ zijn evenwijdig.
Het lijnstuk RS is een zijde van een regelmatige $2n$-hoek die in de cirkel (T') beschreven is; zo ook is PQ een zijde van een regelmatige $2n$-hoek die in (T) beschreven is.
Ook is $RS \,//\, PQ$. De punten P, Q, R, S liggen daarmee in eenzelfde vlak.

We bekijken nu de piramide $M.PQRS$.
Als n (en dan dus ook $2n$) onbegrensd toeneemt, nadert het vlak $PQRS$ tot een raakvlak aan de bol, terwijl de hoogte van de piramide nadert tot de straal $\boldsymbol{R}$ van de bol. Deze eigenschappen gelden voor alle mogelijke piramides met top M die analoog aan $M.PQRS$ zijn ontstaan.

We beschouwen de inhoud van de bol als de grenswaarde waartoe de som van de inhouden van alle 'ingeschreven' piramides nadert als n onbegrensd toeneemt.

De som van de oppervlaktes van de grondvlakken van die piramides nadert dan tot de oppervlakte van de bol [3], dus tot $4\pi \boldsymbol{R}^2$ (zie Opmerking 1).
Voor de inhoud *I* van de bol vinden we dus (zie ook Opmerking 1):

$$I = \tfrac{1}{3} \cdot \boldsymbol{R} \cdot 4\pi \boldsymbol{R}^2 = \tfrac{4}{3}\pi \boldsymbol{R}^3$$

Zodat:

Stelling 1. *De inhoud van een bol met straal* $\boldsymbol{R}$ *is gelijk aan* $\tfrac{4}{3}\pi \boldsymbol{R}^3$.

Opmerking **1.** In het bewijs van Stelling 1 hebben we gebruikt gemaakt van twee vooralsnog onbewezen zaken:
- de oppervlakte van een bol met straal $\boldsymbol{R}$ is gelijk aan $4\pi \boldsymbol{R}^2$;
- de inhoud van een piramide met oppervlakte grondvlak $\boldsymbol{G}$ en hoogte h is $\tfrac{1}{3}\boldsymbol{G}h$.

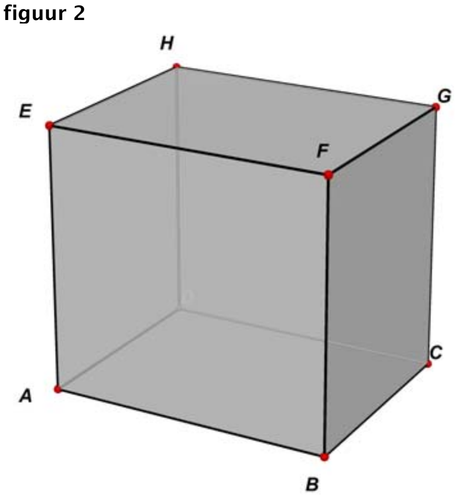
De bewijzen van deze eigenschappen staan in de volgende paragrafen. We beginnen met de laatste. ♦

2. De inhoud van een piramide

Bij onze volgende beschouwingen gaan we uit van een tweetal axioma's [4]:
- **Axioma 1.** De inhoud van een rechthoekig blok is gelijk aan $l \cdot b \cdot h$, waarbij l de ***lengte***, b de ***breedte*** en h de ***hoogte*** is van het rechthoekige blok (zie Opmerking 2).
- **Axioma 2.** Twee congruente lichamen hebben dezelfde inhoud.

Opmerking 2

figuur 2



Definitie. *Een* ***rechthoekig blok*** *is een vierzijdig lichaam begrensd door zes rechthoeken.*

In het rechthoekige blok *ABCD.EFGH* ***in figuur 2*** is:

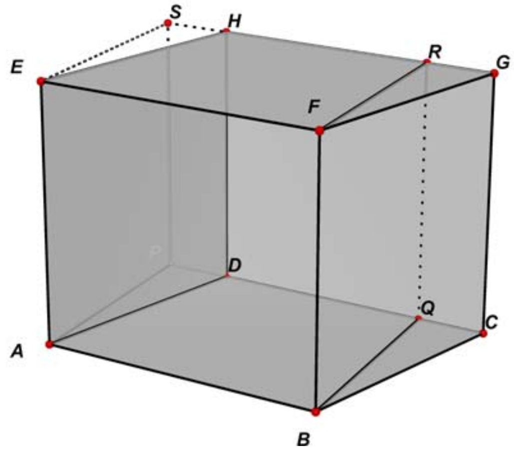
$$AB = l,\ BC = b \text{ en } AE = h$$

Definitie. *Een* ***recht blok*** *is een vierzijdig lichaam waarvan de vier zijvlakken de vorm van een rechthoek hebben en het grond- en bovenvlak de vorm van een parallellogram.* ♦

Op basis van Axioma 1 kunnen we nu bewijzen:

Stelling 2. *De inhoud van een recht blok is gelijk aan* $\boldsymbol{G}h$, *waarbij* $\boldsymbol{G}$ *de oppervlakte is van het grondvlak en* h *de hoogte.*

figuur 3



Bewijs. ***In figuur 3*** zien we het rechte blok *ABCD.EFGH*.
De lengte l van het blok is hier AB, de breedte is de hoogte b (= BQ) van het parallellogram *ABCD* en de hoogte h van het blok is gelijk aan AE.
We bepalen nu op de lijn CD de punten P en Q zo, dat $AP \perp CD$ en $BQ \perp CD$; op de lijn GH liggen de punten R en S met $FR \perp GH$ en $ES \perp GH$.
De vierhoeken *ABQP* en *EFRS* zijn nu rechthoeken; en daarmee is *ABQP.EFRS* een rechthoekig blok.

Uit planimetrische overwegingen en Axioma 2 volgt nu dat de driezijdige prisma's *BCQ.FGR* en *ADP.EHS* gelijke inhouden hebben. Zodat [5]:

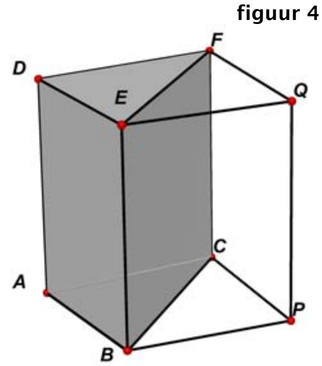
$$I\,(ABCD.EFGH) = I\,(ABQP.EFRS) = AB \cdot BQ \cdot AE$$

En hierbij is $\boldsymbol{G} = AB \cdot BQ$ de oppervlakte van parallellogram *ABCD* en $AE = h$ de hoogte van het blok, zodat inderdaad: $I\,(ABCD.EFGH) = \boldsymbol{G}h$ ♦

Een direct gevolg van Stelling 2 is:

Stelling 3. *De inhoud van een recht driezijdig prisma is* ***G****h.*

figuur 4



Bewijs. ***In figuur 4*** is *ABC.DEF* een recht driezijdig prisma. De hoogte h is dan (bijvoorbeeld) gelijk aan AD. De oppervlakte $\boldsymbol{G}$ van het grondvlak van dit prisma is gelijk aan de oppervlakte van driehoek *ABC*.
Door spiegeling van het prisma in het vlak *BCFE* ontstaat een daarmee congruent prisma *BPC.EQF*.
Nu is *ABPC.DEQF* een recht blok, waarvan, volgens Stelling 2, de inhoud gelijk is aan $O(ABPC) \cdot AD$. Maar:

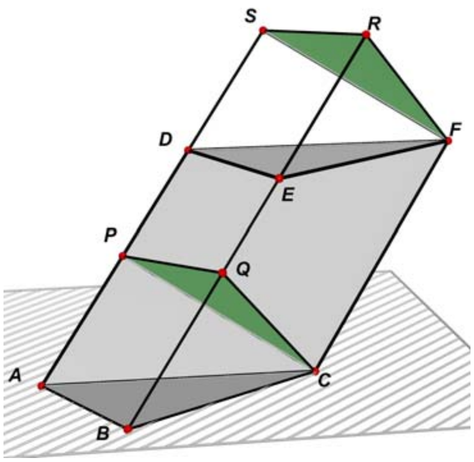
$$O(ABPC) = 2 \cdot O(ABC) = 2\boldsymbol{G}$$

Volgens Axioma 2 geldt: $I\,(ABC.DEF) = I\,(BPC.EQF)$
zodat: $I\,(ABC.DEF) = \frac{1}{2} \cdot I\,(ABPC.DEQF) = \frac{1}{2} \cdot 2\boldsymbol{G} \cdot AD = \boldsymbol{G}h$ ♦

Definitie. *Onder een* ***loodrechte doorsnede*** *van een prisma wordt verstaan een doorsnede van dat prisma met een vlak dat loodrecht staat op een opstaande ribbe en dat alle opstaande ribben snijdt.*

Stelling 4. *De inhoud van een driezijdig prisma is gelijk* $\boldsymbol{D} \cdot r$*, waarbij* $\boldsymbol{D}$ *de oppervlakte is van een loodrechte doorsnede en* r *de lengte van een opstaande ribbe.*

figuur 5



Bewijs. ***In figuur 5*** is *ABC.DEF* een driezijdig prisma.
De punten *P* en *Q* zijn de snijpunten van de opstaande ribben *AD* en *BE* met het vlak door *C* loodrecht op die ribben.
PQC is dus een loodrechte doorsnede (oppervlakte ***D***) van het prisma.
S en *R* zijn de snijpunten van opvolgend *AD* en *BE* met het vlak door *F* loodrecht op die ribben.
De vlakken *PQC* en *SRF* zijn dus evenwijdig (beide staan loodrecht op *AD*).
Het prisma *PQC.SRF* is daarmee recht (en driezijdig).

Nu is, volgens Stelling 3: $I\,(PQC.SRF) = \boldsymbol{D} \cdot PS$
De vierzijdige piramides *C.ABQP* en *F.DERS* zijn door deze constructie congruent (via een translatie over de vector *AD*). Daardoor is, volgens Axioma 2:

$$I\,(C.ABQP) = I\,(F.DERS)$$

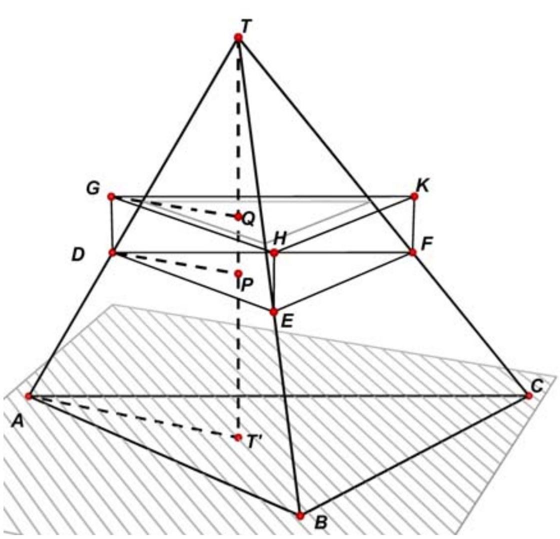
Ook is dan: $r = AD = PS$
Zodat: $I\,(ABC.DEF) = I\,(PQC.SRF) = \boldsymbol{D} \cdot PS = \boldsymbol{D} \cdot r$ ♦

De volgende stap op weg naar het bewijs van de tweede eigenschap vermeld in Opmerking 1 is de belangrijke stelling:

Stelling 5. *Twee viervlakken die gelijke grondvlakken en gelijke hoogtes hebben, hebben gelijke inhouden.*

Bewijs. ***Zie figuur 6.*** We verdelen de hoogte *h* (de lengte van *TT'*) van het viervlak *T.ABC* in *n* gelijke delen. Vervolgens berekenen we de inhoud van het *p*-de ‘buitenprisma’; dat is het prisma dat als grondvlak heeft de doorsnede van het viervlak met het *p*-de deelpunt (in de figuur is dat driehoek *DEF* met deelpunt *P*). Het bovenvlak van dat prisma gaat door het (*p*–1)-de deelpunt van de hoogte (hier is dat het deelpunt *Q*).

figuur 6



De driehoeken *DEF* en *ABC* zijn gelijkvormig, zodat:

$$O(DEF) : O(ABC) = DE^2 : AB^2 = TD^2 : TA^2$$
$$= TP^2 : (TT')^2 = p^2 : n^2$$

Is $O(ABC) = \boldsymbol{G}$, dan is:

$$O(DEF) = \tfrac{p^2}{n^2}\boldsymbol{G}$$

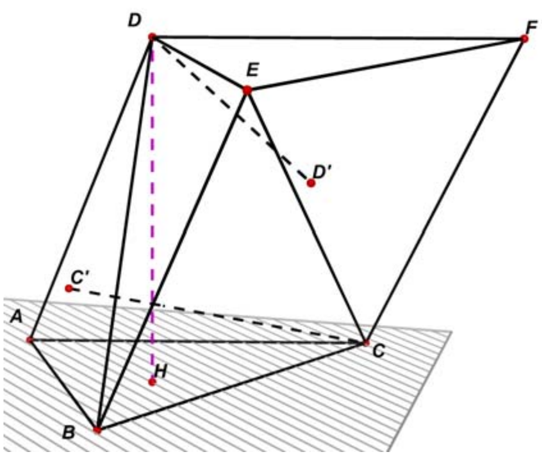
De hoogte *PQ* van het *p*-de buitenprisma is gelijk aan $\tfrac{1}{n}h$, zodat voor de inhoud I_p van het *p*-de buitenprisma (een driezijdig prisma) geldt, volgens Stelling 4: $I_p = \tfrac{p^2}{n^2}\boldsymbol{G}.\tfrac{1}{n}h = \tfrac{p^2}{n^3}\boldsymbol{G}h$

Voor een tweede viervlak waarvan het grondvlak en de hoogte gelijk zijn aan die van het reeds beschouwde viervlak, is de inhoud van het p-de buitenprisma eveneens gelijk aan $\frac{p^2}{n^3}\boldsymbol{G}h$.
De som van alle buitenprisma's van het eerste viervlak is daarmee gelijk aan de som van alle (het zijn er evenveel) buitenprisma's van het tweede viervlak.
Deze sommen naderen dus tot dezelfde limiet (de inhoud) als n onbegrensd toeneemt. De beide viervlakken hebben dus gelijke inhouden. ♦

En vervolgens hebben we dan:

Stelling 6. *De inhoud van een viervlak is gelijk aan* $\frac{1}{3}\boldsymbol{G}h$.

figuur 7



Bewijs. We gaan uit van het viervlak *D.ABC*. We construeren nu een prisma met *ABC* als grondvlak en *AD* als opstaande ribbe; ***zie figuur*** *7*.
We bouwen dat prisma op uit de viervlakken *ABCD*, *BCED* en *CEFD*. Kiezen we hierbij in alle drie de gevallen het punt *C* als top, dan hebben die viervlakken dezelfde hoogte, namelijk de afstand *CC'* van het punt *C* tot het vlak *ABED*.
Omdat de driehoeken *ABD* en *EDB* congruent zijn, zijn de oppervlaktes van de grondvlakken *ABD* en *EDB* gelijk.

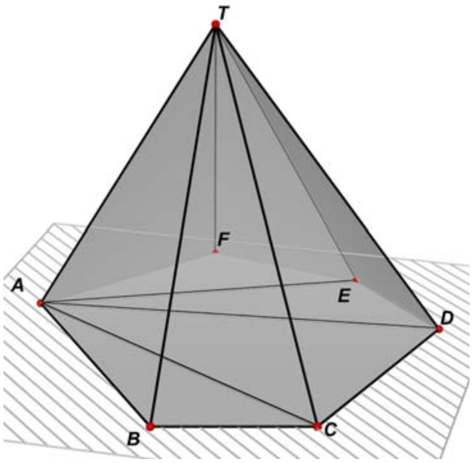
De viervlakken *C.ABD* en *C.EDB* hebben daarmee gelijke grondvlakken en gelijke hoogtes, en dus ook, volgens Stelling 5, gelijke inhouden.
Kiezen we het punt *D* als top van de viervlakken *D.BCE* en *D.FEC*, dan zijn de oppervlaktes van de grondvlakken *BCE* en *FEC* daarvan gelijk. Ook deze viervlakken hebben dezelfde hoogte, namelijk *DD'*, waarbij *D'* de projectie is van het punt *D* op het vlak *BCFE*. Volgens Stelling 5 hebben ook deze viervlakken dus gelijke inhouden.
Het prisma *DEF.ABC* is daarmee opgebouwd uit drie viervlakken die gelijke inhouden hebben.
Dit prisma en het viervlak *ABCD* hebben hetzelfde grondvlak (namelijk *ABC*) en dezelfde hoogte (*DH*, waarbij *H* de projectie is van het punt *D* op vlak *ABC*).
Met $\boldsymbol{G} = O(ABC)$ en $h = DH$ hebben we dan inderdaad:

$$I\,(ABCD) = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{G}h$$ ♦

Een gevolg van Stelling 6 is:

Stelling 7. *De inhoud van een piramide is gelijk aan* $\frac{1}{3}\boldsymbol{G}h$.

figuur 8



Bewijs. Een willekeurig *n*-zijdige piramide *T.ABCD…* kan worden verdeeld in (*n*–2) viervlakken die alle dezelfde top hebben als de piramide: *T.ABC*, *T.ACD*, …
De (*n*–2) grondvlakken van deze viervlakken, *ABC*, *ACD*, …, vormen samen het grondvlak ***G*** van de piramide.
De inhouden van deze viervlakken vormen samen de inhoud van de piramide.
Waarmee de stelling is aangetoond.

En met Stelling 7 is dus de tweede in Opmerking 1 genoemde - en daar nog als onbewezen gekenschetste - eigenschap inderdaad bewezen.

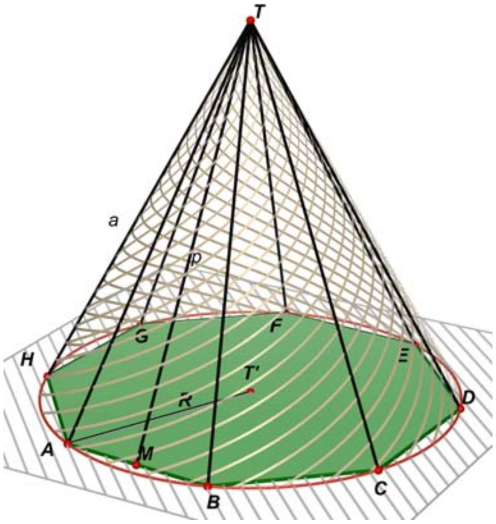
3. De oppervlakte van een bol

Om de formule voor de oppervlakte van een bol zonder integraalrekening af te leiden bewijzen we eerst een tweetal stellingen over andere ruimtelijke lichamen, uiteraard ook zonder integraalrekening. Ten eerste:

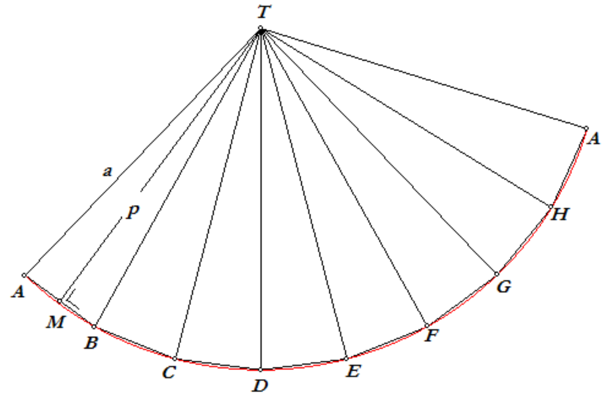
Stelling 8. *De oppervlakte van het manteloppervlak van een recht kegelvlak is gelijk aan:* $\pi \boldsymbol{R} a$
*Daarbij is **R** de straal van de grondcirkel en a de lengte van een beschrijvende van het manteloppervlak.*

Bewijs. We gaan uit van een kegelvlak met top *T*. Bij een recht kegelvlak valt de projectie van *T* dan samen met het middelpunt *T'* van de grondcirkel (***zie figuur 9a***). In die cirkel beschrijven we een regelmatige *n*-hoek, waarvan we in eerste instantie de oppervlakte *O'* van de *n* congruente zijvlakken *TAB*, *TBC*, … berekenen.
We doen dit door de zijvlakken ‘naast’ elkaar te leggen (via een *uitslag* of *netwerk* van de ingeschreven piramide *T.ABC…*); ***zie figuur 9b***.

figuur 9a



figuur 9b



Voor O' hebben we nu: $O' = n \cdot (\frac{1}{2}\, p \cdot AB) = \frac{1}{2}\, p \cdot (n \cdot AB)$

waarbij p de lengte is van de loodlijn TM uit T op een zijde van de n-hoek (M is het midden van AB).

De oppervlakte O van het manteloppervlak van het kegelvlak is dan de limiet van O' als n onbegrensd toeneemt. Daarbij nadert $n \cdot AB$ tot de omtrek van de grondcirkel, dus tot $2\pi\boldsymbol{R}$, en nadert p tot de lengte van de beschrijvende, dus tot a.

Zodat: $O = \frac{1}{2}\, a \cdot 2\pi\boldsymbol{R} = \pi\boldsymbol{R}\, a$ ♦

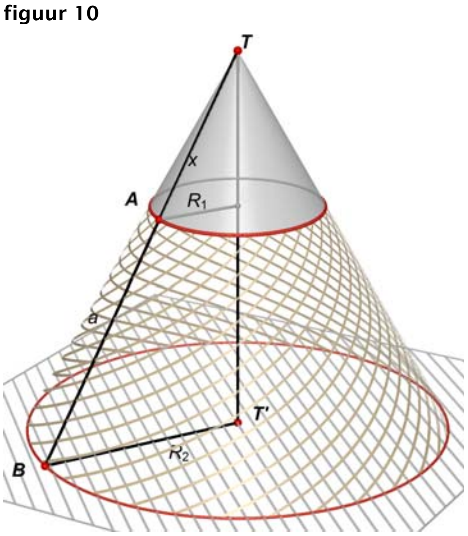
Vervolgens bewijzen we:

Stelling 9. *De oppervlakte van een afgeknot recht kegelvlak is gelijk aan:*

$$\pi a \cdot (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)$$

Daarbij a is de lengte is van een beschrijvende van het afgeknotte kegelvlak en zijn $\boldsymbol{R}_1$ en $\boldsymbol{R}_2$ de lengtes van de stralen van het boven- en ondervlak.

figuur 10



Bewijs. We gaan uit van een recht kegelvlak met top T waarvan de straal van de grondcirkel (middelpunt T') gelijk is aan $\boldsymbol{R}_2$ en de lengte van een beschrijvende gelijk aan $TB = x + a$.

Het kegelvlak met beschrijvende $TA = x$ heeft een grondcirkel (middelpunt U) met straal $\boldsymbol{R}_1$.

Voor de manteloppervlakte O van het afgeknotte kegelvlak geldt dan, volgens Stelling 8:

$$O = \pi\boldsymbol{R}_2(x + a) - \pi\boldsymbol{R}_1 x = \pi \cdot (\boldsymbol{R}_2 a + x(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1))$$

Nu zijn de driehoeken TAU en TBT' gelijkvormig (*hh*), zodat:

$$TA : TB = UA : T'B$$

of: $x : (x + a) = \boldsymbol{R}_1 : \boldsymbol{R}_2$

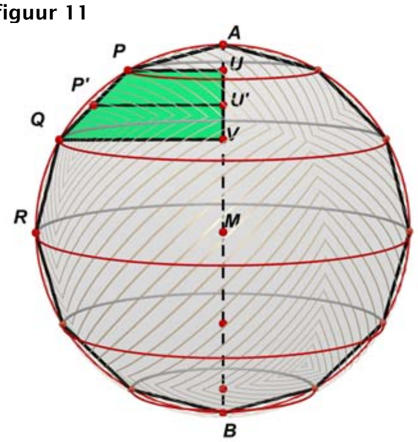
En dan is: $\boldsymbol{R}_2 x = \boldsymbol{R}_1 x + \boldsymbol{R}_1 a$ of $x(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1) = \boldsymbol{R}_1 a$

en dus: $$O = \pi \cdot (R_2 a + R_1 a) = \pi a \cdot (R_1 + R_2)$$ ♦

We hebben nu voldoende middelen voor het bewijs van:

Stelling 10. *De oppervlakte van een bol met straal* $\boldsymbol{R}$ *is gelijk aan* $4\pi \boldsymbol{R}^2$.

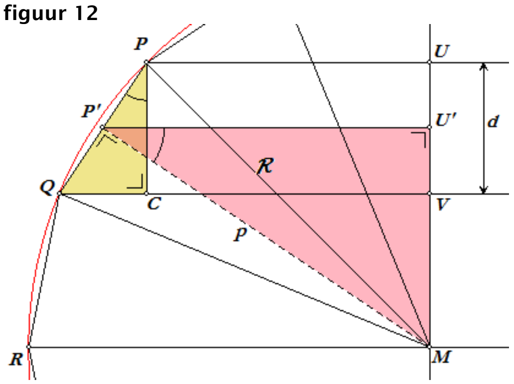
figuur 11



Bewijs. We kiezen bij een grote cirkel [6] van de bol een in die cirkel ingeschreven regelmatige $2n$-hoek $APQ\ldots B\ldots$ die wordt gewenteld om de middellijn die door de hoekpunten A en B van de $2n$-hoek gaat; ***zie figuur 11***.
Als n onbegrensd toeneemt, nadert de oppervlakte van het gewentelde lichaam tot de oppervlakte O van de bol.
Om de limiet te kunnen berekenen brengen we door twee opeenvolgende hoekpunten van de $2n$-hoek (hier P en Q) vlakken aan loodrecht op de middellijn AB (snijpunten U en V) die de bol snijden volgens parallelcirkels.

De oppervlakte O' van het manteloppervlak van het afgeknotte (rechte) kegelvlak dat beschreven wordt door het trapezium $PQVU$, is volgens Stelling 9 te berekenen:
$$O' = \pi \cdot PQ \cdot (PU + QV)$$
Zijn P' en U' de middens van PQ en UV, dan is $2 \cdot P'U' = PU + QV$ (*middenparallel in een trapezium*). Dus: $$O' = 2\pi \cdot \boldsymbol{PQ \cdot P'U'}$$

figuur 12



Is nu C de projectie van P op QV (***zie figuur 12***).
De benen van hoek P in driehoek PQC en van hoek P' in driehoek $P'MU'$ staan loodrecht op elkaar. Die hoeken zijn dan aan elkaar gelijk.
De rechthoekige driehoeken PQC en $P'MU'$ zijn dus gelijkvormig (*hh*), zodat:
$$P'U' : PC = MP' : QP$$
of: $$\boldsymbol{PQ \cdot P'U'} = PC \cdot MP'$$
Nu is $PC = UV = d$ (d is de afstand tussen twee opvolgende evenwijdige loodvlakken).

Stellen we $MP' = p$, dan is daarmee:: $$O' = 2\pi \cdot d \cdot p \qquad (*)$$
Sommatie over de n middelpuntsdriehoeken 'links' van AB, zoals driehoek MPQ, geeft dan als oppervlakte van het lichaam dat bestaat uit n afgeknotte (rechte) kegelvlakken:
$$\Sigma\, O' = 2\pi p \cdot (n \cdot d) = 2\pi p \cdot AB = 4\pi p \cdot \boldsymbol{R}$$
Als n onbegrensd toeneemt, nadert p tot $\boldsymbol{R}$. Dus hebben we voor de oppervlakte O van de bol:
$$O = 4\pi \boldsymbol{R}^2$$ ♦

En daarmee is ook de eerste in Opmerking 1 vermelde eigenschap bewezen.

Uit het bewijs van Stelling 10 volgt eenvoudig:

Stelling 11. *De oppervlakte van een bolsector met hoogte* h *van een bol met straal* $\boldsymbol{R}$ *is gelijk aan:* $2\pi \boldsymbol{R}\, h$

Bewijs. We sommeren hier bijvoorbeeld over de middelpuntshoeken van hoekpunt A tot en met het hoekpunt Q van de regelmatige $2n$-hoek.
Stel dat er in dit geval k middelpuntshoeken zijn. De hoogte h van de bolsector (***zie figuur 11***) is daarbij gelijk aan $AV = k \cdot d$. Uitdrukking (*) leidt dan na sommatie en limietovergang tot $O = 2\pi \boldsymbol{R}\, h$. ♦

---

4. Noten

[1] In enkele bewijzen worden limietovergangen voor n naar oneindig ('*n neemt onbegrensd toe*') gebruikt. Sommigen vinden dat dergelijke beschouwingen *wel* behoren tot de integraalrekening (cq. de infinitesimaalrekening).
Zie voor een afleiding van de formules met behulp van de integraalrekening:
Dick Klingens (2008): *Oppervlakte van een bol, bolsegment en bolschijf*. Op:
« *www.pandd.nl/stereo/oppbol.htm* » (website van de auteur).

[2] Zie voor het bewijs bijvoorbeeld:
Dick Klingens (2005): *De bol*. Op:
« *www.pandd.nl/stereo/bol.htm* » (website van de auteur).

[3] Als we spreken over de 'oppervlakte van een bol' dan bedoelen we met *bol* eigenlijk het *bolvlak*. De begrippen 'bol' en 'bolvlak' worden, zoals tegenwoordig gebruikelijk, ook in dit artikel met elkaar geïdentificeerd.

[4] Zie voor enkele andere axioma's en definities:
Dick Klingens (2005): *Overzicht Stereometrie / Ruimtemeetkunde*. Op:
« *www.pandd.nl/stereo/overzichtstereo.htm* » (website van de auteur).

[5] Met $I\,(ABCD)$ en $O\,(XYZ)$ bedoelen we in hetgeen volgt de functies die aan het lichaam $ABCD$ cq. aan de gesloten vlakke figuur XYZ de inhoud I cq. de oppervlakte O toevoegen.

[6] Een 'grote cirkel' van een bol is een cirkel op de bol die gelegen is in een vlak door het middelpunt van de bol.