De wondermooie tuin van de meetkunde

Dick Klingens
februari 2005

Probleem

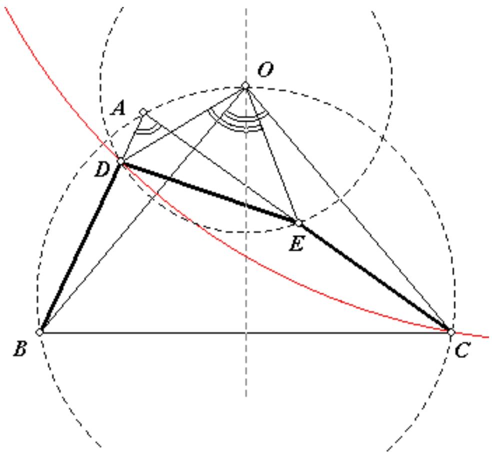
Gegeven een driehoek ABC.
Construeer op de zijden AB en AC van die driehoek opvolgend de punten D en E met $BD = DE = EC$. [1]

We geven hieronder drie oplossingen van dit probleem.

Oplossing 1

Stel dat het probleem is opgelost (**zie figuur 1**).

Figuur 1



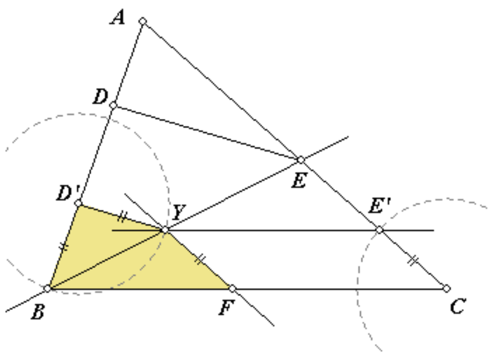
Er is nu een rotatie met centrum O die het lijnstuk DB afbeeldt op het lijnstuk EC. De rotatiehoek van die afbeelding is gelijk aan de hoek α tussen de lijnen AB en AC, de dragers van die lijnstukken (α is dus hoek A van driehoek ABC). Het punt B wordt door de rotatie afgebeeld op het punt C, zodat ook $\angle BOC = \alpha$. Het punt O ligt dus op de boog BAC van de omcirkel van driehoek ABC, én op de middelloodlijn van BC. Driehoek BOC is dus gelijkbenig met tophoek α.
Ook DOE is dan een gelijkbenige driehoek met tophoek α.
In die driehoek is de verhouding $OD : DE$ gelijk aan de verhouding $OB : BC$ in driehoek BOC.
Stel $OB : BC = OD : DE = k$. Dan is het getal k bekend.
Wegens $DE = BD$ is ook: $OD : BD = k$.
Het punt D ligt dan op de *Apollonius-cirkel* van het lijnstuk OB bij de verhouding k. [2]
Het punt D is dus te vinden als snijpunt van die Apollonius-cirkel en het lijnstuk AB.

Opmerking. Deze oplossing komt voor in I.M. Yaglom: *Geometric Transformations I* (New York: Random House, 1962), pp. 132-133.

Oplossing 2

We construeren een vierhoek $BD'YF$ met $BD' = D'Y = YF$ waarbij D' willekeurig is op AB, en E' zo op AC dat $E'C = BD'$ (**zie figuur 2**).

Figuur 2

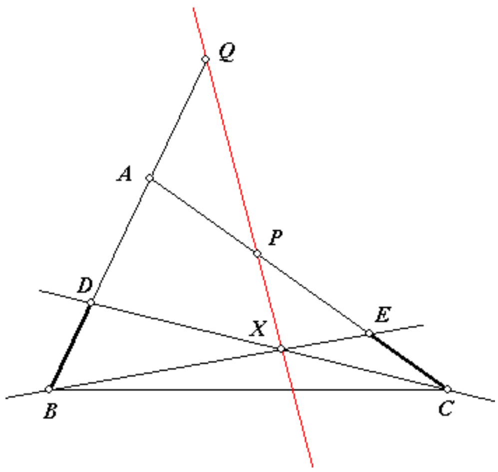


Het punt Y is dan een snijpunt van de cirkel (D', $D'B$) met de lijn door E' evenwijdig met BC. Dan is, als $YF \,//\, AC$, de vierhoek $BD'YF$ gelijkvormig met de gezochte vierhoek $BDEC$. Vervolgens passen we een vermenigvuldiging toe met centrum B. Hierbij ligt het punt Y op een rechte lijn door B. Het snijpunt van deze lijn met AC is dan het gezochte punt E. [3]

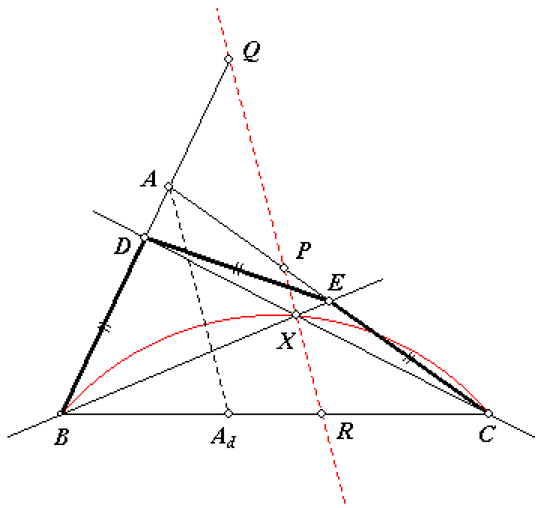
Oplossing 3

We gaan uit van een driehoek ABC waarin $b > c$ (**zie figuur 3**).
We kijken eerst naar de meetkundige plaats van het snijpunt X van BE en CD, bij willekeurige D op de lijn AB en daarbij passend punt E op AC met $BD = EC$. We kijken nog even *niet* naar de lengte van het lijnstuk DE.

Figuur 3



Figuur 4



Twee bijzondere punten van deze meetkundige plaats zijn:
- het punt P op AC, waarbij D samenvalt met A (P is hier dus een 'E - punt'), en
- het punt Q op AB, waarbij E samenvalt met A (Q is hier dus een 'D - punt').
In het eerste geval is dan $PC = BA = c$; in het tweede geval is $BQ = AC = b$.
De punten P en Q zijn eenvoudig op de dragers van de zijden AB en AC te construeren.
Als we met een dynamisch meetkundeprogramma (in dit geval was dat *Cabri Geometry II*) de meetkundige plaats van het punt X bekijken (D doorloopt dan de drager van het lijnstuk AB), lijkt het erop, dat die meetkundige plaats een rechte lijn is – die dus door P en Q gaat.
We gaan er op basis hiervan maar van uit, dat de meetkundige plaats inderdaad een rechte lijn is. Het bewijs geven we later.

In figuur 4 is vervolgens de situatie weergegeven waarbij $BD = DE = EC$.

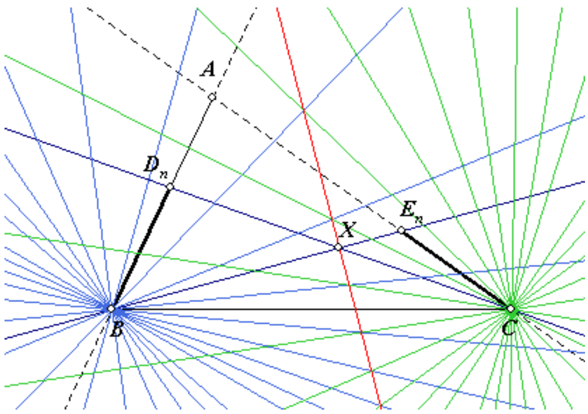
Stel de basishoeken van de gelijkbenige driehoek BDE gelijk aan p en die van de gelijkbenige driehoek CDE gelijk aan q.
Nu is, ook kijkend naar driehoek EXD:
$\angle BXC = \angle EXD = 180° - p - q = 90° + (90° - p - q)$ (*)
Hoek ADE, als buitenhoek van driehoek BDE, is gelijk aan $2p$; hoek AED, als buitenhoek van driehoek CDE, is gelijk aan $2q$. In driehoek ADE hebben we dan: $\angle A = 180° - 2p - 2q$, zodat $½\angle A = 90° - p - q$
Uit (*) volgt: $\angle BXC = 90° + ½\angle A$; met andere woorden: $\angle BXC$ is constant.
Het punt X ligt dus, volgens de stelling van de constante omtrekshoek, op een cirkelboog op de koorde BC. Het middelpunt van die cirkelboog is het snijpunt van de bissectrice van hoek A en de middelloodlijn van het lijnstuk BC. [4]
Het punt X dat bij de gezochte posities van de punten D en E hoort, is dan te construeren als snijpunt van de lijn PQ en de cirkelboog.

Opmerking 1. De lijn PQ is evenwijdig met de bissectrice AA_d van hoek A; immers, driehoek APQ is een gelijkbenige driehoek met opstaande zijden AP en AQ (beide gelijk aan $b - c$).

Opmerking 2. **In figuur 4** snijdt de lijn PQ de zijde BC van driehoek ABC in het punt R. Nu geldt, volgens de bissectricestelling: $BA_d : CA_d = c : b$, zodat $CA_d = \dfrac{b}{b+c} \cdot a = \dfrac{ab}{b+c}$.
Verder is ook (zie Opmerking 1): $CR : CA_d = CP : CA = c : b$, zodat
$CR = \dfrac{CA_d \cdot CP}{CA} = \dfrac{ab}{b+c} \cdot c \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{ac}{b+c}$. En verder is dan $BR = a - \dfrac{ac}{b+c} = \dfrac{ab}{b+c}$, zodat:
$BR : CR = \dfrac{ab}{b+c} : \dfrac{ac}{b+c} = b : c = \dfrac{1}{c} : \dfrac{1}{b}$

Rest ons nu nog aan te tonen dat de meetkundige plaats van de punten X een rechte lijn is.

Figuur 5



We bekijken daartoe de *projectieve* puntenreeksen D_n (op de lijn AB) en E_n (op de lijn AC) met $BD_n = E_nC$; **zie figuur 5**.
De stralenbundels BE_n en CD_n zijn dus ook projectief. De lijn BC is een gemeenschappelijke straal van deze bundels, waaruit volgt dat de bundels *perspectief* zijn.
De snijpunten van overeenkomstige stralen – en dat zijn de punten X – liggen dus op een rechte lijn.
En zoals we al veronderstelden is dat de lijn PQ.

Naschrift

Bovenstaande methoden kunnen worden gebruikt bij de oplossing van het volgende constructievraagstuk: [5]

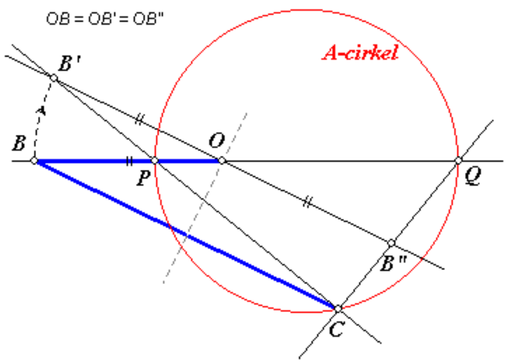
> Driehoek *ABC* heeft zijden *a*, *b*, *c*. Construeer driehoek *ABC* als gegeven zijn hoek *A* en de lijnstukken $c + a$ en $b + a$.

Noten

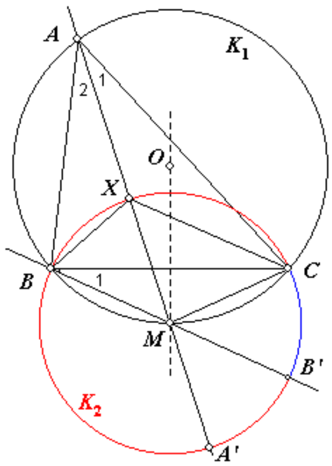
[1] Het probleem is door Jens Desmeth ter oplossing voorgelegd op de **WisFaq**-website als vraag 33714 (zie *http://www.wisfaq.nl/showrecord3.asp?id=33714*).
De titel van dit artikel, *De wondermooie tuin van de meetkunde*, was ook het subject van de door Jens gestelde vraag.

[2] De Apollonius-cirkel van de punten *X*, waarvoor $XO : XB = OB : BC = k$ (bij vaste punten *O* en *B*) is de cirkel met *PQ* als middellijn, waarbij *P* en *Q* de punten zijn die het lijnstuk *OB in- en uitwendig* verdelen in de verhouding $k : 1$. **Zie figuur 6** voor een bijbehorende constructie van de Apollonius-cirkel (*A-cirkel*).

Figuur 6



Figuur 7



De Apollonius-cirkel gaat *in dit geval* door het punt *C*, omdat voor *C* geldt:
$CO : CB = OB : BC = k$ (met $XO : XB = k$; *C* is een '*X*-punt'), immers $CO = OB$, omdat *O* op de middelloodlijn van *BC* ligt.
Voor een uitvoeriger behandeling van de Apollonius-cirkel van een lijnstuk zie verder ook *http://www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm*.

[3] Oplossing 2 is, voorzien van een *CabriJava-applet* en daardoor in een andere vorm, als antwoord gegeven op de WisFaq-vraag (zie [1]).

[4] **Zie figuur 7**. K_1 is de omcirkel van driehoek *ABC*. De bissectrice van hoek *A* snijdt de middelloodlijn van *BC* in het punt *M*. K_1 gaat door *M*, immers $\text{bg}(BM) = \text{bg}(CM)$.
BM snijdt de cirkel K_2 (met middelpunt *M* en door *B*, *C*) in het punt *B'*. Nu is:
$\tfrac{1}{2}\angle A = \angle A_1 = \tfrac{1}{2}\text{bg}(CM) = \angle B_1 = \tfrac{1}{2}\text{bg}(B'C)$. Zodat:
$\angle BXC = \tfrac{1}{2}\text{bg}(BA'C) = \tfrac{1}{2}(180° + \text{bg}(B'C)) = 90° + \tfrac{1}{2}\,\text{bg}(B'C) = 90° + \tfrac{1}{2}\angle A$

[5] Zie ook *http://www.pandd.demon.nl/cirkels/drieconstr.htm#22*.