Cabri-werkblad

Rond het zwaartepunt van een driehoek

Een bekende eigenschap van de middens van de zijden van een driehoek is de volgende.

Stelling 1 – De verbindingslijn van de middens van twee zijden van een driehoek is evenwijdig met de derde zijde van die driehoek.
Het verbindingslijnstuk is gelijk aan de helft van de evenwijdige zijde.

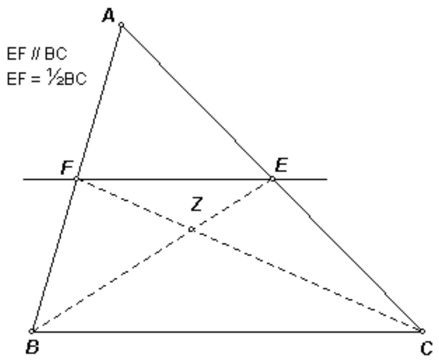
De verbindingslijn wordt wel **middenparallel** van de driehoek genoemd.

Een eigenschap van de *zwaartelijnen* van een driehoek is:

Stelling 2 – De zwaartelijnen delen elkaar (in het zwaartepunt) in stukken die zich verhouden als 2 : 1.

Opgave 1

In de hiernaast staande figuur zijn E en F opvolgend de middens van de zijden CA en AB van driehoek ABC. Het punt Z is het zwaartepunt van ABC.



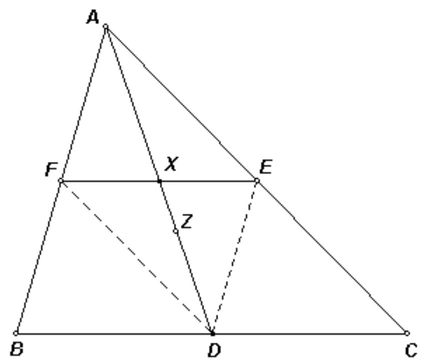
- Waarom zijn de driehoeken BCZ en EFZ gelijkvormig?
- Bewijs hiermee dat $BZ : ZE = 2 : 1$.
- Is hiermee ook bewezen dat een en ander ook geldt voor de zwaartelijn uit het punt A? Geef een korte toelichting op je antwoord.

En verder geldt ook:

Stelling 3 – De zwaartelijn naar een zijde van een driehoek deelt het verbindingslijnstuk van de middens van de beide andere zijden middendoor.

Opgave 2

- Bewijs stelling 3 door aan te tonen dat $EX = FX$, waarbij het punt X het snijpunt is van AD (D is het midden van BC) en EF.
  Aanwijzing – Wat weet je van vierhoek *DEAF*?



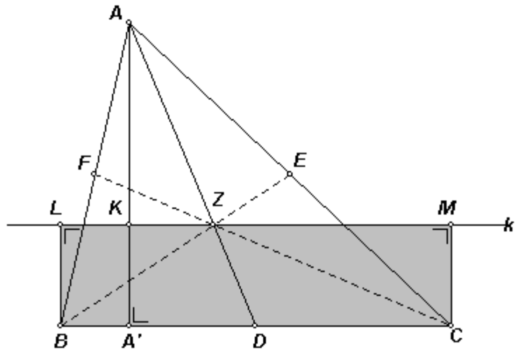
Opgave 3

In bovenstaande figuur is driehoek DEF de zogenoemde *middendriehoek* van driehoek ABC.
Er geldt nu:

Stelling 4 – Een driehoek en z'n middendriehoek hebben hetzelfde zwaartepunt.

- Bewijs dat Z ook het zwaartepunt is van driehoek DEF.

Opgave 4a

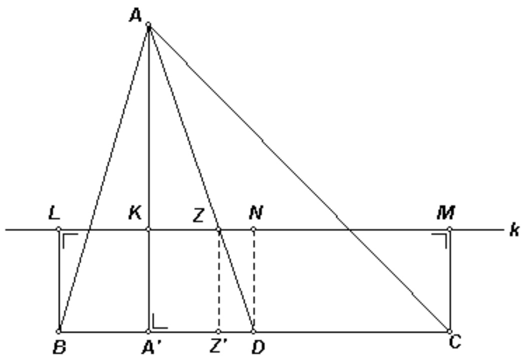


Door het zwaartepunt *Z* van driehoek *ABC* tekenen we een lijn *k* evenwijdig met de zijde *BC*.
Uit de punten *B* en *C* laten we loodlijnen *BL* en *CM* neer op de lijn *k*. De loodlijn uit *A* op *k* snijdt *k* in *K* en *BC* in *A'*. Zo ontstaat er een rechthoek *BCML*.

- Bekijk nu allereerst driehoek *AA'D*.
  Waarom is hierin *AK* : *KA'* = 2 : 1?
- Toon aan dat *AK* = *BL* + *CM*.

Met *V*(*X*) geven we in hetgeen volgt de *oppervlakte* aan van een figuur *X*.
- Bereken *V*(*BCML*) : *V*(*ABC*).

Opgave 4b

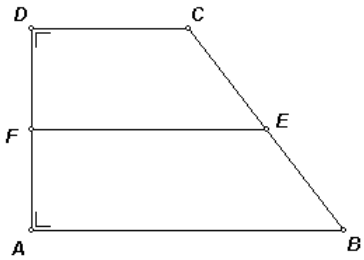


Een tweede, wat verborgen, eigenschap die op de lijn *k* geldt, is:
KZ + *LZ* = *MZ*

- Toon allereerst aan dat $NZ = \frac{1}{2}KZ$.

We noemen |*LK*| = *p*, |*KZ*| = *q* en |*NM*| = *r*.
- Waarom geldt dan $p + 1\frac{1}{2}q = r$?
- Bewijs nu dat *KZ* + *LZ* = *MZ*.

Opgave 5

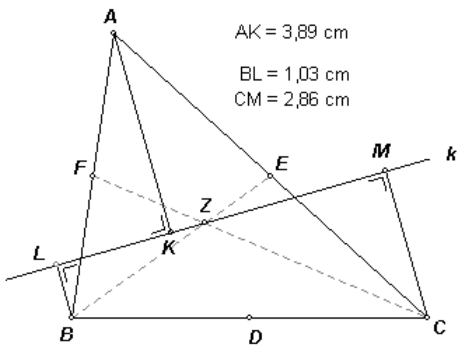


In de hiernaast staande figuur is een zogenoemd *rechthoekig trapezium* *ABCD* getekend (met *AB* // *CD*).
De punten *E*, *F* zijn de middens van de lijnstukken *BC* en *DA*.

- Bewijs dat *EF* = ½ (*AB* + *CD*).
  Aanwijzing – Teken het lijnstuk *AC*.
- Bewijs ook dat $V(ABCD) = \frac{1}{2}AD \cdot EF$.

Opgave 6

Kies een nieuw Cabri-tekenblad met daarop een driehoek *ABC*. Teken de middens *D*, *E*, *F* van de zijden van die driehoek en bepaal met behulp van de lijnstukken *BE* en *CF* het zwaartepunt *Z*.
Teken dan een *willekeurige* lijn *k* door *Z*. Teken ook de loodlijnenstukken *AK*, *BL*, *CM* uit de punten *A*, *B*, *C* neergelaten op de lijn *k* (zie onderstaande figuur).



- Met de Cabri-functie 'Afstand/Lengte' (in het *Reken*-menu, het derde menu van rechts) kan je de lengtes van *AK*, *BL* en *CM* bepalen ('*Lengte van dit lijnstuk*'). Doe dat.

Merk op dat in de hiernaast staande tekening geldt:
AK = *BL* + *CM*

- Draai nu de lijn *k* om het punt *Z* (selecteer daartoe de lijn *k* en houd de linker muisknop ingedrukt).

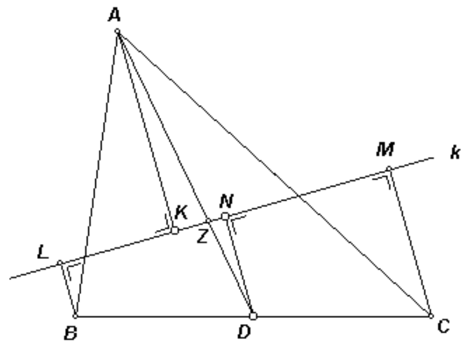
- Geldt de genoemde relatie (*AK* = *BL* + *CM*) tussen de lengtes van de lijnstukken nu steeds? Beschrijf kort, maar nauwkeurig, de verschillende mogelijkheden.

Opmerking – Met de Cabri-functie 'Rekenmachine' kan je natuurlijk de som van de lengtes van de lijnstukken *BL* en *CM* ook op het tekenblad plaatsen. Doe dat zo nodig.

Uiteraard willen we de in Opgave 6 genoemde relatie (bij de in de figuur getekende stand van de lijn *k*) bewijzen. Zie daarvoor Opgave 7.

Opgave 7

In de figuur hiernaast is ook de loodlijn *DN* uit *D* (het midden van het lijnstuk *BC*) op de lijn *k* getekend.



- Bewijs allereerst dat $DN = \frac{1}{2}AK$.
  Aanwijzing – Bekijk de driehoeken *AKZ* en *DNZ*. Waarom zijn deze driehoeken gelijkvormig?

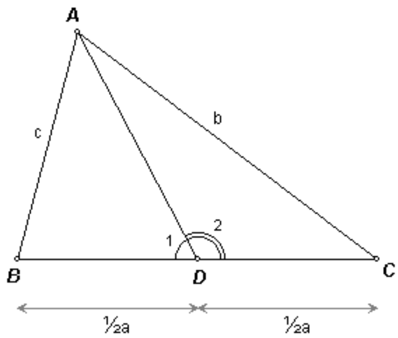
- Bewijs nu dat (in dit geval) *AK* = *BL* + *CM*.
  Aanwijzing – Zie Opgave 5.

In Opgave 4b staat een eigenschap van de punten *Z*, *K*, *L*, *M* op de lijn *k* indien deze lijn evenwijdig is met de lijn *BC*.
Ook als de lijn *k* *willekeurig* door *Z* gaat, geldt in bovenstaande situatie: *ZK* + *ZL* = *ZM*.

- Bewijs deze eigenschap.
  Aanwijzing – Gebruik onder andere het tweede deel van Opgave 5.

Opgave 8

In een willekeurige driehoek geldt volgens de cosinusregel
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
We kunnen de cosinusregel gebruiken voor het bewijs van de volgende, niet zo spectaculaire, formule voor de lengte van een zwaartelijn in een driehoek.
Er geldt namelijk: $2AD^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$



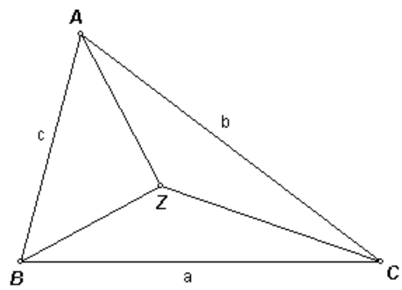
- Waarom geldt in de hiernaast staande figuur cos D_2 = - cos D_1?

- Uit de cosinusregel in driehoek *ABD* volgt: $c^2 = AD^2 + \cdots$ (vul zelf verder aan).
  Uit de cosinusregel in driehoek *ACD* volgt: $b^2 = AD^2 + \cdots$ (vul zelf verder aan).
  Leid hieruit door optelling de formule $2AD^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$ af.

Opgave 9

Geven we de lengtes van de zwaartelijnen uit *A*, *B*, *C* opvolgend aan met z_a, z_b, z_c, dan geldt:

$$z_a^2 + z_b^2 + z_c^2 = \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

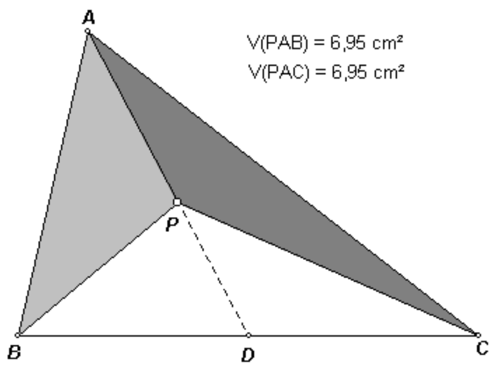


- Bewijs deze formule.
  Aanwijzing – Gebruik de formule uit Opgave 8.

- Bewijs nu ook: $ZA^2 + ZB^2 + ZC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$
  Aanwijzing – Gebruik stelling 2.

Opgave 10

Neem een nieuw Cabri-tekenblad met daarop een driehoek *ABC* en de zwaartelijn *AD* van die driehoek.
Kies op *AD* een willekeurig punt *P* en teken ook de driehoeken *PAB* en *PAC* (met de Cabri-functie 'Driehoek').



- Bepaal dan met de Cabri-functie 'Oppervlakte' de oppervlakte van de driehoeken *PAB* en *PAC*.

🗎 Wat valt je daarbij op?
Geldt hetgeen je gevonden hebt voor elke positie van het punt *P* op *AD*?

🗎 Bewijs dat *V*(*PAB*) = *V*(*PAC*).
Aanwijzing – Waarom geldt *V*(*ABD*) = *V*(*ACD*)? Waarom geldt *V*(*PBD*) = *V*(*PCD*)?

- Teken nu ook driehoek *PBC* en bepaal ook van deze driehoek de oppervlakte.
Probeer dan de positie van *P* op *AD* zó te bepalen dat de oppervlaktes van de drie 'deeldriehoeken' gelijk zijn.

🗎 Welke positie heeft het punt *P* dan? Geef een bewijs van je vermoeden.

Opgave 11

Er geldt:

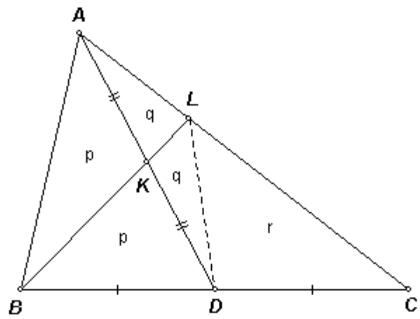
Stelling 5 – De zwaartelijnen van een driehoek verdelen deze driehoek in zes driehoeken die gelijke oppervlakte hebben.

🗎 Bewijs stelling 5.

Opgave 12

In driehoek *ABC* hiernaast is *AD* een zwaartelijn. *K* is het midden van *AD*.
De lijn *BK* snijdt *AC* in *L*.

🗎 Toon aan dat $AL = \frac{1}{2}LC$.
Aanwijzing – De oppervlaktes van de deeldriehoeken zijn aangegeven met de letters *p*, *q*, *r*. Waarom is *V*(*ABK*) = *V*(*DBK*)? Waarom is *V*(*AKL*) = *V*(*DKL*)? Toon voorts aan dat $q = \frac{1}{4}r$.



Opgave 13

Toon aan dat in een rechthoekige driehoek *ABC* met $\angle C = 90°$ geldt: $z_a^2 + z_b^2 = 5z_c^2$.

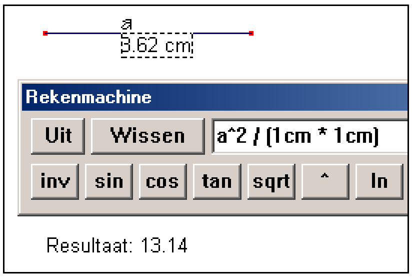
Opgave 14

De plaats een willekeurig punt in het vlak van een driehoek kan in verband worden gebracht met de afstanden van dat punt tot de hoekpunten van die driehoek en met de afstand van dat punt tot het zwaartepunt en alsmede met de (bij een vaste driehoek constante) afstanden van het zwaartepunt tot de hoekpunten (zie voor dit laatste Opgave 9).
Er geldt namelijk:

Stelling 6 – Voor een willekeurig punt *P* en een driehoek *ABC* met zwaartepunt *Z* geldt:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = ZA^2 + ZB^2 + ZC^2 + 3PZ^2$

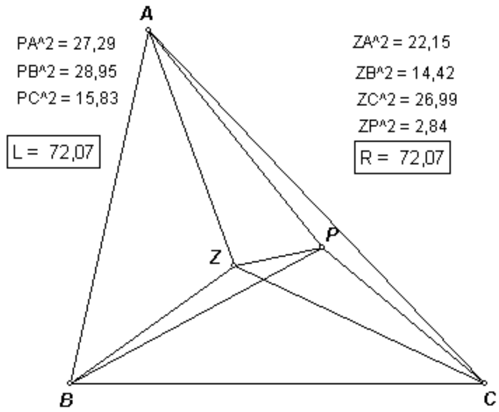
Het bewijs van stelling 6 kan geleverd worden met behulp van hetgeen op dit werkblad behandeld is.
Maar echt eenvoudig is dat niet.

Het is wellicht aardig eerst een Cabri-figuur te maken waarmee de stelling kan worden geïllustreerd. Omdat je daarbij een aantal keer (zeven) het kwadraat van de lengte van een lijnstuk moet uitrekenen, is het zeker handig daarvoor eerst een macro te maken.



In bovenstaande gedeeltelijke Cabri-figuur is een lijnstuk getekend. Met de functie 'Afstand/lengte' is de lengte (3,62 cm) van dat lijnstuk bepaald. Daarna is de 'Rekenmachine' gestart en de lengte geselecteerd (dat is de 'a' in het rekenvenster). Het getal wordt in het kwadraat gebracht (a^2) en daarna gedeeld door 1 cm * 1 cm. Dit laatste is gedaan om de eenheid (het zou cm^2 zijn) in de uitkomst van de berekening weg te laten (zie Resultaat: 13.14).

De macro kan dan worden gedefinieerd door als Beginobject het lijnstuk te kiezen en als Eindobject het getal '13.14'.



- Kies nu een nieuw Cabri-tekenblad met daarop een driehoek ABC en een willekeurig punt P. Construeer ook het zwaartepunt Z met behulp van twee zwaartelijnen. Teken daarna de andere lijnstukken.
- Gebruik dan de macro (zie eventueel onderstaande opmerking) om de kwadraten van de lengtes van de zeven lijnstukken te berekenen.
  Selecteer daartoe zo'n lijnstuk en klik dan op een lege plaats op het tekenblad.

Zie nu weer de figuur hierboven. Het getal L daarin is de som van de getallen erboven (PA^2 + …); het getal R eveneens (ZA^2 + …). L en R kunnen berekend worden met Cabri's rekenmachine.
L is dus het linker lid van de uitdrukking in stelling 6; R is het rechter lid van die uitdrukking.

- Verplaats in de Cabri-figuur het punt P (ook buiten de driehoek) en ga daarbij na dat steeds $L = R$.

Opmerking – De macro met de naam "KwadraatLengte" kan ook worden gedownload via http://www.pandd.nl/downloads/KwadraatLengte.mac.

🗎 (niet eenvoudig) Bewijs tenslotte stelling 6.
Aanwijzing – Pas in de driehoeken APZ, BPZ, CPZ de cosinusregel toe (PA^2 = …, enz.) en gebruik dan de laatste in Opgave 7 genoemde eigenschap. Hierbij spelen ook de lijn door de punten Z en P (de lijn k) en de loodlijnen uit A, B, C daarop een rol.