De raaklijn aan een kegelsnede

We laten de afleiding van een vergelijking van de raaklijn in een punt van een kegelsnede aan die kegelsnede hieronder zien voor de **ellips**.

Zij

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=1$$

een vergelijking van de ellips.
We kiezen twee punten $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$ op de ellips en bepalen een vergelijking van de lijn door die twee punten:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$

Daar de punten op de ellips liggen hebben we ook:

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}=1 \text{ en } \frac{x_2^{\,2}}{a^2}+\frac{y_2^{\,2}}{b^2}=1$$

Aftrekking van beide gelijkheden geeft:

$$\frac{y_2^{\,2}-y_1^{\,2}}{b^2}=-\frac{x_2^{\,2}-x_1^{\,2}}{a^2}$$

zodat we via ontbinding van de tellers krijgen:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a(y_2+y_1)}$$

Dit is de richtingscoëfficiënt van de lijn P_1P_2 (zie de vergelijking van P_1P_2 hierboven).
Hiermee gaat die vergelijking dus over in:

$$y-y_1=-\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}(x-x_1)$$

Door nu het punt P_2 met het punt P_1 te laten samenvallen (kies $x_2 = x_1$ en $y_2 = y_1$) vinden we de raaklijn in het punt P_1.
De vergelijking van de lijn P_1P_2 gaat daardoor over in:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$a^2y_1y-a^2y_1^{\,2}=-b^2x_1x+b^2x_1^{\,2}$$

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^{\,2}+a^2y_1^{\,2}$$

Delen we nu beide kanten van de laatste vergelijking door a^2b^2, dan vinden we

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}$$

Daar P_1 op de ellips ligt, is het rechter lid van deze vergelijking gelijk aan 1 (we zagen dat al eerder).
Zodat

$$\frac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}^2}=1$$

een vergelijking is van de raaklijn in het punt (x_1, y_1) aan de ellips.