Een ‘andere’ bissectricestelling

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)

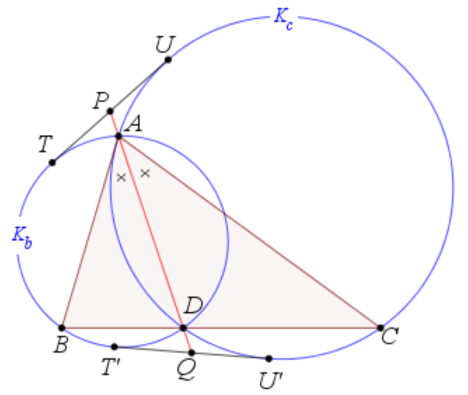
oktober 2017

1. Probleem

Van driehoek *ABC* is *AD* (met *D* op *BC*) een bissectrice; zie figuur 1.
De punten *T*, *U* en *T'*, *U'* zijn de raakpunten van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de omcirkels K_b van driehoek *ABD* en K_c van driehoek *ACD*.
De lijn *AD* snijdt *TU* in *P* en *T'U'* in *Q*.
Dan is:

≡≡ $PQ^2 = AB \cdot AC$

figuur 1



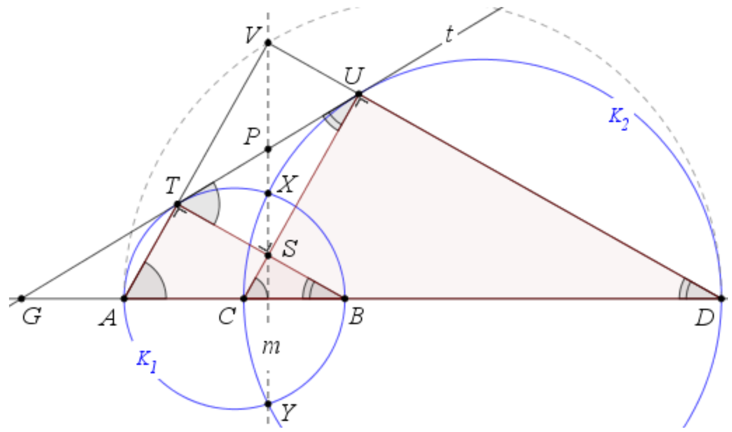
Het probleem is natuurlijk het bewijs van de hierboven vermelde eigenschap.

2. Een constructie van de raaklijnen

Ik zal voorafgaande aan een beschrijving van de constructie van de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee (snijdende) cirkels een niet zo bekende eigenschap bewijzen.

Ik ga uit van twee elkaar in de punten *X* en *Y* snijdende cirkels K_1 en K_2; zie figuur 2.

figuur 2



Een gemeenschappelijke (uitwendige) raaklijn $t \equiv TU$ snijdt de as van de cirkels [1] in het *uitwendige* gelijkvormigheidspunt *G*.
De beide cirkels snijden de as opvolgend in de puntenparen *A*, *B* en *C*, *D*. De rechthoekige driehoeken *ABT* en *CDU* (het zijn *Thales-driehoeken*) zijn daardoor *gelijkstandig*.
Met [2] $S = BT$ & CU is daarmee in de driehoeken *CBS* en *TUS*:

$\angle C = \angle BAT = ½\text{bg}(BXT) = \angle BTU = \angle T$
$\angle B = \angle CDU = ½\text{bg}(CXU) = \angle CUT = \angle U$

De driehoeken *CBS* en *TUS* zijn gelijkvormig (*hh*), zodat:

$SC : ST = SB : SU$ of ook:
$SB \cdot ST = SC \cdot SU$

Met *B*, *T* op K_1 en *C*, *U* op K_2 blijkt uit de laatste relatie dat het punt *S* *gelijke* machten heeft bij de cirkels K_1 en K_2 [3]; anders gezegd:
≡ het punt *S* ligt op de machtlijn $m \equiv XY$ van die cirkels.

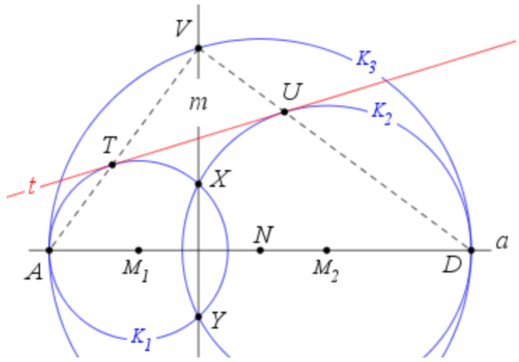
Ook het midden *P* van het lijnstuk *TU* ligt op *m*, immers *PT* en *PU* zijn *gelijke* raaklijnstukken uit *P* aan beide cirkels.[4]
Met $V = AT$ & DU is vierhoek *SUVT* een rechthoek, waarvan *TU* de ene diagonaal is, met midden *P*. De lijn *m*, die door *P* gaat, is de andere diagonaal; dus gaat *m* ook door het punt *V*.
Met andere woorden:

≡ de punten X, Y, S, P, V zijn collineair (ze liggen alle op m). ◊

Omdat AV en DV in V loodrecht op elkaar staan, ligt het punt V óók op de *Thales-cirkel* met middellijn AD.

Op het bovenstaande is een eenvoudige constructie voor een uitwendige raaklijn aan twee (snijdende) cirkels gebaseerd; zie figuur 3a.

figuur 3a



Ik ga bij die constructie weer uit van de elkaar in X en Y snijdende cirkels K_1 en K_2 (middelpunten M_1, M_2).

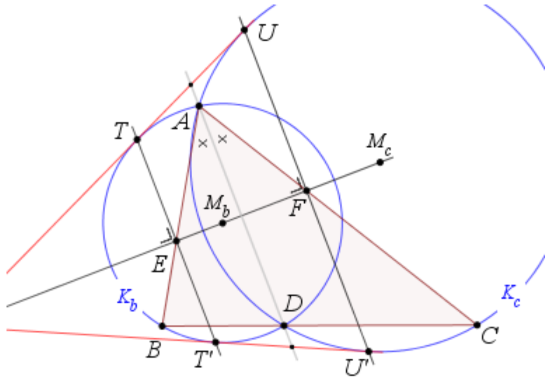
Constructiestappen

1. m = Lijn(X, Y)
2. a = Lijn(M_1, M_2)
3. $A = a$ & K_1 // snijpunt met grootste afstand tot m
4. $D = a$ & K_2 // snijpunt met grootste afstand tot m
5. N = Midden(A, D)
6. K_3 = Cirkel(N, A)
7. $V = m$ & K_3
8. $T = VA$ & K_1, $U = VB$ & K_2
9. t = Lijn(T, U)

De lijn t is dan één van de gemeenschappelijke (uitwendige) raaklijnen aan K_1 en K_2.

Opmerking

figuur 3b

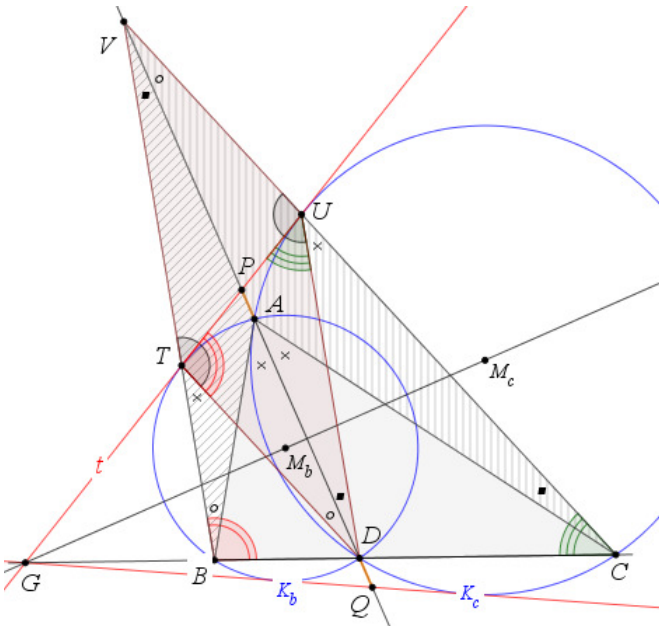


In figuur 3b zijn E en F de snijpunten van de lijn M_bM_c met de zijden AB en AC van driehoek ABC. De loodlijnen in E en F op deze as snijden de omcirkels opvolgend in T, T' en U, U'.
De vraag rijst nu of de lijnen TU en $T'U'$ ook in deze configuratie gemeenschappelijke (uitwendige) raaklijnen zijn aan beide cirkels.

Het onderzoek naar een antwoord op deze vraag wordt overgelaten aan de lezer. ◊

3. Een oplossing van het probleem, een bewijs

figuur 4



Voor de gegevens van figuur 4 verwijs ik naar paragraaf 1. Zij verder $V = BT$ & CU.

Ik zal nu eerst bewijzen dat vierhoek *DUVT* een parallellegram is.

A. Vierhoek *ATBD* is een koordenvierhoek (omcirkel K_b). Daarin is:

$x = \angle DAB = \angle DTB$

Vierhoek *AUCD* is eveneens een koordenvierhoek (omcirkel K_c). Daarin is:

$x = \angle DAC = \angle DUC$

De hoeken *DTV* en *DUV* zijn de supplementen van de hoeken *DTB* en *DUC*, welke laatste aan elkaar gelijk zijn (= x).

(a1)… In vierhoek *DUVT* blijkt nu dat $\angle T = \angle U$.

Met *TU* als raaklijn in *T* aan cirkel K_b is:

$\angle UTD = \frac{1}{2}\text{bg}(TAD) = \angle TBD = \angle VBC$

Met *UT* als raaklijn in *U* aan K_c is:

$\angle TUD = \frac{1}{2}\text{bg}(UAD) = \angle UCD = \angle VCB$

In driehoek *TUD* is dan $\quad \angle UTD + \angle TUD + \angle D = 180^\circ$.

En in driehoek *BCV* is $\quad \angle VBC + \angle VCB + \angle V = 180^\circ$.

(a2)… In vierhoek *DUVT* is dus $\angle D = \angle V$.

Uit (a1) en (a2) volgt dan dat vierhoek *DUVT* een parallellogram is, per definitie.

B. Het punt *P* is het midden van het lijnstuk *TU*[3]. De lijn *DA* gaat door *P* en is dan eveneens een diagonaal van het beschouwde parallellogram.

In dat parallellogram is:

$\circ = \angle TDV = \angle DVU = \angle AVC$ (omdat $DT \parallel VU$)

$\blacksquare = \angle UDV = \angle DVT = \angle AVB$ (omdat $DU \parallel VT$)

Maar in vierhoek *ATBD* is:

$\circ = \angle TDV = \angle TDA = \frac{1}{2}\text{bg}(AT) = \angle ABT$, zodat:

(b1)… $\circ = \angle AVC = \angle ABV$

En in vierhoek *AUCD* is:

$\blacksquare = \angle UDV = \angle UDA = \frac{1}{2}\text{bg}(AU) = \angle ACU$, zodat:

(b2)… $\blacksquare = \angle AVB = \angle ACV$

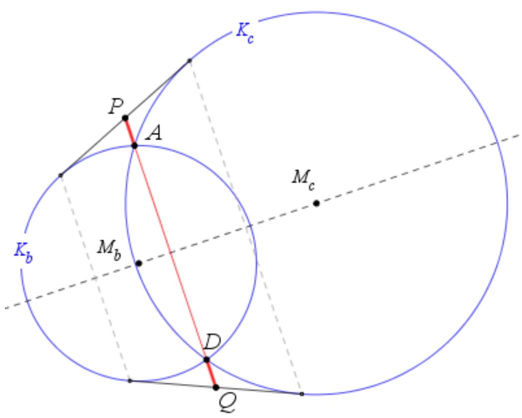
C. Ik beschouw vervolgens de driehoeken *AVB* en *ACV*.

Deze driehoeken hebben twee *gelijke* overeenkomstige hoeken, conform (b1) en (b2). De driehoeken zijn dus gelijkvormig, waaruit volgt dat:

(c1)… $VA : CA = AB : AV$

D. Zie figuur 5. Vanwege de spiegelsymmetrie in de as M_bM_c van de cirkels is natuurlijk:

(d1)… $AP = DQ$



figuur 5

In parallellogram *DUVT* (in figuur 4) is:

(d2)… $VP = PD$ (*de helft van de diagonaal DV*)

Dus met optelling van (d1) en d(2):

$VP + PA = PD + DQ$ zodat:

(d3)… $VA = PQ$

Na substitutie van uitdrukking (d3) in (c1) blijkt:

$PQ : AC = AB : PQ$ of:

$PQ^2 = AB \cdot AC$ ◊

En dit is wat in paragraaf 1 is vermeld als te bewijzen eigenschap.

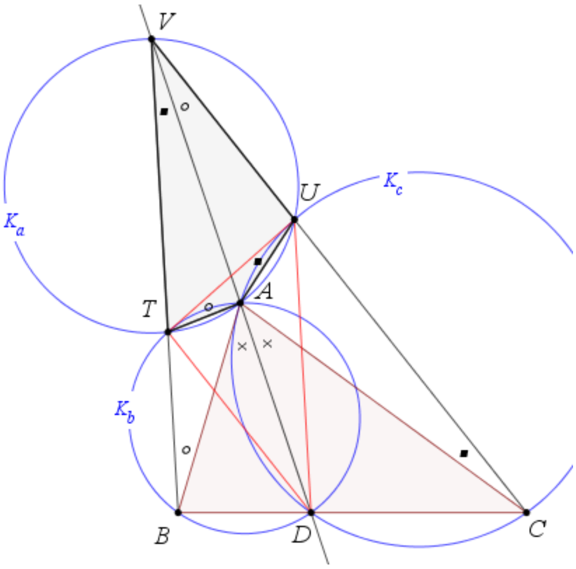
En die eigenschap betreft in beginsel een bissectrice van een driehoek, vandaar dat er, zoals in de titel, gesproken kan worden over een ‘andere’ bissectricestelling.

Opmerking. Zie figuur 6. Bij beschouwing van driehoek *VBC* met op de zijden daarvan de punten *D*, *U*, *T* is het paar driehoeken *VBC*/*DUT* op te vatten als een zogeheten *Miquel-configuratie*.[5,6]

Voor dit geval geformuleerd als:

≡ Snijden de omcirkels van de driehoeken *BDT* en *CUD* elkaar behalve in *D* ook in het punt *A*, dan gaat ook de omcirkel van driehoek *VTU* door het punt *A*.

figuur 6



Op basis van die Miquel-configuratie is *VTAU* een koordenvierhoek (omcirkel K_a), zodat:

$\circ = \angle AVU = \angle ATU = \frac{1}{2}\text{bg}(AT)$ op $K_b = \angle ABV$

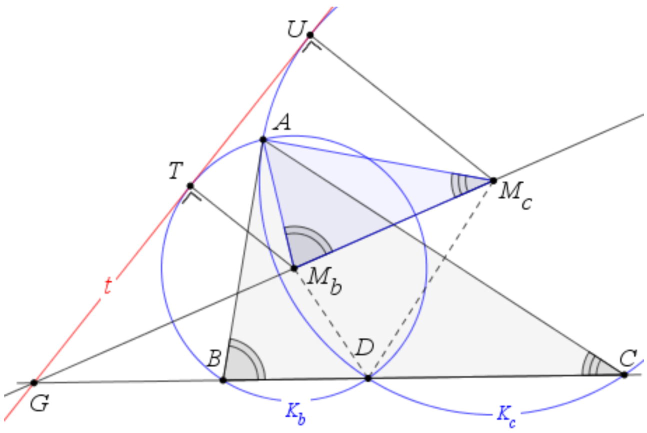
$\blacksquare = \angle AVT = \angle AUT = \frac{1}{2}\text{bg}(AU)$ op $K_c = \angle ACV$

waaruit dan weer de *hh*-gelijkvormigheid volgt van de driehoeken *ABV* en *ACV* (zie de alinea's **B** en **C** hierboven). ◊

4. Blikwisseling

Met M_b en M_c als middelpunten van de omcirkels van *ABD* en *ACD* zijn de driehoeken AM_bMc en *ABC* gelijkvormig. Zie figuur 7.

figuur 7



Immers, de lijn M_bM_c is bissectrice van de hoek AM_bD, want vierhoek AM_bDM_c is een vlieger.
Bij de driehoeken AM_bM_c en *ABC* en bij cirkel K_b is dan (*middelpunts- en omtrekshoeken*):

$\angle M_b = \angle AM_bM_c = \frac{1}{2}\text{bg}(AD) = \angle B$

en verder ook bij cirkel K_c:

$\angle M_c = \angle AM_cD = \frac{1}{2}\text{bg}(AD) = \angle C$

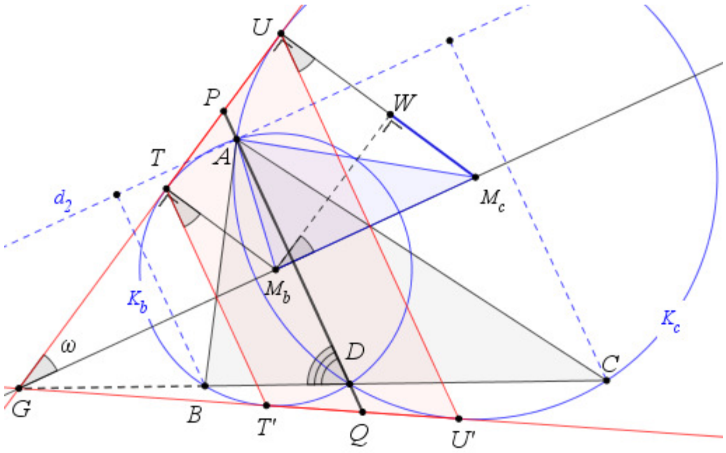
De driehoeken AM_bM_c en *ABC* hebben dus twee hoeken gelijk. Zoals reeds gemeld: de driehoeken zijn gelijkvormig.
Er is dus een gelijkvormigheidsfactor $k = AM_b/AB = AM_c/AC = M_bM_c/AB$.
Merk daarbij verder op dat K_b en K_c ook kunnen worden gezien als cirkels met middelpunt M_b en straal $R_b = AM_b = k \cdot AB = kc$ en middelpunt M_c en straal $R_c = AM_c = k \cdot AC = kb$.
Uiteraard is dan ook $M_bM_c = k \cdot AB = ka$.

Deze cirkels hebben het punt $G = t$ & M_bM_c als (uitwendig) gelijkvormigheidspunt. Merk daarbij op dat G ook gelegen is op de lijn BC.

5. Een 'berekening' die het probleem oplost

Zie nu figuur 8.

figuur 8



Zij ω de hoek tussen een uitwendige raaklijn (hier GU) en de as van beide cirkels: $\omega = \angle M_cGU$.
Met $M_bW \mathbin{/\!/} GU$ en W op M_cU is $\angle M_cM_bW = \omega$.
Dan is in driehoek M_cM_bW via de hierboven (in paragraaf 4) gevonden gelijkvormigheid:

(1)… $$\sin\omega = \frac{M_cW}{M_cM_b} = \frac{M_cU - WU}{ka} = \frac{R_c - R_b}{ka} = \frac{|b-c|}{a}$$

Nu is verder, gebruik makend van (1):

(2)… $$a^2\cos^2\omega = a^2 - a^2\sin^2\omega = a^2 - (b-c)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

Ik geef de grootte van hoek A in driehoek ABC aan met α. Daarmee is in die driehoek volgens de cosinusregel:

(3)… $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ of: $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha$

zodat (2) met (3) overgaat in:

(4)… $$a^2\cos^2\omega = 2bc(1-\cos\alpha) = 2bc\cdot 2\sin^2(\tfrac12\alpha)$$

En dan volgt uit (4):

(5)… $$a\cdot\cos\omega = 2\sqrt{bc}\cdot\sin\tfrac12\alpha \;\Rightarrow\; \sin\tfrac12\alpha = \frac{a\cdot\cos\omega}{2\sqrt{bc}}$$

Het gebroken lijnstuk $[BAC]$, met lengte $b + c$, projecteer ik nu loodrecht op de buitenbissectrice d_2 van hoek A (van driehoek ABC). Merk daarbij op dat $d_2 \mathbin{/\!/} M_bM_c$.
Dit geeft voor de lengte p van die projectie:

(6)… $$p = (b+c)\cdot\cos(90^\circ - \tfrac12\alpha) = (b+c)\cdot\sin(\tfrac12\alpha)$$

Maar daarmee is ook het lijnstuk BC (de zijde a van driehoek ABC) geprojecteerd op d_2.
Met $\angle GDA = \delta$, is ook:

(7)… $$p = a\cdot\cos(90^\circ - \delta) = a\cdot\sin\delta$$

Zodat uit (6) en (7) volgt:

(8)… $$(b+c)\cdot\sin(\tfrac12\alpha) = a\cdot\sin\delta$$

Vervanging van $\sin(\tfrac12\alpha)$ in (8), via (5), geeft dan, na deling door a:

(9)… $$(b+c)\cdot\cos\omega = 2\sqrt{bc}\cdot\sin\delta$$

Het lijnstuk PQ is de middenparallel in het gelijkbenige trapezium $TT'U'U$.[7]
Met R_b en R_c als lengtes van de stralen van K_b en K_c volgt dan, op basis van de sinusregel in de deeldriehoeken ABD en ACD:

$$R_b = \frac{c}{2\sin\delta},\quad R_c = \frac{b}{2\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{b}{2\sin\delta}$$

Zodat: $PQ = \frac{1}{2}(TT' + UU') = \frac{1}{2}(2R_b\cos\omega + 2R_c\cos\omega) = (R_b + R_c)\cdot\cos\omega = \dfrac{(b+c)\cdot\cos\omega}{2\sin\delta}$

Met relatie (9) is dan:

$$PQ = \sqrt{bc}$$

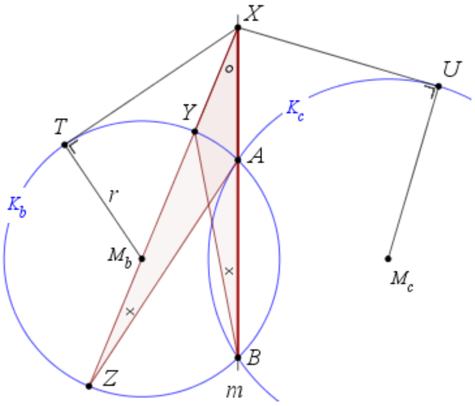
En daaruit blijkt direct (en opnieuw) dat $PQ^2 = bc = AB \cdot AC$. ◊

6. Noten

[1] De *as* van twee cirkels is de lijn door de middelpunten van die cirkels.

[2] Met $S = V$ & W wordt in hetgeen volgt bedoeld: het punt S is het (c.q. een) snijpunt van de meetkundige objecten V en W.

[3] figuur n1



In figuur n1 is de lijn m de 'drager' van de gemeenschappelijke koorde AB van de cirkels K_b en K_c (middelpunten M_b en M_c).
X is een *willekeurig* punt van m en XT en XU zijn raaklijnstukken uit X aan beide cirkels.
De lijn XM_b snijdt K_b in de punten Y en Z.
De driehoeken XZA en XBY zijn gelijkvormig (*hh*), zodat:

$$XZ : XB = XA : XY \quad \text{of} \quad (XM_b + r) : XB = XA : (XM_b - r)$$

Of anders geschreven:

$$(XM_b)^2 - r^2 = XB \cdot XA \quad \text{of} \quad XT^2 = XA \cdot XB$$

Analoog kan worden aangetoond dat $XU^2 = XA \cdot XB$.
Het product $XA \cdot XB$ (van de lengtes van de lijnstukken XA en XB) wordt de *macht van X* genoemd bij K_b (en daarmee ook bij K_c).
En dan blijkt dat $XT = XU$.
Met andere woorden: de lengtes van de raaklijnstukken uit een punt van de drager van de gemeenschappelijke koorde van twee cirkels zijn gelijk.

Opmerking. De lijn m is de zogenoemde *machtlijn* van beide cirkels. Het is de meetkundige plaats van de punten die gelijke machten hebben bij twee gegeven cirkels.

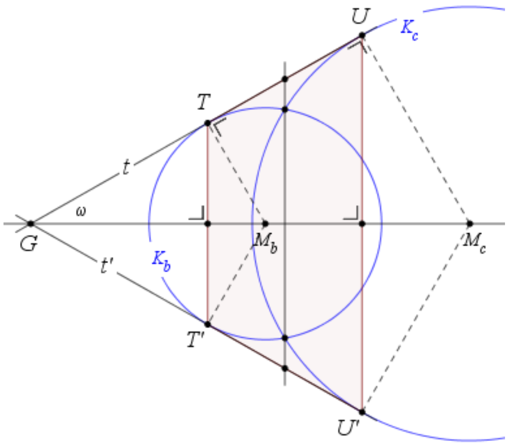
[4] Dat P het midden is van het lijnstuk TU – dat is het *gemeenschappelijk raaklijnstuk* van K_b en K_c – kan worden afgeleid uit de *macht van het punt P* bij beide cirkels.
Zie verder noot [3].

[5] Naar: Auguste Miquel (1816-1851, Frankrijk)

[6] Zie eventueel:
Dick Klingens (2004): *De stelling van Miquel*. Paragraaf 2, Het punt van Miquel, en daarbij in het bijzonder stelling 2. Op (de website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/miquel.htm

[7] Dat $TT'U'U$ een gelijkbenig trapezium is, volgt uit de symmetrie van de figuur in de lijn M_bM_c.
Ik laat hieronder voor de volledigheid een schets van een bewijs volgen.
Zie figuur n2. Ik ga uit van de (snijdende) cirkels K_b en K_c, de raakpunten T en U van een uitwendige raaklijn t aan die cirkels en van het uitwendig gelijkvormigheidspunt $G = t$ & M_bM_c.

figuur n2



Bij de (loodrechte) spiegeling $\mathcal{R}$ in de lijn M_bM_c is onder andere:

- $\mathcal{R}(T) = T'$ met T' op K_b ;
- $\mathcal{R}(M_bT) = M_bT'$;
- $\mathcal{R}(\angle GTM_b) = \angle GT'M_b$ (= 90º).

Overeenkomstige relaties gelden voor de punten U en U', waarbij dan verder $\mathcal{R}(TU) = T'U'$; en zo is ook $T'U' = TU$. Voorts is $TT' \perp M_bM_c$ en $UU' \perp M_bM_c$, zodat $TT' \,//\, UU'$.
Daarmee is $TT'U'U$ inderdaad een *gelijkbenig trapezium*.

versie 1.1 – oktober 2017
versie 1.2, versie 2.0 – november 2017