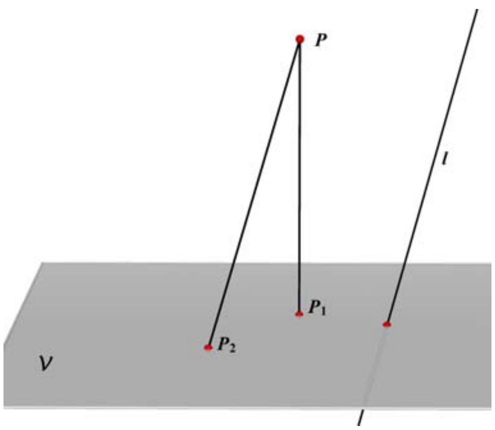
Scheve projectie

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (NL)
oktober 2008

1. Afbeelden

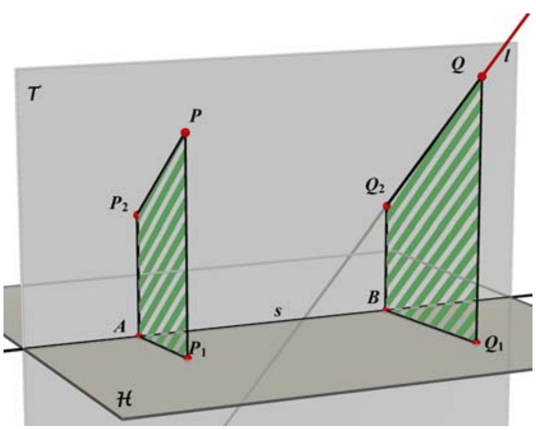
Om een juiste indruk (afdruk, of een juist beeld) van 3-dimensionale figuren te krijgen (hetzij op papier, hetzij op beeldscherm) is het noodzakelijk deze figuren af te beelden (te projecteren) op een plat vlak. In hetgeen volgt wordt de belangrijkste afbeeldingsmethode behandeld: de **scheve projectie**.

Definities
1. Onder de **orthogonale projectie** P_1 van een punt P op een vlak $\mathcal{V}$ verstaan we het voetpunt van de loodlijn uit P op $\mathcal{V}$.
2. Doorloopt het punt P een ruimtelijke figuur $\mathcal{L}$, dan is de meetkundige plaats van de orthogonale projectie P_1 van P de orthogonale projectie van de figuur $\mathcal{L}$.



De orthogonale projectie behoort tot de klasse van zogenoemde *parallelprojecties*.
Het is ook mogelijk een figuur $\mathcal{L}$ op een vlak $\mathcal{V}$ te projecteren met lijnen die een vaste richting hebben (niet loodrecht op $\mathcal{V}$). Een dergelijke projectie noemen we **scheve projectie** (ook wel **scheve parallelprojectie**).
De vaste projectierichting wordt meestal bepaald door een rechte lijn of door het geven van een ruimtelijk punt P en het daarbij behorende beeldpunt P_2 in het platte vlak $\mathcal{V}$.

We gebruiken bij de afbeeldingen twee loodrecht op elkaar staande vlakken $\mathcal{H}$, het **horizontale vlak**, en $\mathcal{T}$, het **tafereel**. We bekijken dan een orthogonale projectie op $\mathcal{H}$ en een scheve projectie op $\mathcal{T}$.



In de figuur hiernaast is de scheve projectie in de richting van de lijn l (bepaald door Q niet in $\mathcal{H}$ of $\mathcal{T}$, en Q_2 wel in $\mathcal{T}$) ook toegepast op het punt P.
De lijn s is de snijlijn van de vlakken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$.

De orthogonale projectie van P op $\mathcal{H}$ is P_1 en de scheve projectie van P op $\mathcal{T}$ is P_2.
Nu is:

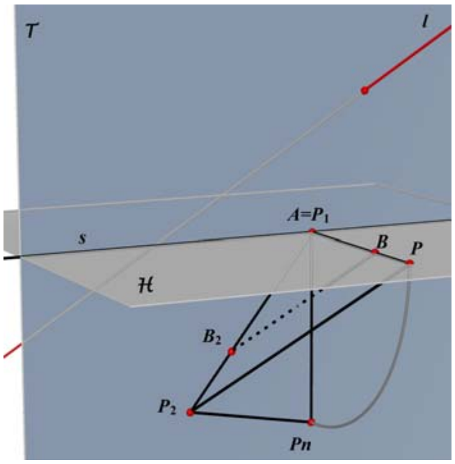
$$PP_1 \perp \mathcal{H} \text{ en } QQ_1 \perp \mathcal{H}, \text{ zodat } PP_1 \,//\, QQ_1$$

De punten A en B liggen zó op de snijlijn s van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$, dat: $P_1A \perp s$ en $Q_1B \perp s$

De lijn s staat daarmee loodrecht op de vlakken AP_1PP_2 en BQ_1QQ_2, waardoor die vlakken evenwijdig zijn.

2. Van $\mathcal{H}$ naar $\mathcal{T}$

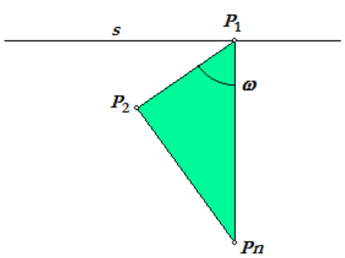
We zullen in eerste instantie alleen scheve projecties bekijken van punten van $\mathcal{H}$ op $\mathcal{T}$.
Daarbij introduceren we een tweede afbeelding van $\mathcal{H}$ op $\mathcal{T}$, namelijk een rotatie (over 90°) van de punten van $\mathcal{H}$ om de snijlijn s van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$ (het roteren wordt ook wel *neerslaan* genoemd).



Het beeldpunt van het punt P, gelegen in het vlak $\mathcal{H}$ bij deze rotatie geven we aan met P_n, en de projectie van P op de snijlijn s van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$ met P_1.
Merk op dat hierdoor $PP_1 = P_1P_n$.
Het beeldpunt van P bij de scheve projectie op $\mathcal{T}$ geven we aan met P_2.

Het scheve beeld B_2 van een punt B van PP_1 is te vinden als snijpunt van het vlak $\mathcal{T}$ met een lijn die evenwijdig is met l.
Deze projecterende lijn is gelegen in het vlak PP_1P_2.

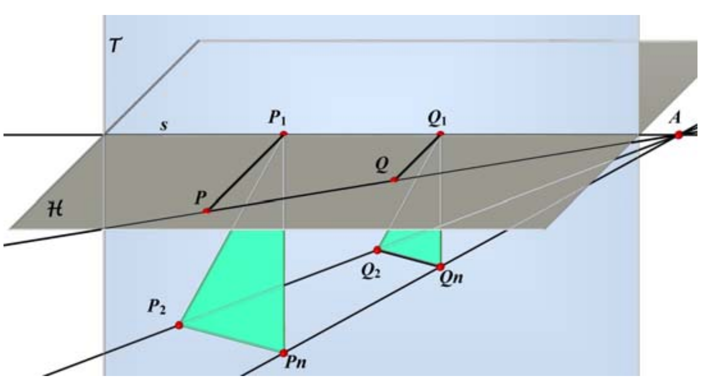
De scheve projecties van de punten van de lijn PP_1 liggen dus op de lijn P_1P_2.



In de figuur hiernaast is alleen het vlak $\mathcal{T}$ weergegeven met daarin de lijn s en de punten P_1, P_n en P_2.
Driehoek $P_1P_2P_n$ is de **projectiedriehoek** van het punt P, de breuk $k = \frac{P_1P_2}{P_1P_n}$ is de **verkortingsverhouding** en de hoek $P_nP_1P_2$ is de zogenoemde **wijkhoek**, vaak ook aangegeven met ω.

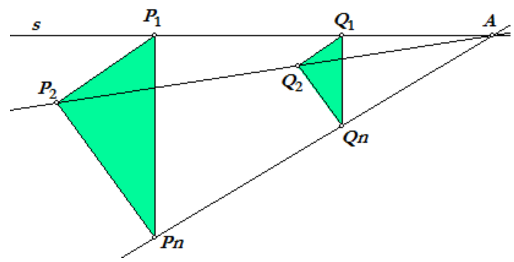
De projectierichting van de scheve projectie van een punt P in $\mathcal{H}$ kan nu op de volgende manieren worden aangegeven:

- we geven de ‘neergeslagen’ projectie P_n van punt P samen met de scheve projectie P_2 ervan;
- we geven de projectiedriehoek van P ;
- we geven de wijkhoek ω en de verkortingsverhouding k.



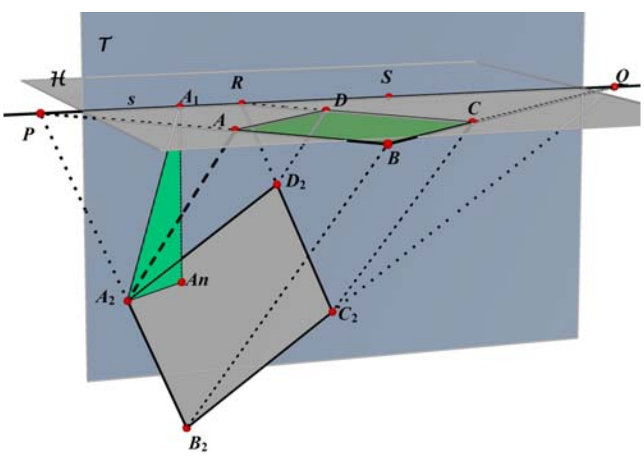
Wanneer we twee punten P en Q van $\mathcal{H}$ scheef projecteren op $\mathcal{T}$, dan hoort bij elk van die punten natuurlijk een projectiedriehoek. We zullen hieronder laten zien dat die driehoeken gelijkvormig zijn.
En daaruit volgt dan dat voor elk punt van $\mathcal{H}$ bij de scheve projectie van $\mathcal{H}$ op $\mathcal{T}$ dezelfde waarden van k en ω horen.

In de figuur hierboven snijdt de lijn PQ de snijlijn s van de vlakken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$ in het punt A.
Bij de scheve projectie van PQ gaat het beeld P_2Q_2 van PQ uiteraard door A (het punt A wordt op zichzelf afgebeeld). De neergeslagen projectie P_nQ_n van PQ gaat natuurlijk ook door A.
We hebben reeds eerder gezien dat de vlakken PP_1P_2 en QQ_1Q_2 evenwijdig zijn. Daaruit volgt dan:
$$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$$



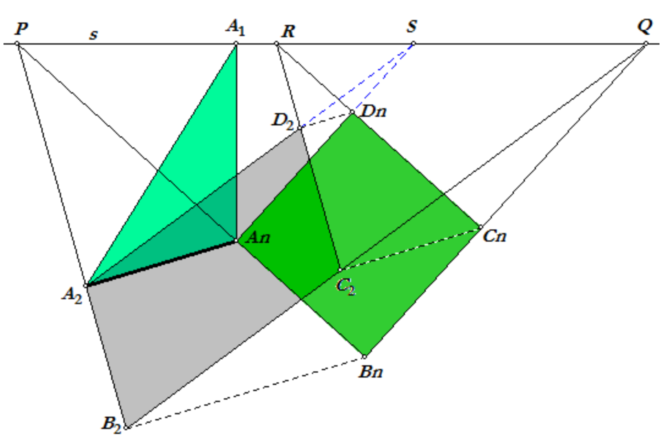
Omdat de zijden van de driehoeken PP_1P_2 en QQ_1Q_2 twee aan twee evenwijdig zijn volgt ook direct:
$$\Delta PP_1P_2 \sim \Delta QQ_1Q_2 \; (hh)$$
zodat:
$$\frac{P_1P_2}{PP_1} = \frac{Q_1Q_2}{QQ_1}, \text{ en dus ook: } k = \frac{P_1P_2}{P_1P_n} = \frac{Q_1Q_2}{Q_1Q_n}$$
De verkortingsverhoudingen bij de scheve projectie van de punten P en Q zijn dus gelijk.
Omdat $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ en $P_1P_n \parallel Q_1Q_n$, zijn ook de hoeken $P_nP_1P_2$ en $Q_nQ_1Q_2$ gelijk, zodat inderdaad:
$$\Delta P_nP_1P_2 \sim \Delta Q_nQ_1Q_2 \; (zhz)$$

3. De scheve projectie van een vierkant



We bekijken vervolgens de scheve projectie op het vlak $\mathcal{T}$ van een vierkant $ABCD$ dat gelegen is in het vlak $\mathcal{H}$.

We hebben gezien dat de snijpunten van de 'overeenkomstige' zijden van origineel en scheve projectie op de lijn s liggen:
$$P = AB \,\&\, A_2B_2,\quad Q = BC \,\&\, B_2C_2$$
$$R = CD \,\&\, C_2D_2,\quad S = DA \,\&\, D_2A_2$$



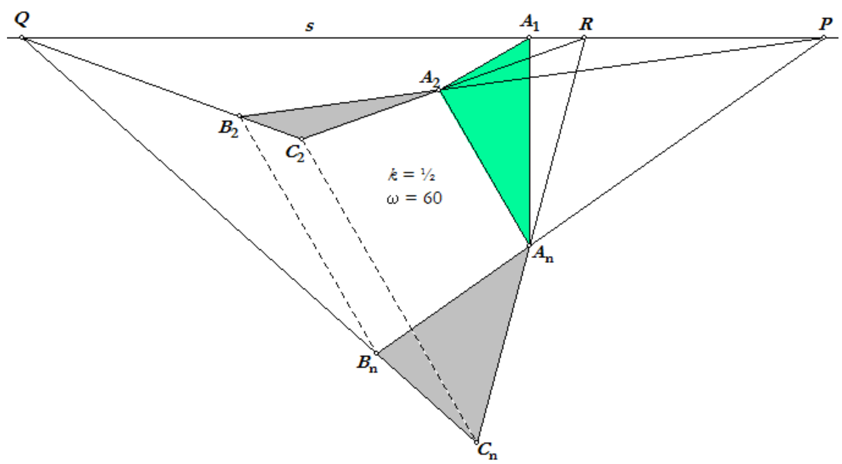
Wanneer we het vierkant $ABCD$ in grootte en ligging gegeven denken in het vlak $\mathcal{T}$ (in de figuur hiernaast als $A_nB_nC_nD_n$), dan hebben we in dat vlak een configuratie als in de hiernaast staande figuur.

Is $A_nB_nC_nD_n$ het in $\mathcal{H}$ vastgelegde en in $\mathcal{T}$ neergeslagen gegeven vierkant, en is ook het punt A_2 gegeven, dan kunnen we het punt B_2 construeren door het snijpunt P van A_nB_n met s te verbinden met A_2 en B_nB_2 evenwijdig met A_nA_2 te trekken.
Het punt C_2 vinden we door het snijpunt Q van B_nC_n met s te verbinden met B_2 en C_nC_2 evenwijdig met A_nA_2 te trekken. Analoog vinden we het punt D_2 via het punt R.
Op basis van deze constructie is nu eenvoudig in te zien dat de scheve projectie $A_2B_2C_2D_2$ van $ABCD$ een parallellogram is.
Het snijpunt S van de lijnen A_nD_n en A_2D_2 ligt uiteraard ook op de lijn s.

Voorbeeld

Construeer de scheve projectie van driehoek ABC (in $\mathcal{H}$ gelegen) op $\mathcal{T}$ waarbij
$k = ½$ en $\omega = 60°$.

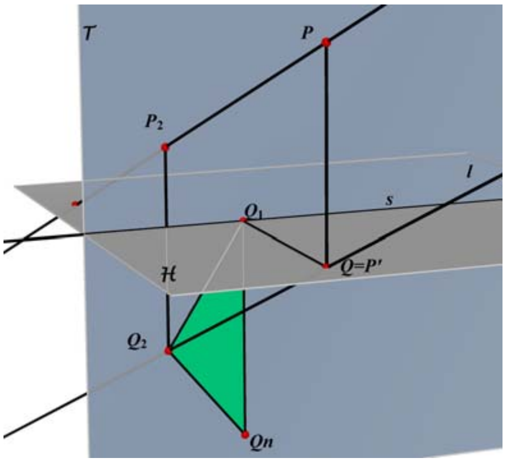
Omdat de driehoek gelegen is in $\mathcal{H}$, kunnen we uitgaan van de in $\mathcal{T}$ liggende (neergeslagen) driehoek $A_nB_nC_n$.
Bij het punt A_n construeren we nu allereerst de projectiedriehoek $A_nA_1A_2$ door A_nA_1 loodrecht op de lijn s te tekenen en $\angle A_nA_1A_2 = 60°$ te maken. Verder is daarbij $A_1A_2 = ½ \cdot A_nA_1$.



Het snijpunt P van A_nB_n met s verbinden we met A_2, evenals het snijpunt R van A_nC_n met s.
De lijn B_nB_2, door B_n evenwijdig met A_nA_2, snijdt dan PA_2 in B_2, en de lijn C_nC_2, door C_n evenwijdig met A_nA_2, snijdt de lijn RA_2 in C_2.

Opmerking. Als controle op de constructie kunnen we ook het snijpunt Q van B_nC_n met B_2C_2 construeren. Het punt Q moet dan op s liggen. ♦

4. Scheve projectie van niet in $\mathcal{H}$ gelegen figuren



We zullen in deze paragraaf allereerst de projectie op $\mathcal{T}$ bekijken van een *niet* in het vlak $\mathcal{H}$ gelegen punt P.

De loodrechte projectie van P op $\mathcal{H}$ is $P' = Q$.

Omdat Q in $\mathcal{H}$ ligt, kunnen we conform het hiervoor behandelde de scheve projectie Q_2 van Q op $\mathcal{T}$ vastleggen; bijvoorbeeld door het geven van de projectiedriehoek $Q_nQ_1Q_2$ van Q in het vlak $\mathcal{T}$.

Omdat de lijn $PP' \equiv PQ$ evenwijdig is met $\mathcal{T}$, geldt voor de projectie P_2Q_2:

$$P_2Q_2 \mathbin{//} PP'$$

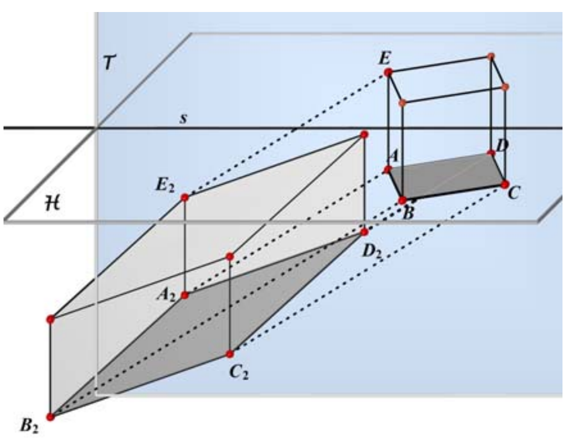
Vierhoek $P'PP_2Q_2$ is daarmee een parallellogram, zodat ook: $P_2Q_2 = PP'$

Is dan de afstand van het punt P tot het vlak $\mathcal{H}$ bekend, dan kunnen we bij gegeven Q_2 de projectie P_2 van P op $\mathcal{T}$ construeren.

Voor de constructie van de scheve projectie op $\mathcal{T}$ van ruimtelijke figuren gaan we er voor punten die niet in $\mathcal{H}$ gelegen zijn, van uit dat de afstand van die punten tot $\mathcal{H}$ uit de overige eigenschappen van de figuur afgeleid kunnen worden.

Voorbeeld 1

Construeer de scheve projectie van de kubus *ABCD.EFGH* waarvan het grondvlak *ABCD* gelegen is in $\mathcal{H}$ en waarbij k = ½ en ω = 60°.



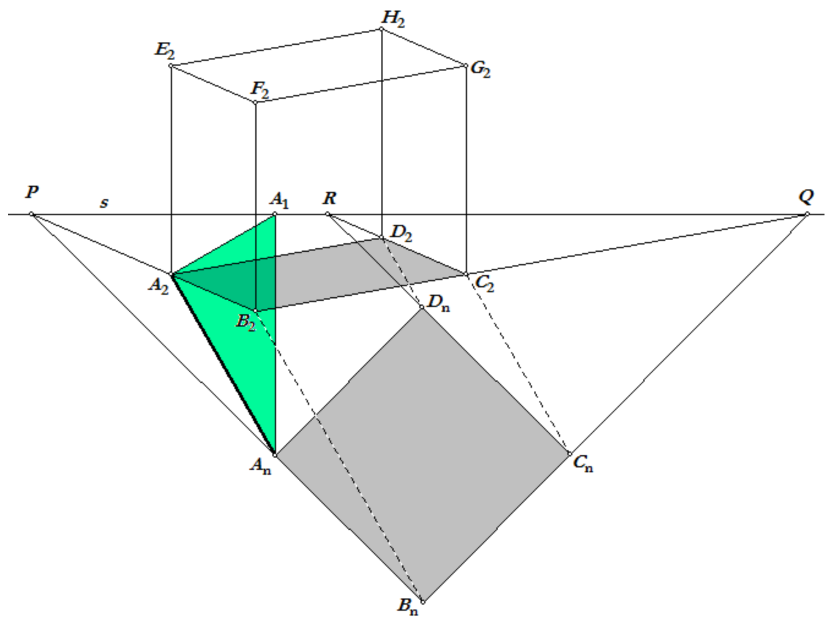
We construeren eerst de scheve projectie van het grondvlak *ABCD*, te weten $A_2B_2C_2D_2$.

Omdat $AE \perp \mathcal{H}$ (en dus ook $\perp s$), is $A_2E_2 \mathbin{//} AE$, zodat $A_2E_2 \perp s$.

En omdat $AE = A_2E_2$ is, kan ook de ligging van het punt E_2 in $\mathcal{T}$ worden geconstrueerd.

Daarna kan de projectie van het bovenvlak worden geconstrueerd, omdat de ribben van het bovenvlak evenwijdig zijn met die van het grondvlak.

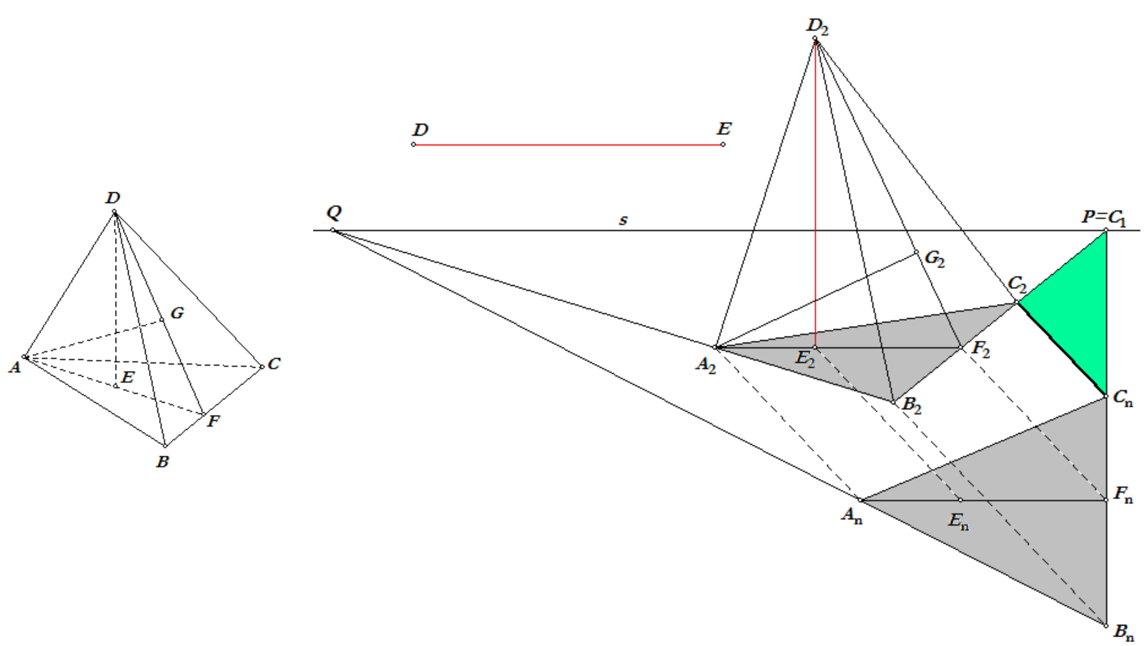
Voor de daadwerkelijke constructie in $\mathcal{T}$ gaan we uit van een in $\mathcal{T}$ gelegen vierkant $A_nB_nC_nD_n$ en de positie van de scheve projectie A_2 van het punt A, die gevonden wordt met behulp van de projectiedriehoek $A_nA_1A_2$ waarvan $\angle A_nA_1A_2 = 60°$ en $k = \frac{A_1A_2}{A_1A_n} = \frac{1}{2}$.



♦

Voorbeeld 2

Construeer de scheve projectie van het viervlak $ABCD$ waarvan het grondvlak ABC in $\mathcal{H}$ ligt, waarbij de projectie E van D op ABC een (gegeven) punt is van de hoogtelijn AF uit A in driehoek ABC (de lengte van het lijnstuk DE is gegeven). De projectierichting is vastgelegd via een projectiedriehoek.
Construeer ook de scheve projectie van de loodlijn AG uit A op het vlak BCD.



We kiezen de ligging van driehoek $A_nB_nC_n$ in $\mathcal{T}$ zo, dat B_nC_n loodrecht staat op de snijlijn s van $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$. Op basis van de projectiedriehoek van het punt C (driehoek $C_nC_1C_2$) kunnen we dan driehoek $A_2B_2C_2$ construeren; daarbij is gebruik gemaakt van de snijpunten P en Q van opvolgend de lijnen B_nC_n en A_nB_n met de lijn s.

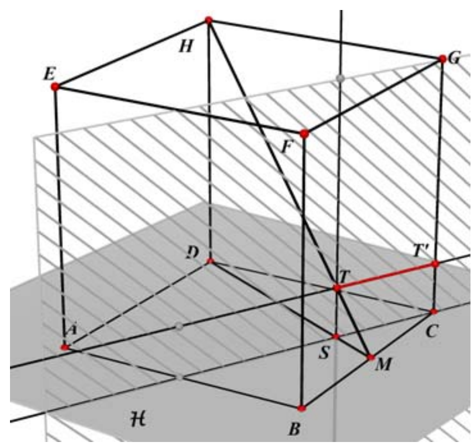
In de stereometrische figuur (hierboven links) is nu $AF \perp BC$ en $DE \perp BC$. De lijn BC staat daardoor loodrecht op het vlak AFD door AF en DE. De loodlijn AG op het vlak BCD is dus ook gelegen in dat vlak, en daarbij is G gelegen op DF.

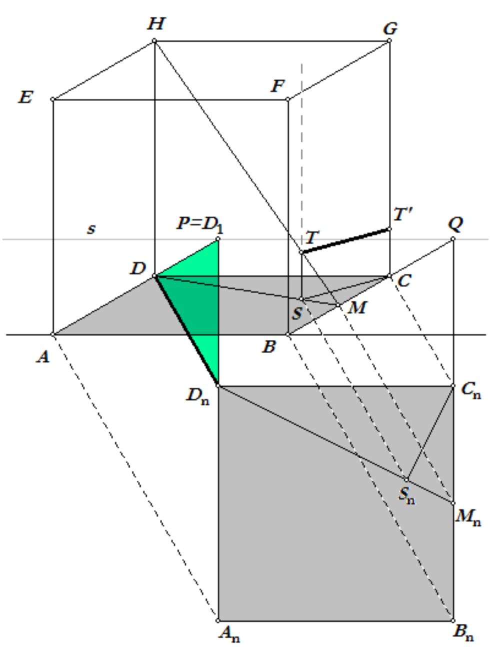
In $\mathcal{T}$ kunnen we nu F_n construeren als voetpunt van de loodlijn uit A_n op B_nC_n (daarbij is A_nF_n // s). Het punt E_n kiezen we dan als gegeven punt op het lijnstuk A_nF_n.
De punten E_2 en F_2 kunnen nu eveneens met behulp van de projectiedriehoek worden geconstrueerd.
Het punt D_2 ligt dan in $\mathcal{T}$ op de loodlijn op s door E_n, en wel zó, dat $D_2E_2 = DE$. Daarmee is de scheve projectie van het viervlak $ABCD$ voltooid.

Omdat A_2F_2 // A_nF_n, is het vlak AFD evenwijdig met de lijn s. Het punt G_2 is dan te construeren als het voetpunt van de loodlijn uit A_2 op D_2F_2 (we zien het vlak AFD in *ware grootte* in de scheve projectie). ♦

Voorbeeld 3
Construeer in een scheve projectiefiguur van de kubus *ABCD.EFGH* het gemeenschappelijke loodlijnstuk, de afstand, TT' van de lijnen CG en HM, waarbij M het midden is van ribbe BC.
Neem daarbij $k = ½$, $\omega = 60°$ en AB // s.

Nb. In de projectiefiguur zijn de indices 2 van de scheve projectie van de kubus in $\mathcal{T}$ weggelaten.





De reeds eerder gebruikte constructiemethode, hier met de projectiedriehoek van het punt D, is toegepast om de scheve projectie te construeren.
Merk daarbij op dat de lijn AB // s, omdat A_nB_n evenwijdig met s gekozen is.

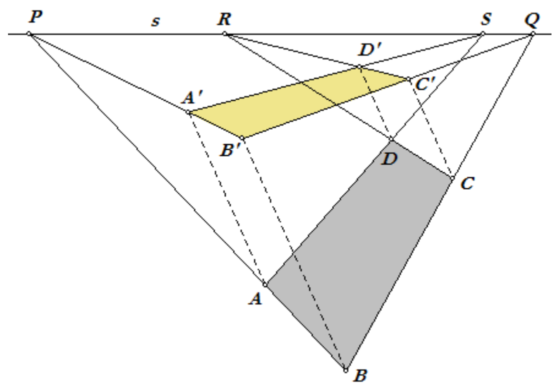
Voor de afstand tussen de lijnen HM en CG projecteren we CG loodrecht op het vlak HDM.
De projectie ST daarvan is dan evenwijdig met CG, omdat CG // HDM.
De lijn door T // SC geeft nu op CG het punt T'.
Het lijnstuk TT' is daarmee de gevraagde afstand tussen de beide kruisende lijnen.

Voor de constructie van de punten S en M is eveneens gebruik gemaakt van de projectiedriehoek van het punt D, uitgaande van de punten S_n en M_n in het vlak $\mathcal{T}$.

Opmerking. De scheve projectie van *ABCD.EFGH* zoals hierboven is weergegeven (met $k = ½$, $\omega = 60°$, AB // s), wordt meestal in de ruimtemeetkunde gebruikt. ♦

5. Tot slot – Affiniteit

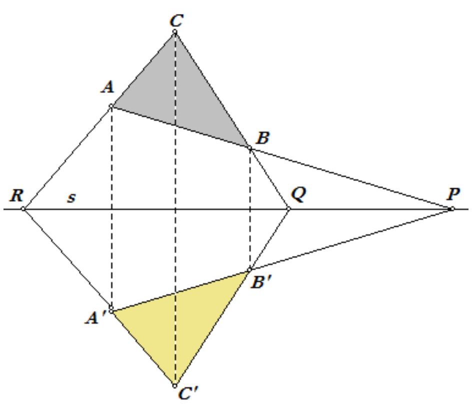
We bekijken de figuren in het vlak $\mathcal{T}$ nu vanuit een iets ander standpunt, namelijk vanuit de *vlakke* meetkunde.
We zien dan dat alle snijpunten (P, Q, …) van de verbindingslijnen (AB & $A'B'$, BC & $B'C'$, …) van ‘overeenkomstige’ punten in $\mathcal{T}$ op dezelfde rechte lijn liggen, namelijk op de lijn s.



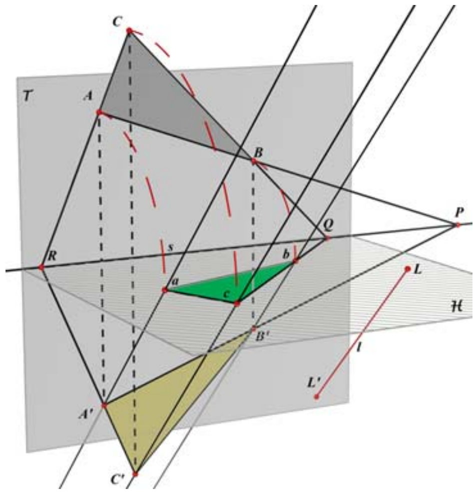
We kunnen overeenkomstige punten opvatten als origineel en beeld van een afbeelding f van het vlak $\mathcal{T}$ op zichzelf: $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, …
en: $f(P) = P, f(Q) = Q$, …
Een dergelijke afbeelding noemen we een **affiniteit** (ook wel **affiene afbeelding** of **collineatie**). De lijn s is in dit verband de zogenoemde **affiniteitsas** (ook wel **collineatieas**).
Eigenschappen van een affiniteit zijn:

- de beelden van twee lijnstukken die gelijk en/of evenwijdig zijn, zijn gelijk en/of evenwijdig;
- een lijn en de beeldlijn daarvan snijden de affiniteitsas in hetzelfde punt;
- een punt van de affiniteitsas wordt op zichzelf afgebeeld.

Voorbeeld



Ook een (vlakke, loodrechte) spiegeling in een lijn s is een affiniteit.
De affiniteitsas van deze afbeelding van $\mathcal{T}$ op $\mathcal{T}$ is hier de spiegelas.
Direct is duidelijk dat de spiegeling de eigenschappen van een affiniteit bezit.



We kunnen de spiegeling ook zien als een scheve projectie. Daartoe vatten we driehoek *ABC* op als de (naar boven) neergeslagen projectie van een driehoek *abc* die gelegen is in het vlak $\mathcal{H}$.
Driehoek *A'B'C'* is dan de scheve projectie van driehoek *abc* waarbij de projecterende lijn *l* loodrecht staat op *s*, een hoek van 45° maakt met $\mathcal{T}$ en 'naar beneden gericht' is.
De spiegelas is de snijlijn *s* van de vlakken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}$. ♦

6. Literatuur

- Dick Klingens (2004): *Affiene afbeeldingen van het vlak op zichzelf*. Op: « *www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm* » (website van de auteur).
- Dick Klingens (2001): *Cabri-werkblad – Scheve lijnspiegeling*. Op: « *www.pandd.demon.nl/werkbladen/schspiegel.htm* » (website van de auteur)
- P. Molenbroek (1934): *Leerboek der stereometrie*. Groningen: P. Noordhoff N.V.
- W.G.J. van Ruth (1965): *Stereometrie*. Utrecht: Het Spectrum.