# Een veralgemenisering van een formule van Carnot

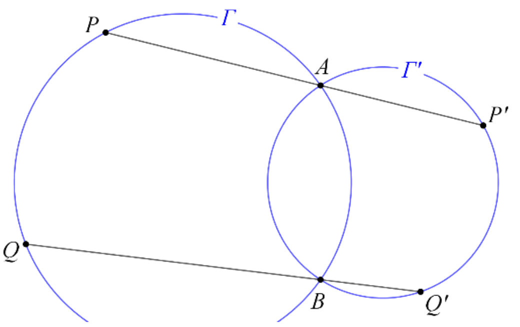
**DICK KLINGENS** (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)

## 1. De stelling van Reim

Om verderop in dit artikel (paragraaf 3) een veralgemenisering te kunnen geven van een formule van Carnot [1], behandel ik hier kort een bijzonder geval van de stelling van Reim [2].
De stelling van Reim – en ook dat bijzondere geval – is gebaseerd op twee elkaar snijdende cirkels en op het 'gebruik' van zogeheten dubbelkoorden.

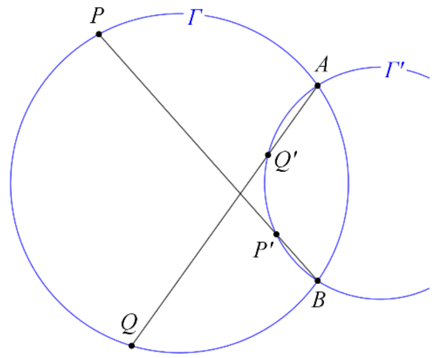
**Definitie.** Een lijnstuk $XX'$ is een d u b b e l k o o r d e van twee elkaar in $A$ en $B$ snijdende cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$ indien $X$ op $\Gamma$ ligt, $X'$ op $\Gamma'$ én $A$ (of $B$) *op* het lijnstuk $XX'$ ligt of *op een verlengde* van dat lijnstuk. ◊

figuur 1a




dubbelkoorden *PAP′* en *QBQ′*

figuur 1b



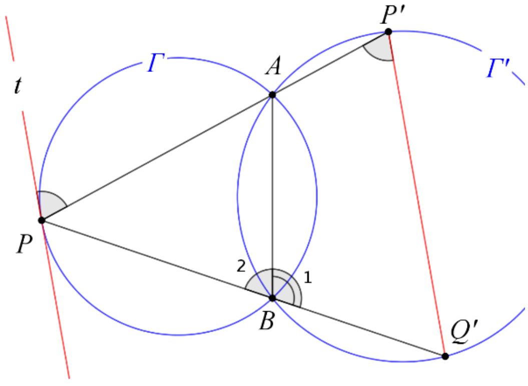

dubbelkoorden *PBP′* en *QAQ′*

Notatie. Een dubbelkoorde wordt aangegeven met drie letters: $XAX'$ (of $XBX'$), waarbij de naam van het cirkelsnijpunt (hier $A$ of $B$) staat tussen de namen $X$ en $X'$ van de eindpunten van het lijnstuk; zie de figuren 1a en 1b. ◊

Het bijzondere geval van de stelling van Reim is geïllustreerd in figuur 3 en kan als volgt geformuleerd worden [3]:

**Stelling 1.** Als $PAP'$ en $PBQ'$ dubbelkoorden zijn van de cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$, met $P$ op $\Gamma$, dan is de raaklijn $t$ in $P$ aan $\Gamma$ evenwijdig met $P'Q'$ (en omgekeerd). ◊

figuur 3




Bewijs. Voor de raaklijn $t$ in $P$ aan $\Gamma$ geldt:

- $\angle(t, PA) = \frac{1}{2}\text{bg}(PA) = \angle B_2$

En bij de koordenvierhoek $P'ABQ'$ is:

- $\angle B_2 = \angle P'$ (*buitenhoek, overstaande binnenhoek*)

Dus:
de lijn $t$ is evenwijdig met $P'Q'$ (*Z-hoeken*).

Omgekeerd. Als $PAP'$ een dubbelkoorde is en de raaklijn $t$ in $P$ aan $\Gamma$ evenwijdig is met $P'Q'$, dan is $PBQ'$ eveneens een dubbelkoorde.
Bewijs. Uit de evenwijdigheid volgt: $\angle P' = \angle P$. Omdat $t$ raaklijn is, is $\angle P = \frac{1}{2}\text{bg}(PA) = \angle B_2$.
Uit $\angle P' + \angle B_1 = 180^\circ$ (in koordenvierhoek $P'Q'BA$) volgt dan, met $\angle P' = \angle P = \angle B_2$, dat:

- $\angle B_2 + \angle B_1 = 180^\circ$

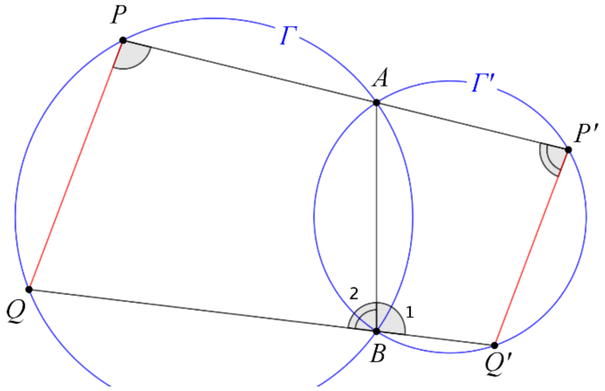
En dan is $PBQ'$ een dubbelkoorde van $\Gamma$ en $\Gamma'$. ◊

De 'eigenlijke' stelling van Reim staat in stelling 2.

**Stelling 2.** Als $PAP'$ en $QBQ'$ dubbelkoorden zijn van de cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$ (snijpunten $A$, $B$) dan is $PQ$ evenwijdig met $P'Q'$. ◊

Opmerking. In stelling 1 vallen de hier genoemde punten $P$ en $Q$ dus samen. ◊

figuur 3



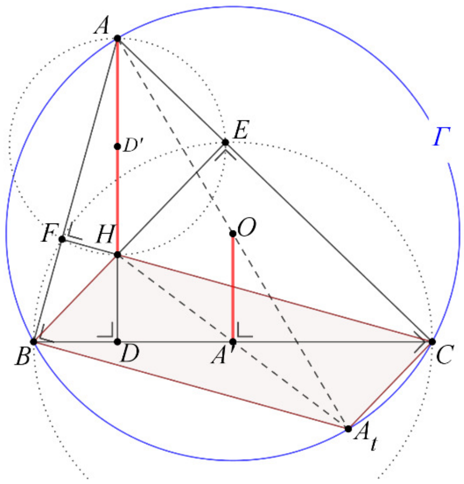

Bewijs. Zie figuur 3. In de koordenvierhoek $PQBA$ is: $\angle P = \angle B_1$ (*binnenhoek*, *overstaande buitenhoek*).
In koordenvierhoek $P'Q'BA$ is $\angle P' = \angle B_2$ (*binnenhoek*, *overstaande buitenhoek*).
Omdat $\angle B_{12} = 180^\circ$ is, is $\angle P + \angle P' = 180^\circ$.
Dus is: $PQ$ evenwijdig met $P'Q'$ (*U-hoeken* [4]).

Zie de referentie (») bij [2] voor een meer uitgebreide behandeling van de stelling van Reim.

## 2. Carnot's formule

Ik leid nu de in paragraaf 1 aangekondigde formule van Carnot af. Een verwoording van die formule staat in stelling 3.

figuur 4




Gegeven (in figuur 4):
- driehoek $ABC$;
- $\Gamma$ is de omcirkel van driehoek $ABC$;
- $O$ is het middelpunt van $\Gamma$;
- $A'$ is het midden van $BC$;
- $H$ is het hoogtepunt van de driehoek;
- $BE$, $CF$, $AD$ zijn hoogtelijnen.

**Stelling 3.** De afstand van een hoekpunt van een driehoek tot het hoogtepunt is het dubbele van de afstand van het omcentrum tot de overstaande zijde van dat hoekpunt. Of ook:
De lengte van een 'bovenste hoogtelijnstuk' in een driehoek is gelijk aan het dubbele van de afstand van het omcentrum tot de zijde waarop die hoogtelijn staat. ◊

In formule (als in figuur 4):
- $\boldsymbol{AH = 2 \cdot OA'}$

Dit is, in dit verband dus, de bedoelde formule van Carnot.

Bewijs. Het tegenpunt van het punt $A$ op $\Gamma$ is $A_t$. Nu is:
- $\angle A_tCA = 90^\circ$ en $\angle A_tBA = 90^\circ$ (*cirkelstelling van Thales*)

Omdat $A_tC \perp AC$ en $BE \perp AC$ is, is $A_tC \parallel BH$. Omdat $A_tB \perp AB$ en $CF \perp AB$ is, is $A_tB \parallel CH$.
Vierhoek $BA_tCH$ is dan een parallellogram, met diagonalen $A_tH$ en $BC$. Omdat $A'$ het midden is van $BC$, gaat $A_tH$ door $A'$, zodat $A_tA' = A'H$.
Omdat $O$ het midden is van $AA_t$ is $OA'$ een middenparallel in driehoek $A_tAH$, zodat inderdaad:
- $AH = 2 \cdot OA'$

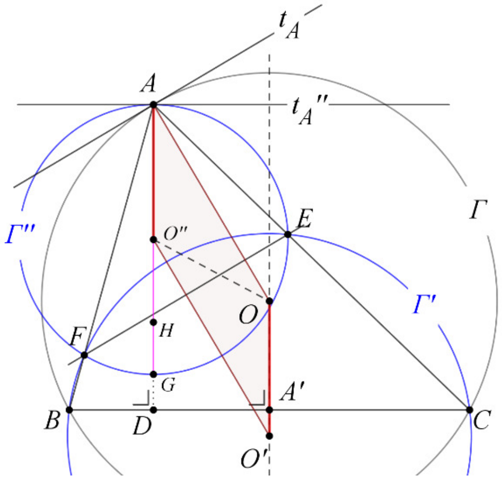
En daarmee is stelling 3 bewezen. ◊

Opmerkingen. **1.** In figuur 4 is vierhoek $BCEF$ een koordenvierhoek op basis van de *cirkelstelling van Thales*. Het middelpunt van de omcirkel van $BCEF$ is het punt $A'$.
**2.** Het middelpunt van de omcirkel van driehoek $AFE$ valt samen met het midden $D'$ van $AH$, omdat ook $AFHE$ een koordenvierhoek is. Met andere woorden: $AD' = OA'$. ◊

## 3. Veralgemenisering

Ik bekijk in figuur 5 bij een in ligging en grootte gegeven driehoek $ABC$ nu een *willekeurige* cirkel $\Gamma'$ door de punten $B$ en $C$. Het middelpunt $O'$ ($\neq A'$) van die cirkel ligt dan uiteraard op de middelloodlijn van $BC$.
Verder snijdt $\Gamma'$ de zijden $AB$, $AC$ (of eventueel de verlengden ervan) in de punten $F$, $E$.
De omcirkel van driehoek $AEF$ is $\Gamma''$. Het middelpunt van die cirkel is hier $O''$.
De cirkel $\Gamma$ met middelpunt $O$ is weer de omcirkel van driehoek $ABC$.

figuur 5




Nu zijn $AFB$ en $AEC$ dubbelkoorden van $\Gamma'$ en $\Gamma''$ (snijpunten $F$, $E$).
De raaklijn $t_A''$ in $A$ aan $\Gamma''$ is dus evenwijdig met $BC$ (volgens stelling 1).
Dus $O''$ ligt op de loodlijn in $A$ op $t_A''$. Of ook:
$O''$ ligt op de $A$-hoogtelijn van driehoek $ABC$.

Bij $\Gamma$ en $\Gamma'$ (snijpunten $B$, $C$) zijn $ABF$ en $ACE$ dubbelkoorden.
De raaklijn $t_A$ in $A$ aan $\Gamma$ is dus evenwijdig met $FE$ (conform stelling 1).
Omdat de lijn $OA$ loodrecht op $t_A$ staat, staat $OA$ ook loodrecht op $EF$.

De cirkels $\Gamma''$ en $\Gamma'$ hebben de koorde $EF$ gemeenschappelijk, zodat $O'O''$ (de centraal van die cirkels) loodrecht staat op $EF$.
Uit een en ander blijkt nu dat $O'O$ // $O''A$ en $O'O''$ // $OA$ is, zodat vierhoek $AO''O'O$ een parallellogram is.
Dan is dus: $OO' = AO''$.
En, als $G$ het tegenpunt is van $A$ op de cirkel $\Gamma''$, dan is: $\boldsymbol{AG = 2 \cdot OO'}$ .

En hiermee is de formule van een veralgemenisering van de formule van Carnot een feit.
Immers, als $O'$ samenvalt met $A'$, valt $G$ met $H$ samen en is $AH = 2 \cdot OA'$.

## Noten

[1] De 'formule van Carnot' is genoemd naar Lazare Carnot (1753-1823, Frankrijk). Overigens is dat ook het geval met enkele *goniometrische* formules. Zie voor dit laatste WikipediA NL (punt 8 op de betreffende pagina):
*https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_goniometrische_gelijkheden*

[2] Naar Anton Reim (1832-1922, Duits Bohemen/Sudetië). Zie ook:
» Dick Klingens (2017): *Cirkels van Reim*. Ongepubliceerd artikel; elektronisch beschikbaar via:
*http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/CirkelsVanReim_vs2.pdf*

[3] Zie eventueel ook:
» F. G.-M. (1920): *Exercices de Géométrie*. Paris: Rééditions Jacques Gabay (1991); pag. 283, théorème 124.

[4] Overeenkomstig het gebruik van de termen *F-hoeken* en *Z-hoeken* noem ik (gelijke) 'binnenhoeken die aan dezelfde kant van de snijlijn van twee lijnen liggen', *U-hoeken*.