**WISFAQ 44501**

**Probleemstelling**

Gegeven de ellips met vergelijking $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $m$ gaat door het punt $D$ met coördinaten $(x_1,y_1)$ en raakt aan de ellips.

Bepaal een betrekking tussen $m$, $x_1$, $y_1$.

**Oplossing**

Stel de rechte lijn heeft de vergelijking: $y = mx + q$ .

Deze lijn gaat door het punt $D(x_1,y_1)$, dus $q = y_1 - mx_1$ (deze relatie gebruiken we later!).

We *snijden* de lijn met de ellips: we bepalen de snijpunten. Daartoe elimineren we de '$y$'.
We vinden dan eerst:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+q)^2}{b^2}=1$$

Uitwerken (en ordenen naar $x$) geeft dan voor de $x$-coördinaten van de snijpunten:

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mqx+a^2q^2-a^2b^2=0$$

Omdat de lijn moet raken aan de ellips, vallen de snijpunten samen, en dus is de discriminant van deze laatste vergelijking gelijk aan 0. Dit geeft:

$$4a^4m^2q^2-4a^2(q^2-b^2)(b^2+a^2m^2)=0$$

Allereerst maar delen door $4a^2$ ($a$ is immers ongelijk aan 0):

$$a^2m^2q^2-(q^2-b^2)(b^2+a^2m^2)=0$$

En dan uitwerken van het product van de haakjesvormen:

$$-q^2b^2+b^2a^2m^2+b^4=0$$

We kunnen delen nu door $b^2$, en dat doen we dan ook maar ($b$ is immers ook ongelijk aan 0):

$$a^2m^2-q^2+b^2=0$$

En dan weten we (hierboven gevonden) dat $q = y_1 - mx_1$ . Zodat:

$$a^2m^2-(y_1-mx_1)^2+b^2=0$$

En na het uitwerken van de kwadratische haakjesvorm:

$$a^2m^2-x_1{}^2m^2+2x_1y_1m-y_1{}^2+b^2=0$$

Zodat we, om de richtingscoëfficiënten $m$ van de raaklijnen door $(x_1,y_1)$ aan de ellips te kunnen vinden (het zijn er inderdaad twee), de vergelijking

$$(a^2-x_1{}^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-y_1{}^2=0$$

moeten oplossen!

Deze laatste vergelijking geeft dus ook de gezochte betrekking tussen $m$, $x_1$, $y_1$ (en $a$ en $b$).

**DK**

25-03-2006