

Harmonisch

DICK KLINGENS (e-mailadres: dklingens@gmail.com)

1. Dubbelverhouding, de basis

Definitie. De **dubbelverhouding** $(ABCD)$ van vier collineaire punten A, B, C, D wordt gedefinieerd als de verhouding van twee zogeheten *deilverhoudingen*.

De **deilverhouding** (ABT) van drie (verschillende) collineaire punten A, B en T wordt als volgt gedefinieerd:

$$(ABT) = \varepsilon \cdot \frac{TA}{TB}$$

waarbij $\varepsilon = -1$ als T op het lijnstuk AB ligt en $\varepsilon = 1$ als T op een verlengde van AB ligt.

Nu is, gebruikmakend van de deilverhouding, *per definitie* $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ de dubbelverhouding van de vier punten A, B, C en D . $\diamond$

In deze definitie is de dubbelverhouding positief als de deelpunten C en D ofwel beide op het lijnstuk AB ofwel beide buiten het lijnstuk AB liggen. Ligt een van de punten op het lijnstuk AB en één erbuiten, dan is de dubbelverhouding negatief.

Worden C én D of A én B in $(ABCD)$ van plaats gewisseld, dan gaat de dubbelverhouding over in het omgekeerde ervan. Dus:

$$\bullet \quad (ABCD) = \lambda \Rightarrow (ABDC) = (BACD) = \frac{1}{\lambda}$$

Worden B en C van plaats gewisseld in $(ABCD)$, dan is $(ACBD) = 1 - \lambda$.

Definitie. Verdelen de punten C en D het lijnstuk AB inwendig én uitwendig in dezelfde verhouding – met andere woorden, is $(ABC) = - (ABD)$ – dan is $(ABCD) = -1$.

In dit geval spreekt men van *harmonische ligging*. $\diamond$

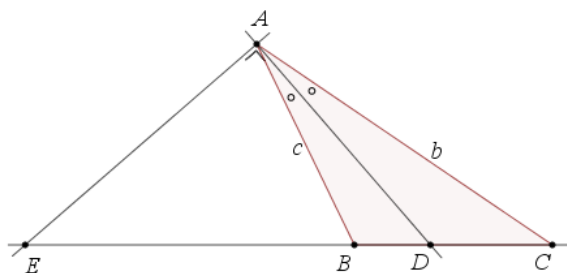
De volgende uitspraken zijn conform deze definitie gelijkwaardig.

- Het geordend puntenviertel (A, B, C, D) is een harmonisch (punten)viertal.
- De punten C en D liggen harmonisch ten opzichte van de punten A en B .
- Punt D is harmonisch toegevoegd aan punt C ten opzichte van de punten A en B .
- Het puntenpaar (A, B) wordt harmonisch gescheiden door het puntenpaar (C, D) .

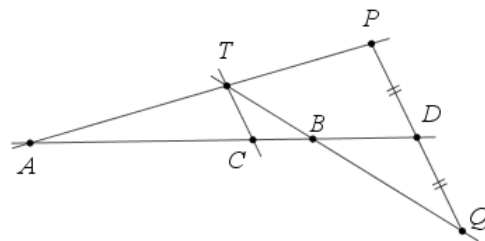
2. Twee voorbeelden en de eerste stelling

1. In driehoek ABC in figuur 1 zijn AD en AE de binnen- buitenbissectrice van hoek A .

figuur 1



figuur 2



Volgens de bissectricestelling is nu:

- $BD : CD = AB : AC = c : b$, zodat $(BCD) = k$ met $k = -\frac{c}{b}$;
- $BE : CE = c : b$, zodat $(BCE) = -k$.

En dan is: $(BCDE) = -1$.

2. In figuur 2 zijn de punten A, B, C, D collineair. Verder is $CT \parallel PQ$ en $PD = DQ$.

Nu geldt:

$$\bullet \quad DA : CA = PD : CT, \text{ zodat } (CDA) = \frac{CT}{PD}$$

en ook, wegens $PD = DQ$:

$$PD : CT = DQ : CT = DB : BC, \text{ zodat } (CDB) = -\frac{CT}{DQ}$$

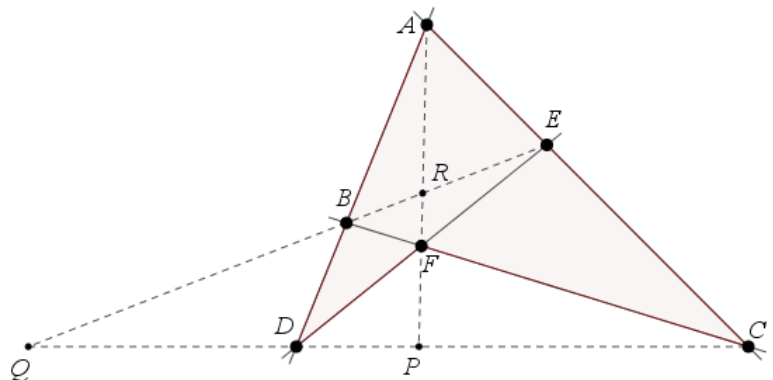
En dan is duidelijk dat $(CDA) = - (CDB)$, zodat $(CDAB) = (ABCD) = -1$. $\diamond$

figuur 3

Definitie. Een **volledige vierzijde** is een figuur bestaande uit vier (coplanaire) rechte lijnen (geen twee evenwijdig, geen drie concurrent) en hun zes snijpunten.

Naamgeving in $ABCDEF$:

- AB, BC, CD, DE : zijden
- $A, B, \dots, F$: hoekpunten
- AF, BE, CD : diagonalen
- P, Q, R : diagonaalpunten $\diamond$



Stelling 1. Twee diagonalen van een volledige vierzijde snijden de derde diagonaal in twee punten die de op die diagonaal gelegen hoekpunten harmonisch scheiden. $\diamond$

Bewijs. Ik zal bewijzen dat in figuur 3 geldt: $(CDPQ) = -1$.

Volgens de stelling van Menelaos^[1], toegepast op driehoek ADC met transversaal EBQ is:

$$(CAE)(ADB)(DCQ) = 1$$

Volgens de stelling van Ceva^[1], toepast op dezelfde driehoek met punt F als snijpunt van drie cevianen:

$$(CAE)(ADB)(DCP) = -1$$

Deling van deze beide producten van deelverhoudingen geeft:

$$\frac{(DCP)}{(DCQ)} = -1 \quad \text{of} \quad (DCPQ) = -1 = (CDPQ) \quad \diamond$$

Opmerking. Dat de harmonische ligging bij centrale projectie *invariant* is, is uit de constructie van de volledige vierzijde onmiddellijk duidelijk. In appendix A wordt daarvan een formeel bewijs gegeven. $\diamond$

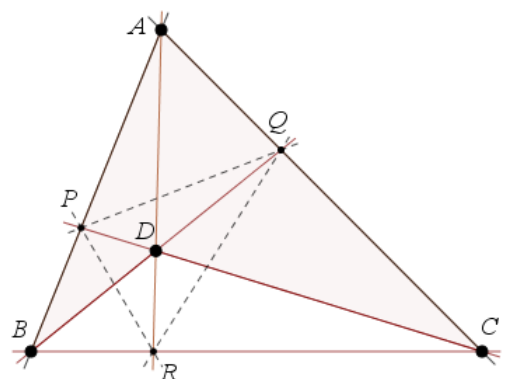
In de meetkunde geldt het zogenoemde *dualiteitsprincipe*. Daarmee kunnen onder meer definities van verschillende objecten met elkaar in verband worden gebracht. Dit is ook het geval voor de *volledige vierzijde* en de *volledige vierhoek*.

figuur 3bis

Definitie. Een **volledige vierhoek** is een figuur bestaande uit vier (coplanaire) punten (verschillend, geen drie collineair) en hun zes verbindingslijnen. $\diamond$

Naamgeving in $ABCD$:

- A, B, C, D : hoekpunten
- AB, AC, AD, BC, BD, CD : zijden
- P, Q, R : diagonaalpunten
- PQ, PR, QR : diagonalen



Meetkundig gezien zijn de objecten in figuur 3 en figuur 3bis identiek. Het verschil zit dus in de naamgeving van de elementen waaruit de figuur kan worden gedacht te zijn opgebouwd.

Stellingen over een volledige vierzijde kunnen eenvoudig worden overgedragen naar stellingen over een volledige vierhoek.

Notaties. In de projectieve meetkunde wordt een volledige vierzijde aangegeven met (6_24_3) en een volledige vierhoek met (4_36_2) . De getallen wijzen op het aantal punten, het aantal lijnen per punten, het aantal lijnen en het aantal punten per lijn.

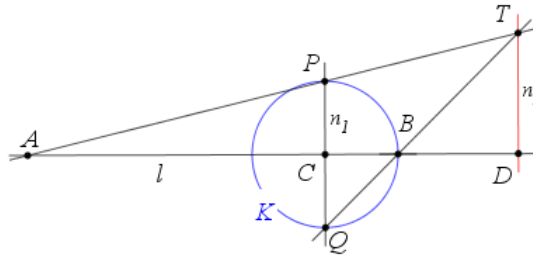
3. Constructies

Op grond van voorbeeld 2 en stelling 1 kunnen constructies worden gegeven van de vierde harmonisch D bij drie op een lijn l gegeven punten A, B, C ; een passer-en-liniaal-constructies én een liniaal-constructie.

figuur 4a

Constructiestappen

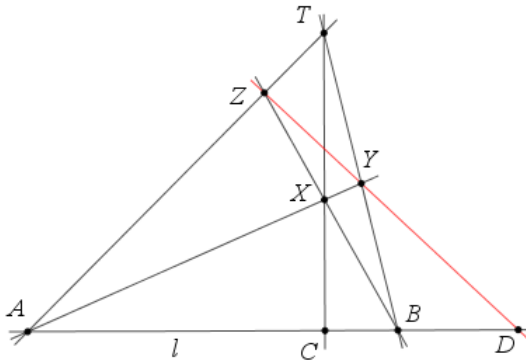
- $K = \text{Cirkel}(C, B)$
- $n_1 = \text{Loodlijn}(C, l)$
- $\{P, Q\} = \text{Snijpunten}(K, n_1)$
- $T = PA \ \& \ QB$
- $n_2 = \text{Loodlijn}(T, l)$
- $D = n_2 \ \& \ l$



figuur 4b

Constructiestappen

- $T = \text{Punt} \ // \ \text{willekeurig}$
- $X = \text{PuntOpObject}(TC)$
- $Y = AX \ \& \ BT$
- $Z = BX \ \& \ AT$
- $D = YZ \ \& \ l$



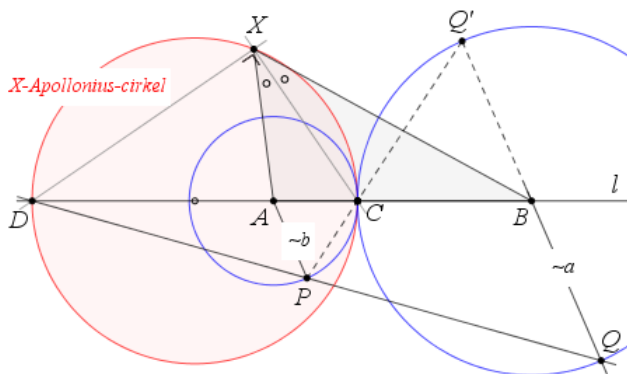
Opmerking. Ook op voorbeeld 1 kan een constructie worden gebaseerd, maar deze komt min of meer overeen met de eerste constructie. Zie daartoe figuur 5.

In een driehoek ABX waarvan C en D de snijpunten zijn van de bissectrices van hoek X met de zijde AB , ligt het punt X namelijk op de zogeheten *Apollonius-cirkel* van het punt X . Deze cirkel wordt bepaald wordt door de verhouding $b : a = AX : BX$.^[2] Maar ook is op basis van de bissectricestelling:

- $CA : CB = b : a = DA : DB$

De X-Apollonius-cirkel heeft hier het lijnstuk CD als middellijn.

figuur 5



De lengtes van stralen van de cirkels (A, AC) en (B, BC) hebben daarmee ook de verhouding $b : a$ (in figuur 5 zijn die lengtes $\sim b$ en $\sim a$). Daarbij is P willekeurig op (A, AC) gekozen en ligt Q zo op (B, BC) dat $BQ \parallel AP$.

Uit de constructie blijkt direct dat:

- $DA : DB = AP : BQ = b : a$

Met Q' als tegenpunt van Q op de cirkel (B, BC) blijkt:

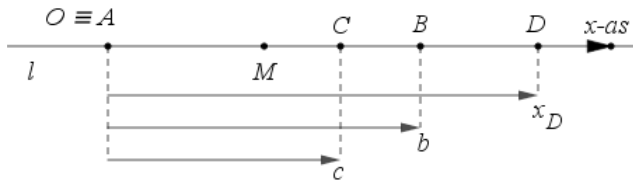
- $CA : CB = AP : BQ' = b : a$

Dus is, rekening houdend met de plaats van de punten op de lijn l , inderdaad $(ABCD) = -1$. $\diamond$

Stelling 2. Bij elk drietal (verschillende) punten op een rechte lijn is er precies één vierde harmonisch punt. $\diamond$

Bewijs. Ik breng op de lijn l een lijncoördinatenstelsel aan met $O \equiv A$, en waarbij het punt B op de positieve as ligt.

figuur 6



Ik kies $B = (b)$, $C = (c)$ en $D = (x_D)$ met C rechts van het midden M van AB maar wel op AB .
Uit $(ABCD) = -1$ volgt nu dat het punt D op het verlengde van AB ligt. Dan blijkt, rekenend met de lengtes van de lijnstukken (en $x_D = x$):

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{c}{b-c} = \frac{x}{x-b} \Rightarrow (2c-b)x = bc$$

En uit de laatste relatie volgt precies één waarde van $x = x_D$.

Ligt het punt C links van het punt M (maar op AB), dan ligt het punt D op het verlengde van BA : $x = x_D < 0$. Maar ook in dit geval (dan is $2c - b < 0$) is er precies één waarde van x_D .

N.B. Als C samenvalt met M (dus $\frac{CA}{CB} = 1$, $c = \frac{1}{2}b$), bestaat x niet, en het punt D dus evenmin. Echter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{DA}{DB} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-b} = 1$$

In dit geval is D het oneigenlijke punt van de lijn l . $\diamond$

4. Verder rekenen

Voor het midden M van een lijnstuk AB is $(ABM) = -1$. Dus: $MA = -MB$.

Uit $(ABCD) = -1$ blijkt voor deze vier punten (rekening houdend met het 'teken' van elk lijnstuk) dat:

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1 \Rightarrow (ABC) + (ABD) = 0 \Rightarrow \frac{CA}{CB} + \frac{DA}{DB} = 0 \quad \text{of:}$$

$$CA \cdot DB + DA \cdot CB = 0 \Rightarrow (-AC) \cdot DB + (-AD) \cdot CB = 0$$

Dus:

$$AC \cdot DB + AD \cdot CB = 0$$

Met M als midden van AB is nu, en zie eerst figuur 6:

- $AC = MC + AM = MC - MA$
- $BD = MD - MB \Rightarrow DB = MB - MD$
- $AD = AM + MD = MD - MA$
- $CB = MB - MC$

En daarmee gaat $AC \cdot DB + AD \cdot CB = 0$ over in:

$$(*) \dots (MC - MA)(MB - MD) + (MD - MA)(MB - MC) = 0$$

Zodat, met:

- $MB - MD = -MA - MD = -(MA + MD)$ en met:
- $MB - MC = -(MC - MB) = -(MC + MA)$

de relatie (*) overgaat in:

- $(MC - MA)(MA + MD) + (MD - MA)(MA + MC) = 0 \Rightarrow$
 $2 \cdot MC \cdot MD - 2 \cdot (MA)^2 = 0 \Rightarrow$
- $(MA)^2 = MC \cdot MD$ en ook $(MB)^2 = MC \cdot MD$

Samengevat:

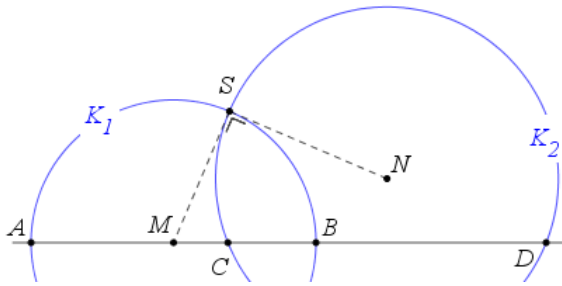
$$(ABCD) = -1 \text{ en } M \text{ midden van } AB \Rightarrow (MA)^2 = MC \cdot MD$$

Het omgekeerde hiervan geldt ook:

$$(MA)^2 = MC \cdot MD \text{ én } M \text{ midden van } AB \Rightarrow (ABCD) = -1$$

5. Loodrecht snijdende cirkels

figuur 7a



Ik ga uit van twee elkaar loodrecht in het punt S snijdende cirkels K_1 en K_2 (zie figuur 7a). K_1 heeft M als middelpunt en AB als middellijn, K_2 gaat door de punten C en D en heeft N als middelpunt.

Ik kijk nu naar de macht m van het punt M ten opzichte van cirkel K_2 .

Er geldt:

$$m(M, K_2) = MS^2 = MC \cdot MD$$

En dus ook, wegens $MA (= MB) = MS$:

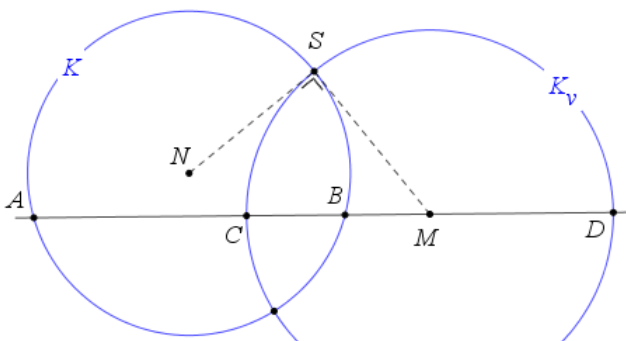
$$MA^2 = MC \cdot MD \Rightarrow (ABCD) = -1.$$

Omgekeerd. Is $MC \cdot MD = MA^2 = MS^2$, dan volgt daaruit de loodrechte snijding van de beide cirkels.

Ik formuleer deze eigenschap in de volgende stelling.

Stelling 3. Indien van twee paren collineaire punten de punten van het ene paar (A, B) diametraal liggen op een cirkel, en een tweede cirkel gaat door de punten van het andere paar (C, D), dan geldt: de puntenparen scheiden elkaar harmonisch *desda* de cirkels snijden elkaar loodrecht. $\diamond$

figuur 7b



Gevolg. Zie figuur 7b. De punten C, D verdelen het lijnstuk AB in- en uitwendig in de verhouding $v (\neq 1)$. Het punt M is het midden van CD en tevens middelpunt van de cirkel K_v door C en D .

K_v is dan de zogeheten Apollonius-cirkel bij de verhouding v (zie stelling 4).

Een willekeurige cirkel K door de punten A en B wordt dan door K_v loodrecht gesneden. $\diamond$

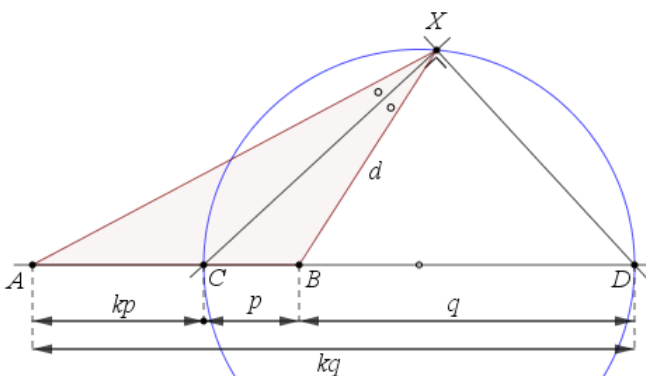
Stelling 4. De meetkundige plaats van de punten X , waarvoor $XA : XB = k : 1$ (met $k > 0, k \neq 1$) is een cirkel met CD als middellijn, waarbij C en D punten zijn die het lijnstuk AB in- en uitwendig verdelen in de verhouding k . Deze cirkel heet **Apollonius-cirkel** bij de verhouding k . $\diamond$

Bewijs. Ik ga uit van de collineaire punten A, B, C, D . Daarbij stel ik: $BC = p, BD = q$. Dan is:

$$AC = kp \quad \text{en} \quad AD = kq$$

Deel 1 – gegeven is $XA : XB = k : 1$; zie figuur 8a.

figuur 8a



Met $XB = d$ is dan $XA = kd$. Dan blijkt dat:

- $XA : XB = k : 1 = kp : p = AC : BC$ én
- $XA : XB = k : 1 = kq : q = AD : BD$

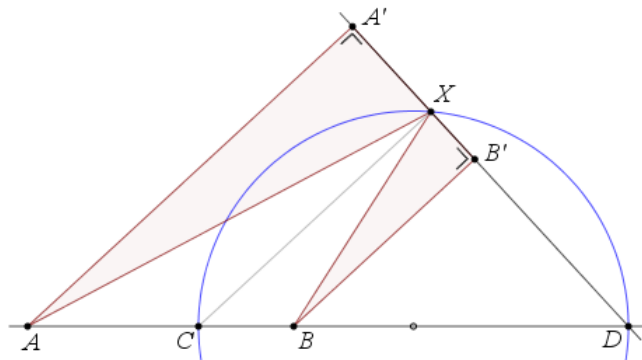
De lijnen XC en XD zijn dan (volgens de omgekeerde bissectricestelling) de bissectrices van hoek X van driehoek ABX .

Deze lijnen staan in X loodrecht op elkaar: $\angle CXD = 90^\circ$.

Conclusie: X ligt op de cirkel met middellijn CD .

Deel 2 – gegeven is nu dat X op de cirkel met middellijn CD ligt; zie figuur 8b.

figuur 8b



A', B' zijn de projecties van A, B op de lijn door D en X .

Nu is:

$$BB' : AA' = DB : DA = q : kq = 1 : k$$

En ook:

$$B'X : XA' = BC : CA = p : kp = 1 : k$$

Zodat:

$$BB' : AA' = B'X : XA'$$

De driehoeken $AA'X$ en $BB'X$ zijn daarmee gelijkvormig (zhz). Zodat ook:

$$AX : BX = AA' : BB' = k : 1$$

Uit hetgeen in deel 1 en deel 2 bewezen is ^[3], volgt nu stelling 3. $\diamond$

Opmerking. In appendix B wordt stelling 4 analytisch bewezen. $\diamond$

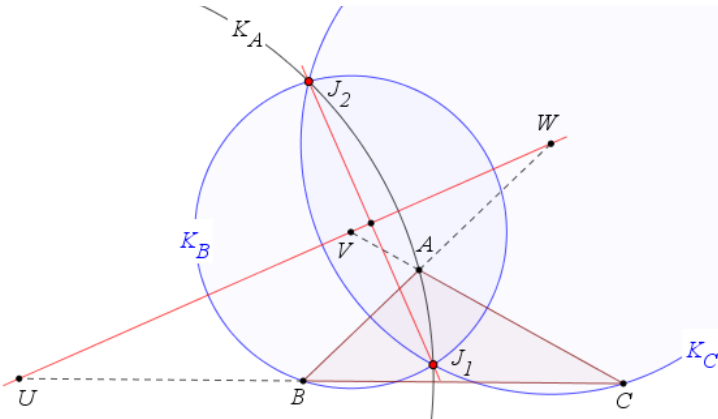
6. Apollonius-cirkels van een driehoek, isodynamische punten

De lengtes a, b, c van de zijden van een driehoek ABC bepalen drie verhoudingen, te weten: $\frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{b}$

waarmee dus ook drie Apollonius-cirkels bij die driehoek kunnen worden vastgelegd.

Deze cirkels worden wel aangeduid als A-, B- en C-Apollonius-cirkels. In figuur 9 zijn die cirkels getekend met opvolgend middelpunt U op BC , V op CA en W op AB .

figuur 9



Stelling 5. De Apollonius-cirkels van een (niet-gelijkzijdige) driehoek snijden elkaar in twee punten. $\diamond$

Bewijs. Ik orden de namen van de hoekpunten van de driehoek zó dat $a > b > c$.

De Apollonius-cirkels geef ik de namen K_A, K_B, K_C .

Voor een punt X op K_B geldt: $XA : XC = c : a$. Omdat $c < a$ is, ligt het punt A binnen deze cirkel.

Voor een punt X op K_C geldt: $XA : XB = b : a$. Omdat $a > b$, ligt B buiten deze cirkel.

Beide cirkels hebben dus twee snijpunten. Stel dat J ($\equiv J_1$ c.q. J_2) zo'n snijpunt is.

Voor J geldt dan: $\frac{JA}{JC} = \frac{c}{a}$ én $\frac{JA}{JB} = \frac{b}{a}$. Dus is:

$$\frac{JB}{JC} = \frac{JA}{JC} \cdot \frac{JB}{JA} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b}$$

Waaruit volgt dat zo'n punt J (c.q. J_1 en J_2) ook ligt op de Apollonius-cirkel K_A . $\diamond$

Een direct gevolg van stelling 5 is:

Stelling 6. De middelpunten van de Apollonius-cirkels van een driehoek zijn collineair. $\diamond$

Bewijs. De drie cirkels hebben een gemeenschappelijke koorde, namelijk de lijn J_1J_2 . Elk middelpunt ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk J_1J_2 . Waaruit het gestelde volgt. $\diamond$

Opmerkingen. 1. De collineatie-as van de middelpunten van de Apollonius-cirkels is de zogeheten *Lemoine-as* van driehoek ABC .

2. De (drager van de) gemeenschappelijke koorde J_1J_2 van de Apollonius-cirkels is de zogeheten *Brocard-middellijn* van de omcirkel van driehoek ABC . Het middelpunt van de omcirkel van driehoek ABC is namelijk gelegen op die koorde; zie het gevolg van stelling 9. $\diamond$

3. De punten J_1 en J_2 zijn de zogeheten *isodynamische punten* van driehoek ABC . Een verklaring van deze naam is wellicht op z'n plaats:

- Grieks: ἴσος (isos) = gelijk, δυνάμις (dunamis) = macht

De beide punten hebben namelijk *gelijke machten bij de hoekpunten* van de driehoek.

De *macht van een punt X bij een hoekpunt A* van driehoek ABC wordt gedefinieerd door:

- $m(X, A, ABC) = XA \cdot BC$

Omdat J_1 op de A-Apollonius-cirkel ligt, geldt:

$J_1B : J_1C = c : b = AB : AC$ waaruit volgt dat $J_1B \cdot AC = J_1C \cdot AB$. Of anders gezegd:

- $m(J_1, B, ABC) = m(J_1, C, ABC)$

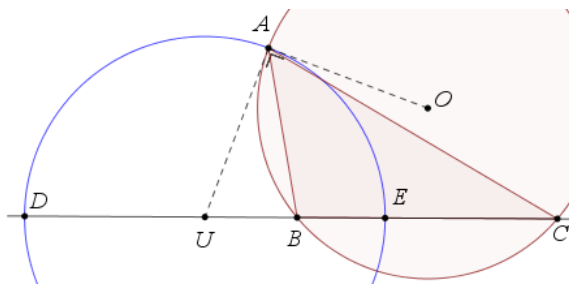
Overigens, de A-Apollonius-cirkel is dus de meetkundige plaats van de punten die gelijke machten hebben bij de hoekpunten B en C van driehoek ABC .

Omdat J_1 en J_2 de gemeenschappelijke punten zijn van de drie Apollonius-cirkels, is dus:

- $m(J_i, A, ABC) = m(J_i, B, ABC) = m(J_i, C, ABC)$ voor $i = 1, 2$

Stelling 7. Elk van de Apollonius-cirkels van een driehoek snijdt de omcirkel van die driehoek loodrecht. ◇

figuur 10



Bewijs. In figuur 10 heeft de A-Apollonius-cirkel van driehoek ABC middelpunt U . Snijpunten van die cirkel met BC zijn de punten D, E .

Door de constructie scheiden de punten D, E, B, C elkaar harmonisch op de lijn BC ; zie de opmerking na constructie 2 hierboven.

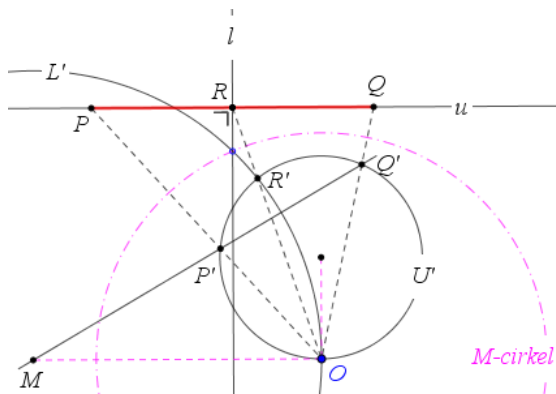
De omcirkel (middelpunt O) gaat door B, C op die lijn.

Conform stelling 3 snijden beide cirkels elkaar dan loodrecht (o.a. in het punt A): $\angle OAU = 90^\circ$.

Analoog geldt een en ander natuurlijk ook voor de B- en C-Apollonius-cirkel van de driehoek. ◇

Lemma 8. Als een lijn l door een inversie $M^{[4]}$ wordt afgebeeld op een cirkel L' en P' en Q' zijn de M -beelden van twee symmetrisch ten opzichte van l liggende punten P en Q , dan zijn P' en Q' elkaars beeld bij een inversie met L' als inversiecirkel. ◇

figuur 11



In figuur 11 is O het middelpunt van de inversiecirkel van M .

Het M -beeld van de drager u van de punten P en Q is de cirkel U' .

M is het middelpunt van de M -beeldcirkel L' van de lijn l .

Bewijs. Omdat u en l loodrecht op elkaar staan én omdat M een hoektrouwe afbeelding is, snijden de cirkels U' en L' elkaar loodrecht in het punt O .

De lijn MO is daarom raaklijn in O aan U' . Verder zijn de punten P', Q' en M collineair, zodat geldt (voor de macht van M bij de cirkel U'):

- $MO^2 = MP' \cdot MQ'$

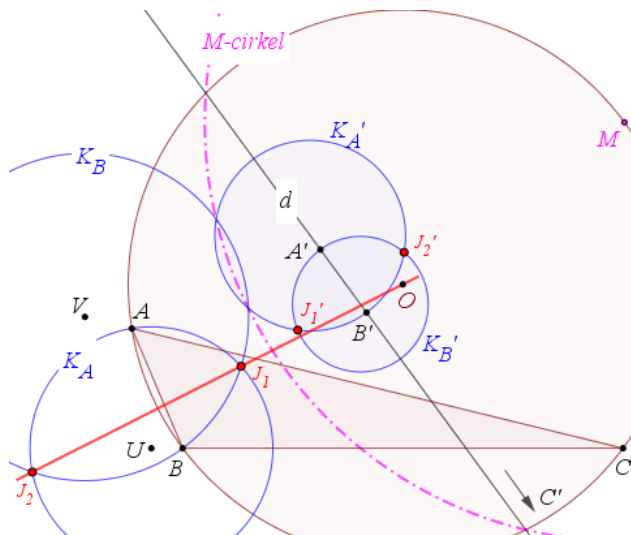
Met k als lengte van de straal is van de cirkel L' , is deze laatste relatie te schrijven als:

- $MP' \cdot MQ' = k^2$

En dit zegt niets anders dan dat P' en Q' elkaars beeld zijn bij een inversie met centrum M en macht k . ◇

Stelling 9. De isodynamische punten van een driehoek zijn elkaars beeld bij een inversie met de omcirkel van die driehoek als inversiecirkel. ◇

figuur 12



In figuur 12 zijn getekend:

- de Apollonius-cirkels K_A en K_B ;
- de isodynamische punten J_1 en J_2 ;
- de omcirkel van driehoek ABC met middelpunt O ;
- een willekeurig punt M op die omcirkel.

Bewijs. Ik kies een willekeurige inversiecirkel bij M maar wel met het punt M als centrum (gestippelde inversiecirkel).

Het M -beeld van de omcirkel is nu een rechte lijn d , omdat M op die omcirkel ligt.

De M -beelden A' , B' en C' van A , B , C liggen op de lijn d .

De M -beelden K_A' (die gaat door A') en K_B' (die gaat door B') van de beide Apollonius-cirkels zijn ook weer cirkels die elkaar snijden in de M -beelden J_1' , J_2' van de punten J_1 , J_2 . De punten J_1' , J_2' liggen symmetrisch ten opzichte van de lijn d omdat A' , B' , C' op d liggen.

Bij de inversie die de lijn d afbeeldt op de omcirkel van driehoek ABC – en dat is een andere inversie dan M – zijn de punten J_1 , J_2 elkaars beeld, een en ander conform lemma 8. $\diamond$

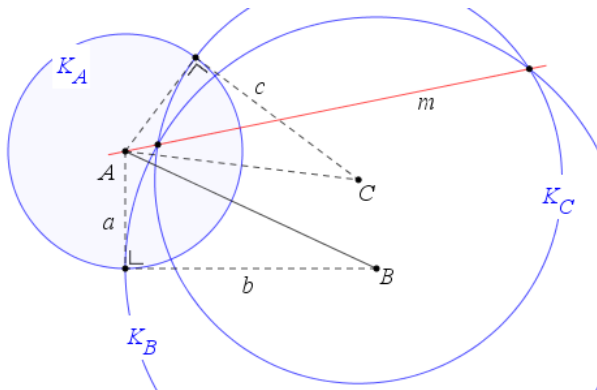
Gevolg. Het middelpunt O van de omcirkel van driehoek ABC ligt op de lijn J_1J_2 , de verbindinglijn van de isodynamische punten.

Deze lijn is dus een middellijn van de omcirkel. Die lijn is de al eerder genoemde Brocard-middellijn van de omcirkel. $\diamond$

7. Intermezzo

Stelling 10. Als een cirkel twee andere cirkels loodrecht snijdt, dan ligt het middelpunt van die cirkel op de machtlijn van beide andere cirkels. $\diamond$

figuur 13a



Bewijs. In figuur 13a snijdt de cirkel $K_A = (A, a)$ de cirkels $K_B = (B, b)$ en $K_C = (C, c)$ loodrecht.

Hierbij is dan:

- $a^2 = AB^2 - b^2$
- $a^2 = AC^2 - c^2$

De rechterleden van deze relaties zijn de machten van het punt A bij K_B en bij K_C .

En, die machten zijn gelijk!

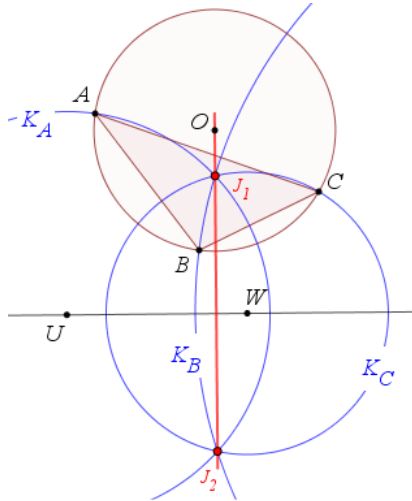
En daarmee ligt het punt A op de machtlijn m van K_A en K_B . $\diamond$

Met behulp van stelling 10 kan een tweede bewijs worden gegeven van het gevolg van stelling 9:

Het middelpunt van de omcirkel ligt op de verbindinglijn van de isodynamische punten van die driehoek.

Dit bewijs is onafhankelijk van stelling 9 en er wordt daarin geen gebruik gemaakt van inversie.

figuur 13b



Bewijs. Elk tweetal Apollonius-cirkels van driehoek ABC wordt door de omcirkel (O, r) loodrecht gesneden.

Volgens stelling 10 ligt het punt O dan op de machtlijn van elk tweetal Apollonius-cirkel:

$$\blacksquare \quad m(O, K_A) = m(O, K_B) = m(O, K_C) = r^2$$

Evenwel, die machtlijnen vallen samen; het is de lijn door de isodynamische punten J_1, J_2 .

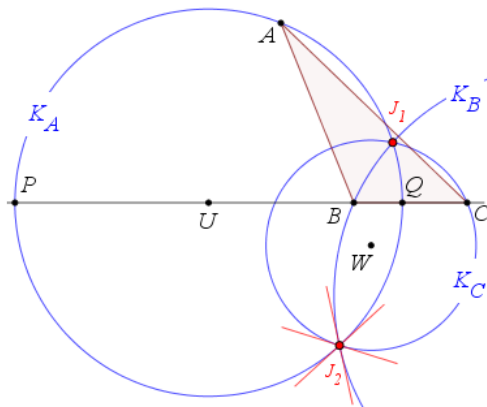
Het punt O ligt dus op de lijn J_1J_2 . Met andere woorden: de lijn J_1J_2 is een middellijn van de omcirkel van driehoek ABC .

In paragraaf 4, Verder rekenen, bleek, met M als midden van het lijnstuk AB :

$$\blacksquare \quad (ABCD) = -1 \Leftrightarrow MA^2 = MC \cdot MD$$

Zodat op basis van deze relatie geldt: de punten C en D zijn elkaars beeld bij een inversie met de cirkel op AB als inversiecirkel.

figuur 13c



Zie nu figuur 13c.

Een en ander geldt dus ook voor de punten B en C bij de inversie met de cirkel K_A (middenpunt U) bij driehoek ABC . Immers, $(PQBC) = -1$ en U is het midden van PQ .

Deze inversie met cirkel K_A als inversiecirkel geef ik aan met M_U . Dan is daarbij:

$$\begin{cases} M_U(B) = C \\ M_U(J_1) = J_1 \Leftrightarrow M_U(K_B) = K_C \\ M_U(J_2) = J_2 \end{cases}$$

Analoog zijn de inversies M_V (inversiecirkel K_B) en M_W (inversiecirkel K_C) vastgelegd. Toepassing daarvan geeft:

$$\blacksquare \quad M_V(K_C) = K_A \quad \text{en} \quad M_W(K_A) = K_B$$

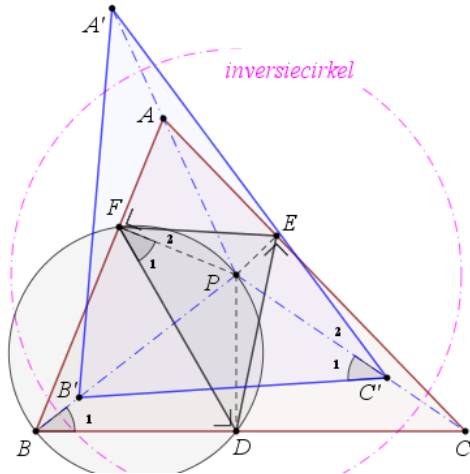
Elke inversie M_I ($I = U, V, W$) is een hoektrouwe afbeelding. De hoeken tussen elk tweetal Apollonius-cirkels zijn dus gelijk. Met andere woorden:

Stelling 11. De Apollonius-cirkels van een driehoek snijden elkaar twee aan twee onder een hoek van 60° . $\diamond$

8. Wat meer inversie

Stelling 12. De beelden van de hoekpunten van een gegeven driehoek bij een inversie met een willekeurig punt als inversiecentrum, zijn de hoekpunten een driehoek die gelijkvormig is met de voetpuntdriehoek ^[5] van dat punt bij die gegeven driehoek. $\diamond$

figuur 14



In figuur 14 is P een willekeurig punt.

Driehoek DEF is de voetpuntdriehoek van P bij driehoek ABC .

De hoekpunten van driehoek $A'B'C'$ zijn de beelden van de punten A, B, C bij een inversie met P als centrum (en de gestreepte inversiecirkel).

Te bewijzen is nu: $\Delta A'B'C' \sim \Delta DEF$.

Bewijs. Het lijnstuk $B'C'$ is in driehoek PBC antiparallel aan CB (dit is een gevolg van de hoektrouw bij inversie^[4]).

Dus:

$$\angle B_1 = \angle PBC = \angle PC'B' = \angle C'_1$$

Vierhoek $BDPF$ is een koordenvierhoek, zodat:

$$\angle B_1 = \angle PFD = \angle F_1$$

En dan is $\angle C'_1 = \angle F_1$.

Analoog kan worden aangetoond dat $\angle C'_2 = \angle F_2$. Waarmee in driehoek $A'B'C'$ en in driehoek DEF geldt:

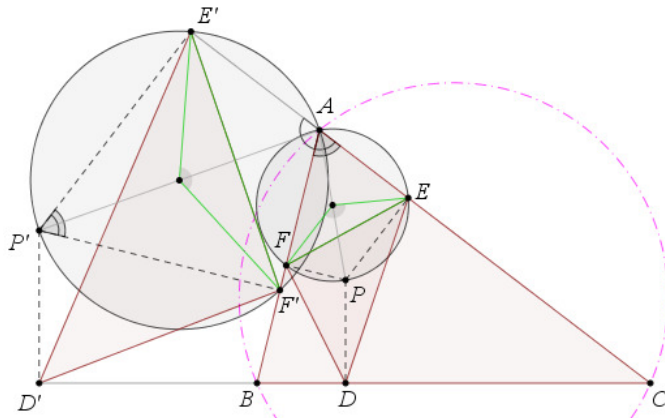
$$\angle C' = \angle F$$

In die driehoeken is dan mutatis mutandis ook $\angle B' = \angle E$ (en $\angle A' = \angle D$).

En daarmee is de gelijkvormigheid (hh) van de driehoeken $A'B'C'$ en DEF aangetoond. $\diamond$

Stelling 13. De voetpuntdriehoeken van beeld en beeldpunt bij een inversie, met de omcirkel van de driehoek als inversiecirkel, zijn gelijkvormig. $\diamond$

figuur 15



In figuur 15 zijn gegeven:

- de punten P en P' die elkaars beeld zijn bij de inversie in de omcirkel van driehoek ABC ;
- driehoek DEF die de voetpuntdriehoek is van P ;
- driehoek $D'E'F'$ die de voetpuntdriehoek is van P' (maar, D', E', F' zijn niet de inversen van D, E, F).

Bewijs. Vierhoek $AFPE$ is een koordenvierhoek met 'middellijn' AP . Vierhoek $AE'P'F'$ is eveneens een koordenvierhoek, met 'middellijn' AP' . Hoek A in $AFPE$ is een buitenhoek van hoek A in $AE'P'F'$. Dus is in die vierhoeken:

$$\angle P' = \angle A$$

De bijbehorende middelpuntshoeken zijn dus eveneens gelijk, waarmee de middelpuntsdriehoeken op EF en $E'F'$ gelijkvormig zijn (zh). Gevolg:

$$EF : E'F' = AP : AP'$$

Analoog kan dan worden aangetoond dat:

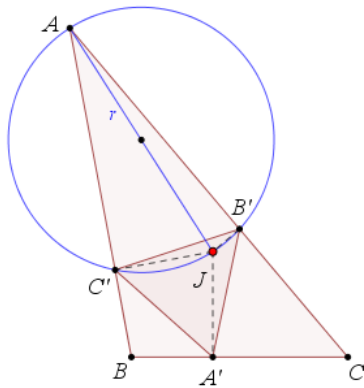
$$FD : FD' = BP : BP' \quad \text{en} \quad DE : D'E' = CP : CP'$$

De rechterleden van de laatste drie uitdrukkingen zijn aan elkaar gelijk (gelijk aan dezelfde constante).^[6]

En daarmee ook de linkerleden. Conclusie: de driehoeken DEF en $D'E'F'$ zijn gelijkvormig (zzz). $\diamond$

Stelling 14. De voetpuntdriehoek van een isodynamisch punt van een driehoek is gelijkzijdig. $\diamond$

figuur 16



In figuur 16 is J een van de isodynamische punten van driehoek ABC . $A'B'C'$ is de voetpuntdriehoek van het punt J .

Bewijs. Omdat J op elk van de Apollonius-cirkels van driehoek ABC ligt, zijn de machten van J bij ieder hoekpunt van driehoek ABC gelijk (zie opmerking 3 na stelling 6); zeg gelijk aan m :

$$m = JA \cdot BC = JB \cdot CA = JC \cdot AB$$

Verder is vierhoek $AB'JC'$ een koordenvierhoek met ‘middellijn’ $JA (= 2r)$. In driehoek $AB'C'$ is nu (volgens de sinusregel):

$$\frac{B'C'}{\sin A} = 2r = JA \Rightarrow B'C' = JA \cdot \sin A = JA \cdot \frac{BC}{2R} = \frac{m}{2R}$$

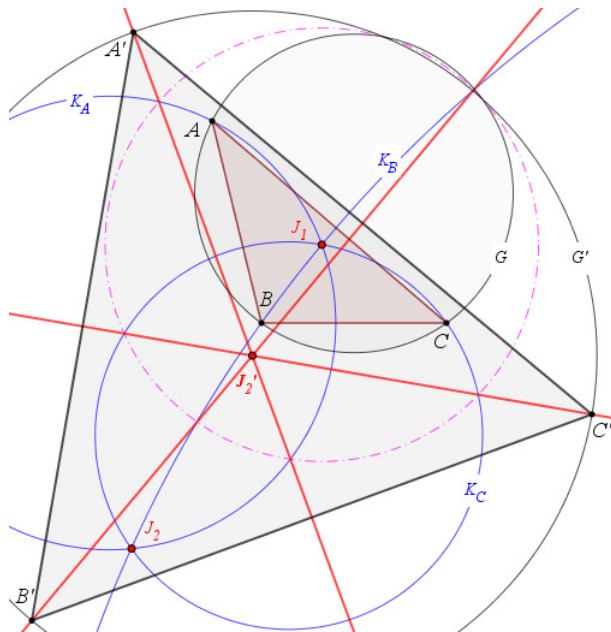
waarin R de lengte van de straal van de omcirkel van driehoek ABC is,

En analoog kan worden aangetoond dat ook $C'A' = \frac{m}{2R} = A'B'$.

Dus: $A'B' = B'C' = C'A'$, en dit zegt genoeg. $\diamond$

Dit biedt ook de mogelijkheid een ander bewijs te geven van stelling 11: *de hoek waaronder twee Apollonius-cirkels van een driehoek elkaar twee aan twee snijden is gelijk aan 60° .*

figuur 17



In figuur 17 zijn de hoekpunten van driehoek $A'B'C'$ de beelden van A, B, C bij een inversie met het (eerste) isodynamische punt J_1 van driehoek ABC als inversiecentrum (en met een willekeurige macht; *gestippelde cirkel*).

Het punt J_2' is het inversiebeeld van J_2 .

De Apollonius-cirkels K_A, K_B, K_C gaan over in drie rechte lijnen door J_2' omdat het inversiecentrum op elk van die cirkels ligt.

Elk van deze lijnen gaat uiteraard ook door een hoekpunt van driehoek $A'B'C'$.

De omcirkel G van driehoek ABC gaat over in de omcirkel G' van driehoek $A'B'C'$.

Bewijs. Driehoek $A'B'C'$ is gelijkzijdig omdat die driehoek gelijkvormig is met de (niet-getekende) voetpuntdriehoek van J_1 (conform stelling 14).

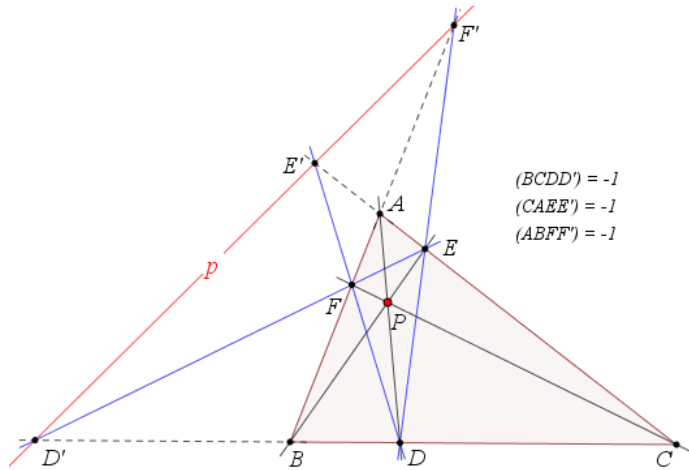
De beelden van de Apollonius-cirkels (de rechte lijnen door J_2') snijden de omcirkel G' van driehoek $A'B'C'$ loodrecht, omdat de inversie hoektrouw is (de omcirkel zelf snijdt elk van de Apollonius-cirkels immers loodrecht; stelling 7). Die rechte lijnen zijn dus de hoogtelijnen van driehoek $A'B'C'$.

En de hoogtelijnen van een gelijkzijdige driehoek snijden elkaar twee aan twee onder een hoek van 60° .

De Apollonius-cirkels doen dat dus ook, opnieuw vanwege de hoektrouw van de inversie. $\diamond$

9. Harmonikaal

figuur 18



Het punt P is een willekeurig punt in het vlak van driehoek ABC .

De lijnen PA, PB, PC zijn cevianen. De punten D, E, F zijn de snijpunten ervan met de zijden van de driehoek.

D', E', F' zijn de 4e harmonische punten bij de puntendrietallen $(B, C, D), (A, C, E), (A, B, F)$.

Uit de constructie voor harmonische punten (zie Paragraaf 3, de tweede constructie) volgt onmiddellijk dat $D' = EF \cap BC$, enz.

De driehoeken ABC en DEF zijn perspectief met P als perspectiefcentrum.

Volgens de stelling van Desargues^[7] zijn de punten D', E', F' collineair. Als stelling geformuleerd:

Stelling 15. De vierde harmonische punten elk bij het snijpunt van drie elkaar in een punt P snijdende hoektransversalen van een driehoek met een zijde en de beide hoekpunten op die zijde, zijn collineair op een rechte lijn p . $\diamond$

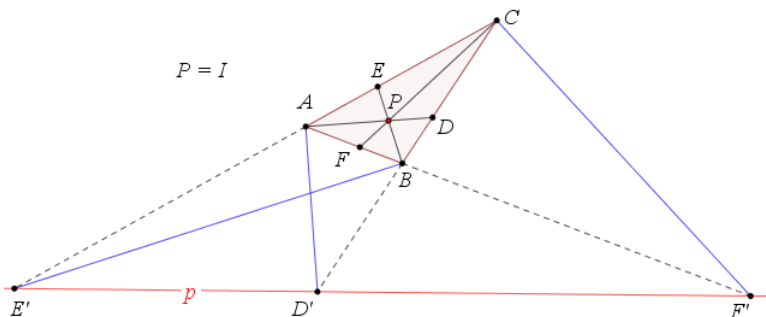
Opmerking. Zie ook paragraaf 11 voor een bewijs met projectieve afbeeldingen. $\diamond$

Op basis van stelling 15 is dan:

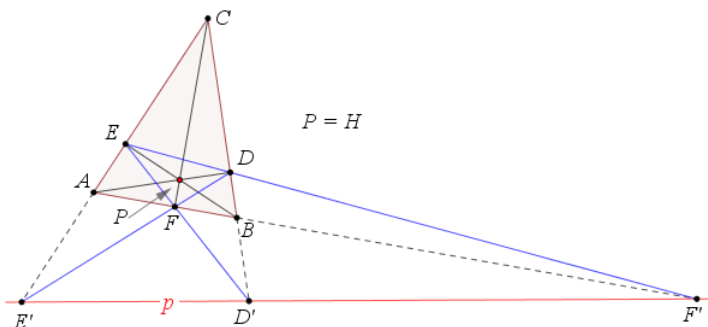
Definitie. Het punt P is het **harmonikaalpunt** (of de **pool**) van de lijn p bij driehoek ABC . De lijn p heet **harmonikaal** (of **poollijn**) van het punt P bij de driehoek. $\diamond$

Gevolgen

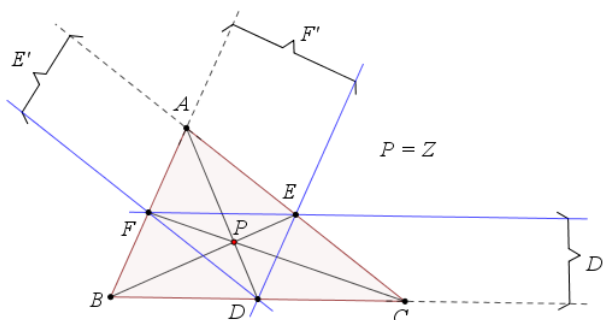
figuur 19a



figuur 19b



figuur 19c



1. Als P het incentrum van driehoek ABC is ($P \equiv I$), dan snijden de buitenbissectrices van de hoeken de overstaande zijden in drie collineaire punten.

2. P is het hoogtepunt ($P \equiv H$). De zijden van de hoogtepuntsdriehoek (d.i. de voetpuntsdriehoek) snijden de overeenkomstige zijden in collineaire punten.

Zie ook stelling 16 hierna.

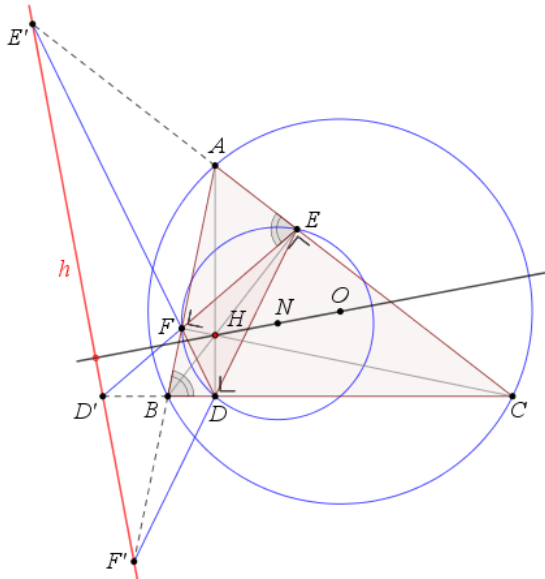
3. P is het zwaartepunt ($P \equiv Z$). De harmonikaal van Z is de oneigenlijke rechte; of uiteraard ook: Z is het harmonikaalpunt van de oneigenlijke rechte bij driehoek ABC .

In dit geval zijn D', E', F' het oneigenlijk punt van opvolgend BC, CA, AB .

In gevolg 2 van stelling 15 werd duidelijk dat de zijden van de voetpuntdriehoek (van het hoogtepunt) en de zijden van de driehoek elkaar twee aan twee snijden op de harmonikaal van het hoogtepunt. Deze lijn kan ook in verband worden gebracht met twee bijzondere cirkels van een driehoek. Want:

Stelling 16. De harmonikaal h van het hoogtepunt H van een driehoek ABC is de machtslijn van de negenpunts cirkel en de omcirkel van die driehoek. $\diamond$

figuur 20



Bewijs. Omdat EF antiparallel is aan BC is:

$$\angle AEF = \angle ABC = \angle B$$

En dan is $\angle BEF = 90^\circ - \angle B$.

In driehoek BCF is $\angle BCF = 90^\circ - \angle B$.

De driehoeken $D'BE$ en $D'FC$ hebben naast bovengenoemde hoeken ook hoek D' gemeenschappelijk.

Dus is $D'BE$ gelijkvormig met $D'FC$ (hh).

En daaruit volgt:

$$D'B : D'F = D'E : D'C$$

of:

$$D'B \cdot D'C = D'F \cdot D'E$$

Maar:

- $D'B \cdot D'C = \text{macht}(D', \text{omcirkel})$ en:
- $D'F \cdot D'E = \text{macht}(D', \text{negenpunts cirkel})$

Het punt D' heeft dus *gelijke* machten bij beide cirkels. Analoog kan worden aangetoond dat dit ook geldt voor de punten E' en F' .

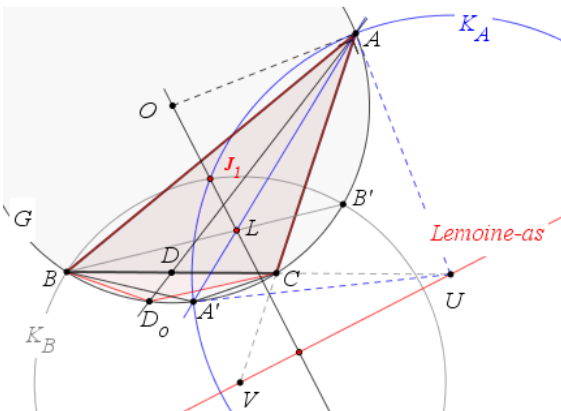
De lijn h , waarop die drie punten liggen, is dus de *machtslijn* van de negenpunts cirkel en de omcirkel van driehoek ABC . En dit moest bewezen worden. $\diamond$

Gevolg. De lijn ON is de centraal van beide cirkels (O is het middelpunt van de omcirkel en N is het middelpunt van de negenpunts cirkel).

De lijn ON , die ook door H gaat, staat daarmee loodrecht op de lijn h . $\diamond$

10. De Lemoine-as en het Lemoine-punt

figuur 21



In figuur 21 zijn K_A (middelpunt U) en K_B (middelpunt V) Apollonius-cirkels van driehoek ABC .

UV is de Lemoine-as van de driehoek (zie opmerking 1 bij stelling 6).

G is de omcirkel van driehoek ABC (middelpunt O).

A' is het van A verschillend snijpunt van G en K_A .

Ik zoek nu de *pool* van de Lemoine-as bij G . Dat is dus het punt – zeg L – waarvan de Lemoine-as de *poollijn* is bij de omcirkel G .

Uit de zogeheten pooltheorie is bekend:

Lemma 18. Als, bij een gegeven cirkel, een punt P op de poollijn q van een punt Q ligt, dan ligt Q op de poollijn p van P . $\diamond$

Bewijs. Zie appendix C voor een analytisch bewijs. $\diamond$

Zoals bekend (stelling 7) snijden de cirkels G en K_A elkaar loodrecht: $\angle UAO = \angle UA'O = 90^\circ$.
Daarmee is AA' de poollijn van U (en analoog is BB' de poollijn van V).
Het gezochte punt L moet dus op AA' liggen (en dan natuurlijk óók op BB'), conform lemma 18.

Ik zal nu aantonen, dat de lijn AA' een symmediaan^[8] is van driehoek ABC .

Omdat A' op cirkel K_A ligt, is (per definitie; zie stelling 4):

$$(10.1) \dots A'B : A'C = AB : AC = c : b$$

Zij nu D het midden van BC , en D_o het van A verschillend snijpunt van AD met de omcirkel.

In de koordenvierhoek $ABGC$ geldt, met Φ als functie die de oppervlakte van een meetkundig object bepaalt:

$$\Phi(ABF) = \Phi(ACF) \quad \text{en} \quad \Phi(BGF) = \Phi(CGF) \quad (\text{in beide gevallen: gelijke bases, gelijke hoogten})$$

Ook is:

$$\Phi(ABG) = \frac{1}{2} AB \cdot BD_o \cdot \sin(\angle ABD_o) \quad \text{en} \quad \Phi(ACG) = \frac{1}{2} AC \cdot CD_o \cdot \sin(\angle ACD_o)$$

Dus, vanwege die gelijke oppervlaktes:

$$(10.2) \dots CD_o : BD_o = AB : AC = c : b$$

Omdat BG een gemeenschappelijke koorde van G en K_A is, zijn de hoeken $A'BC$ en D_oCB gelijk.

Uit de relaties (10.1) en (10.2) volgt daarmee dat $\triangle BA'C \cong \triangle CD_oB$.

En dus is $CA' = BD_o$ en daarmee is ook $\angle CAA' = \angle BAD_o$.

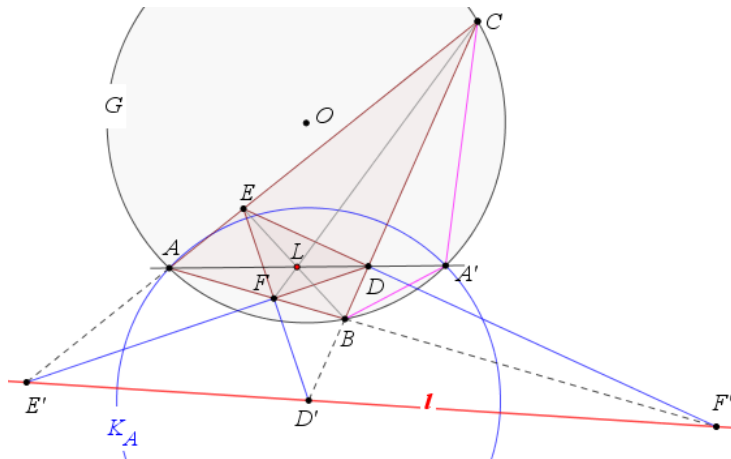
En dit houdt dan weer in dat de lijn AA' een symmediaan is van driehoek ABC (en zo is ook BB' een symmediaan).

Daarmee is bewezen:

Stelling 18. Het Lemoine-punt L van driehoek ABC (d.i. het symmediaanpunt van driehoek ABC) is de pool van de Lemoine-as van driehoek ABC (en de Lemoine-as is de poollijn van L) bij de omcirkel van de driehoek. $\diamond$

Stelling 19. De harmonikaal van het Lemoine-punt van een driehoek is de Lemoine-as.

figuur 22



In figuur 22 is gegeven:

- L is het Lemoine-punt van driehoek ABC ;
- G is de omcirkel (middenpunt O);
- AD, BE, CF zijn cevianen door L ;
- A' is een snijpunt van AD met G ;
- de verlengden van de zijden van de ceviaandriehoek^[9] DEF snijden de overeenkomstige BC, CA, AB in D', E', F' .

Bewijs. De driehoeken ABC en DEF zijn puntperspectief met P als perspectiefcentrum. De driehoeken zijn daarmee ook lijnperspectief. De punten D', E', F' zijn nu collineair op de lijn l .

$ACBL$ is een volledige vierhoek, met D, E, F als diagonaalpunten.

Nu is, op grond van stelling 1 toegepast op die vierhoek: $(ABFF') = -1$.

Evenzo is $(BCDD') = -1$ en $(ACEE') = -1$. En daarmee is de drager l van deze punten de harmonikaal van het punt L . $\diamond$

Opmerking. De lijn AD is een symmediaan van driehoek ABC , immers AD gaat door het symmediaanpunt L . In driehoek $A'BC$ is nu op grond daarvan voor het punt D :

$$BD : CD = c^2 : b^2$$

Maar ook is:

$$BD : CD = (A'B \cdot \sin(\angle BA'D)) : (A'C \cdot \sin(\angle CA'D)) = (A'B \cdot \sin C) : (A'C \cdot \sin B)$$

Dus is:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c \sin B}{b \sin C} = \frac{c}{b}$$

Daarmee ligt het punt A' op de A-Apollonius-cirkel. $\diamond$

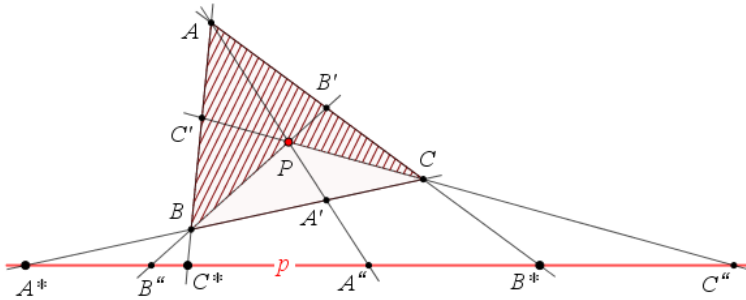
11. Projectieve afbeeldingen bij een driehoek, opnieuw stelling 15

Is ABC een willekeurige driehoek, P een willekeurig punt en p een willekeurige lijn; zie figuur 23a. De snijpunten van de zijden van de driehoek met p zijn A^* , B^* , C^* .

Via het punt P bekijk ik nu twee centrale projecties:

- die van de hoekpunten op de overstaande zijden: A' , B' , C' ; daardoor liggen op elke zijde van de driehoek vier punten die van een naam zijn voorzien;
- en de centrale projectie van de punten A' , B' , C' op de lijn p , met beeldpunten A'' , B'' , C'' .

figuur 23a



Beide projecties leggen twee projectieve afbeeldingen van de zijden van driehoek ABC op de lijn p vast. Daarbij is voor de dubbelverhouding tussen de benoemde punten:

- $(ABC'C^*) = (A''B''C''C^*)$
- $(BCA'A^*) = (B''C''A''A^*)$
- $(CAB'B^*) = (C''A''B''B^*)$

De dubbelverhouding van collineaire punten is immers bij centrale projectie invariant (zie appendix A).

Vermenigvuldiging van de linkerleden van bovenstaande uitdrukkingen en gelijktijdige uitwerking van de rechterleden geeft:

$$\mathcal{P} = (ABC'C^*)(BCA'A^*)(CAB'B^*) = \left(\frac{C''A''}{C''B''} : \frac{C^*A''}{C^*B''} \right) \cdot \left(\frac{A''B''}{A''C''} : \frac{A^*B''}{A^*C''} \right) \cdot \left(\frac{B''C''}{B''A''} : \frac{B^*C''}{B^*A''} \right)$$

In het rechterlid van $\mathcal{P}$ staat nu telkens in teller en noemer $C''A''$ met $A''C''$, $A''B''$ met $B''A''$, $B''C''$ met $C''B''$, zodat (en er waren drie letterwisselingen nodig, vandaar het minteken):

$$(11.1) \dots \mathcal{P} = - \frac{C^*B'' \cdot A^*C'' \cdot B^*A''}{C^*A'' \cdot A^*B'' \cdot B^*C''}$$

Nu kan vierhoek $ABPC$ worden opgevat als een volledige vierhoek waarvan de paren overstaande zijden (AB, CP) , (BC, AP) , (AC, BP) door de lijn p worden gesneden in de puntenparen (C^*, C'') , (A^*, A'') , (B^*, B'') .

Vanwege de invariantie van de dubbelverhouding is nu (bijvoorbeeld):

$$\bullet (A^*B^*A''C'') = (A''B''A^*C^*)$$

Uitwerking hiervan leidt tot:

$$\frac{A''A^*}{A''B^*} \cdot \frac{C''B^*}{C''A^*} = \frac{A^*A''}{A^*B''} \cdot \frac{C^*B''}{C^*A''} \Rightarrow \frac{C''B^*}{A''B^* \cdot C''A^*} = - \frac{C^*B''}{A^*B'' \cdot C^*A''}$$

En dan blijkt dat (let weer op de letterwisselingen):

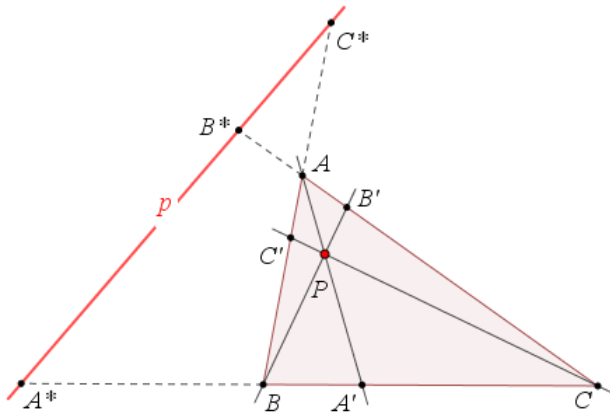
$$(11.2) \dots \frac{A''B^* \cdot B''C^* \cdot C''A^*}{A''C^* \cdot B''A^* \cdot C''B^*} = 1$$

Vergelijking van (11.1) met (11.2) geeft $\mathcal{P} = -1$. Voor elke configuratie $[\Delta ABC, P, p]$ geldt dus:

$$(11.3) \dots (ABC'C^*)(BCA'A^*)(CAB'B^*) = -1$$

Hebben twee van de dubbelverhoudingen in relatie (11.3) de waarde -1, dan moet de waarde van de derde dubbelverhouding óók gelijk zijn aan -1. Met andere woorden: aan de ligging van de punten op de lijn p wordt voldaan als er sprake is van drie harmonische viertallen.

figuur 23b



En hiermee is opnieuw stelling 15 aangetoond, in iets andere bewoordingen (zie ook figuur 23b):

Stelling 15bis. Zijn A' , B' , C' de ceviaanpunten van een punt P bij een driehoek ABC en zijn A^* , B^* , C^* de daarbij behorende 4e harmonische punten op de zijden van driehoek ABC , dan zijn de punten A^* , B^* , C^* collineair. $\diamond$

Gevolg. Uitdrukking (11.3) kan met deelverhoudingen geschreven worden als:

$$(11.4) \dots ((ABC')(BCA')(CAB')) : ((ABC^*)(BCA^*)(CAB^*)) = -1$$

De eerste factor in het linkerlid van relatie (11.4) hangt alleen af van het punt P (er staat alleen X' in de deelverhoudingen), terwijl de tweede factor alleen afhangt van de lijn p (hier staat alleen X^* in de deelverhoudingen).

Als de oneigenlijke rechte als de lijn p wordt gekozen, dan worden deelverhoudingen in de tweede factor gelijk aan 1).

Daarmee gaat stelling 15bis over in:

Stelling 16 (stelling van Ceva). Zijn A' , B' , C' de ceviaanpunten van een punt P bij driehoek ABC , dan geldt:

$$(11.5) \dots (ABC')(BCA')(CAB') = -1 \quad \diamond$$

Opmerking. Ook de omgekeerde stelling van Ceva is juist. Het bewijs daarvan kan worden geleverd via een *bewijs uit het ongerijmde* onder toepassing van stelling 16 zelf. $\diamond$

Als alleen de uitdrukkingen (11.5) én (11.4) worden beschouwd, dan is blijkbaar:

$$\blacksquare (ABC^*)(BCA^*)(CAB^*) = 1$$

Dit leidt dan tot:

Stelling 17 (stelling van Menelaos). Snijdt een lijn de (eventueel verlengde) zijden van een driehoek ABC in de punten A^* , B^* , C^* , dan geldt:

$$(11.6) \dots (ABC^*)(BCA^*)(CAB^*) = 1 \quad \diamond$$

Opmerking. De omgekeerde stelling van Menelaos kan eveneens worden bewezen via een *bewijs uit het ongerijmde* onder toepassing van de stelling (stelling 17) zelf.

12. Noten

- [1] Voor de stelling van Menelaos en de stelling van Ceva verwijs ik naar:
 » Dick Klingens (1999): *Transversalen*. Op (de website van de auteur):
<http://www.pandd.demon.nl/transvers.htm>
 Zie ook paragraaf 11 in dit artikel.
- [2] De X-Apollonius-cirkel is hier de meetkundige plaats van de punten waarvan de afstanden tot de punten A en B zich verhouden als $b : a$. De punten C en D behoren dan uiteraard ook tot die meetkundige plaats.
 In stelling 4 wordt hierop verder ingegaan.

- [3] Een bewijs met betrekking tot een meetkundige plaats valt noodzakelijkerwijs in twee delen uiteen. De reden daarvoor ligt in de definitie van het begrip.

Definitie. Een meetkundige figuur (lijnstuk, rechte lijn, kromme, ...) heet *meetkundige plaats* van punten met een bepaalde eigenschap indien:

1. alle punten van de figuur die bedoelde eigenschap hebben – ze vormen zo een verzameling V ;
2. alle punten met de eigenschap tot de figuur behoren – ze vormen zo een verzameling W .

Om aan de figuur het predicaat meetkundige plaats te kunnen toekennen moet worden aangetoond dat $V \equiv W$, en dit kan door te bewijzen dat $V \subset W$ én $W \subset V$.

- [4] Voor een introductie van de afbeelding inversie zie:

» Dick Klingens (1999): *Inversie*. Op (de website van de auteur):

<http://www.pandd.demon.nl/inversie.htm>

of, uitvoeriger, zie:

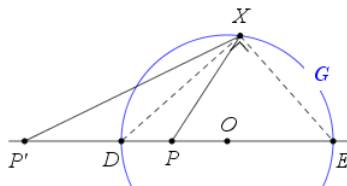
» Nathan Altshiller-Court (1952): *College Geometry*. Mineola (NY, USA), Dover reprint 2007; pp. 230-243.

- [5] De voetpuntdriehoek van een punt bij een gegeven driehoek heeft als hoekpunten de loodrechte projecties van dat punt op de zijden van die driehoek (indien nodig verlengd).

- [6] De inversiecirkel (dat is hier de omcirkel van driehoek ABC) is een Apollonius-cirkel.

Algemeen geldt, en zie figuur n6 waarin P en P' elkaars inverse zijn bij de inversiecirkel $G = (O, k)$:

figuur n6



$(DEPP') = (DEP) : (DEP')$, waarbij:

$(DEP) = -(k - OP) : (k + OP)$ en $(DEP') = (OP' - k) : (OP' + k)$

Met $OP \cdot OP' = k^2$ is:

$$(DEPP') = -\frac{(k-OP)(OP'+k)}{(k+OP)(OP'-k)} = -\frac{k \cdot OP' + k^2 - OP \cdot OP' - k \cdot OP}{k \cdot OP' - k^2 + OP \cdot OP' - k \cdot OP} = -1$$

En daarmee is, omdat hoek DXE een rechte hoek is én omdat $DP : DP' = EP : EP'$, de cirkel G een Apollonius-cirkel. Zodat voor ieder punt X op de inversiecirkel geldt dat $XP : XP'$ constant is.

- [7] Met de volgende definities kan de stelling van Desargues eenvoudig worden geformuleerd:

1. Twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ heten *(punt)perspectief vanuit een punt P* (Eng. copolair) als de lijnen AA' , BB' , CC' door het punt P gaan.

2. Twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ heten *lijnperspectief* (Eng. coaxial) als de snijpunten van de lijnenparen $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$ en $(CA, C'A')$ collineair zijn.

Dan geldt:

Stelling van Desargues: *Twee driehoeken die puntperspectief zijn, zijn ook lijnperspectief (en omgekeerd).*

Voor een bewijs van de stelling van Desargues verwijs ik naar [1].

- [8] Het spiegelbeeld van een zwaartelijn van een driehoek in de bissectrice van de hoek waardoor die zwaartelijn gaat, is een symmediaan van die driehoek.

De drie symmedianen van een driehoek zijn concurrent is het zogeheten Lemoine-punt (of symmediaan-punt) van de driehoek.

Zie eventueel:

» Dick Klingens (2017): *Over symmedianen*. Niet-gepubliceerd artikel; elektronisch beschikbaar via:

<http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/Symmedianen.pdf>

- [9] Een *ceviaan* van een punt P bij een driehoek is een lijn door P én door een hoekpunt van die driehoek.

Een *ceviaanpunt* van een punt P (bij een driehoek) is het snijpunt van een ceviaan van P met de 'bijbehorende' (eventueel verlengde) overstaande zijde van de driehoek.

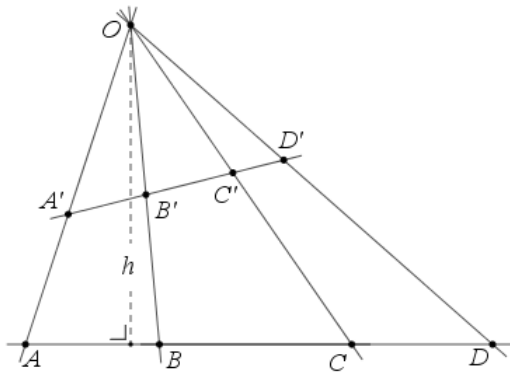
Een *ceviaandriehoek* van een punt P bij een driehoek is de driehoek waarvan de drie ceviaanpunten van P de hoekpunten zijn.

Appendix A

Ik bewijs de stelling:

De dubbelverhouding van vier collineaire punten is invariant bij centrale projectie.

figuur a1



In figuur a1 zijn A, B, C, D vier willekeurige collineaire punten.

Ik gebruik de functie Φ om de oppervlakte van een object aan te geven.

Bewijs. Nu is:

- $\Phi(OAC) = \frac{1}{2} h \cdot CA = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin(\angle COA)$
- $\Phi(OBC) = \frac{1}{2} h \cdot CB = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(\angle COB)$
- $\Phi(OAD) = \frac{1}{2} h \cdot DA = \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(\angle DOA)$
- $\Phi(OBD) = \frac{1}{2} h \cdot DB = \frac{1}{2} OB \cdot OD \cdot \sin(\angle DOB)$

Hieruit blijkt:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{OA \cdot \sin(\angle COA)}{OB \cdot \sin(\angle COB)} : \frac{OA \cdot \sin(\angle DOA)}{OB \cdot \sin(\angle DOB)} = \frac{\sin(\angle COA)}{\sin(\angle COB)} : \frac{\sin(\angle DOA)}{\sin(\angle DOB)}$$

De dubbelverhouding $(ABCD)$ is dus *alleen* afhankelijk van de bij het punt O gevormde hoeken.

De punten A', B', C', D' (centraal geprojecteerd vanuit O) zijn eveneens collineair.

Dus is: $(ABCD) = (A'B'C'D')$ $\diamond$

Appendix B

Ik geef een *analytisch* bewijs van stelling 4, die ik formuleer als:

De meetkundige plaats van de punten X waarvoor bij gegeven punten A en B de verhouding $XA : XB$ constant is, maar ongelijk aan 1, is een cirkel.

Bewijs. Ik kies een xOy -assenstelsel waarvan de x -as langs de lijn AB valt met $O \equiv A$.

Dan is met $B = (b, 0)$ en $b > 0$, met $k > 0$ gelijk aan de bedoelde verhouding en $X = (x, y)$:

$$XA = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{en} \quad XB = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$$

zodat uit $XA = k \cdot XB$ volgt:

$$x^2 + y^2 = k^2((x-b)^2 + y^2) \Rightarrow (k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 - 2k^2bx + k^2b^2 = 0$$

Voor $k = 1$ staat hier de vergelijking van een rechte lijn: $x = \frac{1}{2}b$, en dat is de vergelijking van de middelloodlijn van het lijnstuk AB .

Voor $k \neq 1$ is de laatste relatie inderdaad de vergelijking van een cirkel:

$$x^2 + y^2 - \frac{2k^2b}{k^2 - 1}x = -\frac{k^2b^2}{k^2 - 1} \Rightarrow \left(x - \frac{k^2b}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^4b^2}{(k^2 - 1)^2} - \frac{k^2b^2(k^2 - 1)}{(k^2 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{k^2b}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2b^2}{(k^2 - 1)^2}$$

Dan is het middelpunt $M = \left(\frac{k^2b}{k^2 - 1}, 0\right)$ en de straal $r = \frac{kb}{k^2 - 1}$.

Verder is $MA \cdot MB = \frac{k^2b}{k^2 - 1} \cdot \left(\frac{k^2b}{k^2 - 1} - b\right) = \frac{k^2b^2}{(k^2 - 1)^2} = r^2$, waaruit (opnieuw) blijkt dat de punten A en B

elkaars beeld zijn bij een inversie met de gevonden cirkel als inversiecirkel. $\diamond$

Appendix C

Ik bewijs analytisch de eigenschap:

Als een punt P op de poollijn q ligt van een punt Q bij een cirkel, dan ligt Q op de poollijn p van P .

Bewijs. Ik kies een xOy -assenstelsel waarvan het punt O samenvalt met het middelpunt van de cirkel en waarbij de positieve x -as door het punt Q gaat. Dan is $Q = (a, 0)$ met $a > 0$.

Dit leidt tot de cirkelvergelijking: $x^2 + y^2 = R^2$.

Een vergelijking van de poollijn q van Q bij deze cirkel is dan:

$$q :: a \cdot x + 0 \cdot y = R^2 \quad \text{of} \quad x = \frac{R^2}{a}$$

Voor een *willekeurig* punt P op de lijn q kies ik $y_P = \lambda$.

Dit geeft als vergelijking van de poollijn p van P :

$$p :: \frac{R^2}{a} x + \lambda y = R^2$$

Omdat de coördinaten van het punt Q aan deze vergelijking voldoen, ligt het punt Q op de lijn p . $\diamond$

ooooo

versie 1.0 ... 1.4 – januari 2017 // Over de harmonikaal

versie 2.0 ... 2.1 – februari 2018

Copyright © 2018 PandD Math&Text – Rotterdam (NL)



Dit werk valt onder een Creative Commons Naamsvermelding-NietCommercieel 4.0 Internationaal-licentie.

Zie · <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.nl> · voor de van toepassing zijnde licentie.
