# Stelling van Pappos

**[ Dick Klingens ]**

We bewijzen allereerst de volgende stelling.

**Stelling** (**Menelaos**, 70-130, Egypte)
*Als een lijn de (verlengden van de) zijden AB, BC, CA van driehoek ABC in de punten P, Q, R snijdt, dan geldt:*
$(ABP)(BCQ)(CAR) = 1$

***Opmerkingen***

*a.* Zo'n snijlijn wordt wel **transversaal** van de driehoek genoemd.
*b.* Met ($ABP$) wordt bedoeld de zogenoemde **deelverhouding** $PA/PB$, waarbij $PA/PB$ negatief gerekend wordt als $P$ op het lijnstuk $AB$ ligt.

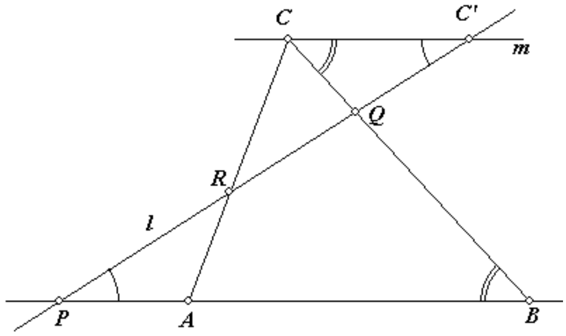
***Bewijs:***
De transversaal $l$ snijdt de lijn $m$ (door $C$ evenwijdig met $AB$) in het punt $C'$.
Nu is: $PBQ \sim C'CQ$ ($hh$), waaruit volgt:

$\boldsymbol{PB} : C'C = QB : QC$

Ook: $RAP \sim RCC'$ ($hh$), zodat

$\boldsymbol{PA} : C'C = RA : RC$

Nu is:

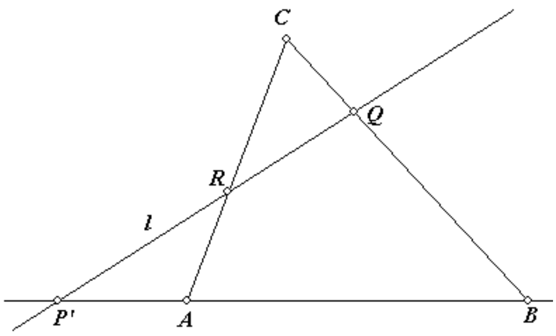



$$\begin{aligned}(ABP)(BCQ)(CAR) &= PA/PB\cdot(BCQ)(CAR)\\ &= RA/QB\cdot QC/RC\cdot(-QB/QC)\cdot(-RC/RA)\\ &= 1\end{aligned}$$

□

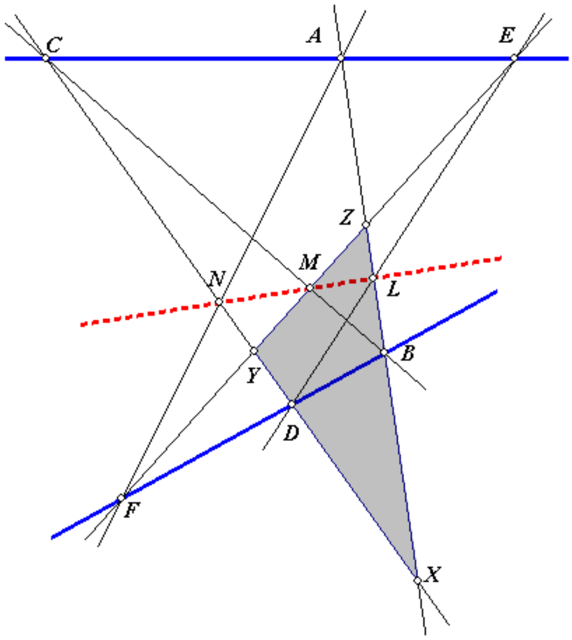
**Omgekeerde stelling**
*Als voor de punten P, Q, R van de zijden AB, BC, CA van driehoek ABC geldt dat (ABP)(BCQ)(CAR) = 1, dan zijn de punten P, Q, R collineair.*

***Bewijs:***
Stel de lijn $QR$ snijdt de lijn $AB$ in $P'$ (en dus niet in $P$).
Volgens de stelling van Menelaos geldt dan:
$(ABP')(BCQ)(CAR) = 1$
Volgens het gegeven is $(ABP)(BCQ)(CAR) = 1$, zodat
$(ABP) = (ABP')$
waaruit volgt dat $P$ samenvalt met $P'$.
De punten $Q$, $R$ en $P$ liggen dus op één lijn. □




**Stelling** (**Pappos**, ±300 n. Chr., Egypte)
*Als van een zeshoek de hoekpunten afwisselend liggen op twee rechte lijnen, dan zijn de snijpunten van overstaande zijden collineair.*

In onderstaande figuur gaan we uit van de zeshoek ***ABCDEF***, waarvan $A$, $C$, $E$ en $B$, $D$, $F$ collineair zijn.




Verder is in die figuur[1]:

$AB \wedge DE = L$, $BC \wedge EF = M$, $CD \wedge FA = N$

We moeten dus bewijzen, dat $L$, $M$, $N$ collineair zijn.

Zij nu verder: $AB \wedge CD = X$, $CD \wedge EF = Y$, $EF \wedge AB = Z$.

We bekijken driehoek $XYZ$ met opvolgend de transversalen $DE$, $FA$ en $BC$. Volgens de stelling van Menelaos geldt dan:

(1) $(XZL)(ZYE)(YXD) = 1$

(2) $(XZA)(ZYF)(YXN) = 1$

(3) $(XZB)(ZYM)(YXC) = 1$

Vermenigvuldiging van de linker en rechter leden van (1), (2), (3) geeft dan:

(4) $$\frac{LX}{LZ}\cdot\frac{EZ}{EY}\cdot\frac{DY}{DX}\cdot\frac{AX}{AZ}\cdot\frac{FZ}{FY}\cdot\frac{NY}{NX}\cdot\frac{BX}{BZ}\cdot\frac{MZ}{MY}\cdot\frac{CY}{CX}=1$$

Of na ordening:

(5) $$\frac{LX}{LZ}\cdot\frac{MZ}{MY}\cdot\frac{NY}{NX}\cdot\frac{AX}{AZ}\cdot\frac{EZ}{EY}\cdot\frac{CY}{CX}\cdot\frac{BX}{BZ}\cdot\frac{FZ}{FY}\cdot\frac{DY}{DX}=1$$

Maar ook de lijnen $ACE$ en $BDF$ kunnen optreden als transversaal van driehoek $XYZ$, zodat dus ook geldt:

(6) $(XZA)(ZYE)(YXC) = 1$ en $(XZB)(ZYF)(YXD) = 1$

Uit (5) en (6) vinden we dan:

(7) $$\frac{LX}{LZ}\cdot\frac{MZ}{MY}\cdot\frac{NY}{NX}=1$$

of

(8) $(XZL)(ZYM)(YXN) = 1$

waaruit dan volgens de omgekeerde stelling van Menelaos blijkt, dat de punten $L$, $M$, $N$ collineair zijn. □

---

[1] Met $AB \wedge CD = X$ bedoelen we het snijpunt $X$ van de lijnen $AB$ en $CD$.