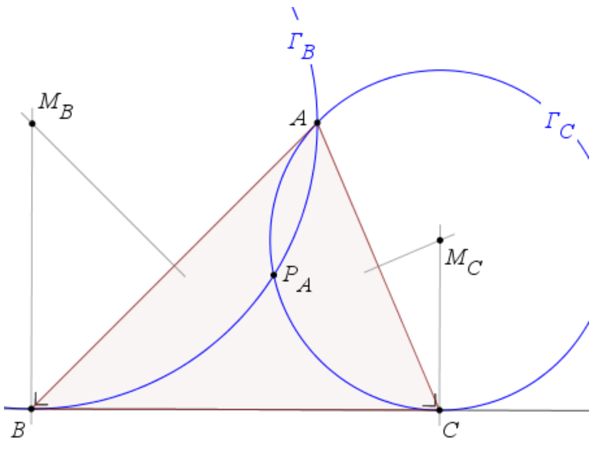
Een bijzonder punt, en nog een tweede

DICK KLINGENS

juli 2019

1. Inleiding

figuur 1



En een bijzonder punt, dat is het. Vooral ook omdat het punt tot voor kort geen naam had. Maar de Indiase wiskunde-student Kapil Pause schreef in 2018:

"Today we will learn about two intriguing special points in triangle that seem to have many interesting properties. […] These points do not seem to have a special name in the mathematical folklore. Being informal we take the liberty to call these two points as 'Humpty-Dumpty points'. As you wil see, since these points are vertex dependent, we shall call them X-Humpty Dumpty points whenever they correspond to vertex X."

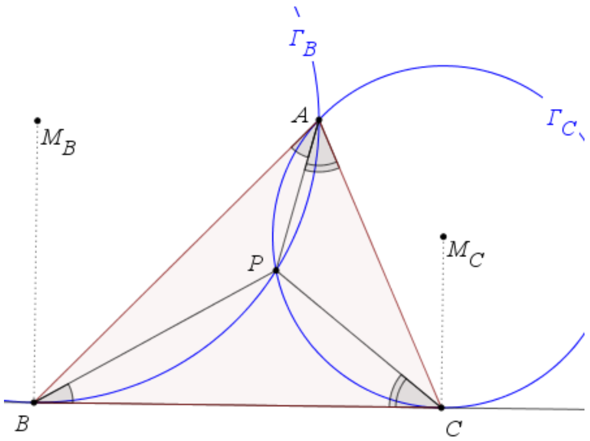
Deze tekst vormt de inleiding van een artikel dat Pause schreef voor leerlingen van scholen voor voortgezet onderwijs die zich voorbereiden op (junior) wiskunde-olympiades.

2. Humpty-punt

Ik zal eerst het een en ander schrijven over het humpty-punt van een driehoek. In figuur 1 is de meetkundige definitie van het A-humpty-punt geïllustreerd:

Definitie. De cirkels Γ_B, Γ_C (middelpunten M_B, M_C) die in B, C raken aan de zijde BC van driehoek ABC en die beide door A gaan, snijden elkaar, behalve in A, in het **A-humpty-punt** (hier P_A) van de driehoek. Analoge beschrijvingen zijn er uiteraard voor het B- en C-humpty-punt van een driehoek. ◊

figuur 2



Opmerking. De cirkels Γ_B en Γ_C worden wel *Euclides-cirkels* genoemd. ◊

N.B. In hetgeen volgt gebruik ik "P" als de naam van het A-humpty-punt, indien dat althans geen verwarring geeft.
Het dumpty-punt van de driehoek krijgt dan de naam "Q". ◊

Een direct gevolg van de definitie staat in stelling 1.

Stelling 1. Voor het A-humpty-punt P van driehoek ABC geldt (zie figuur 2):

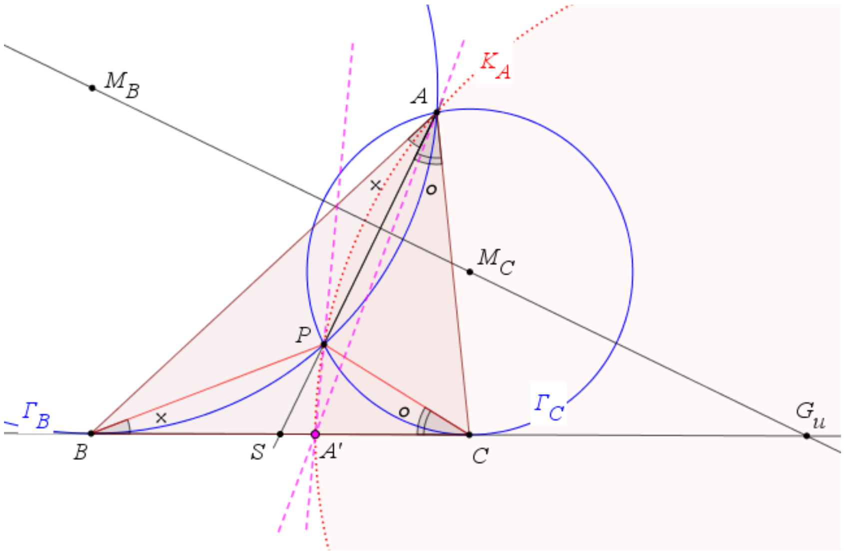
- $\angle PAB = \angle PBC$ en $\angle PAC = \angle PCB$ ◊

Bewijs. Op Γ_B liggen de omtrekshoeken *PAB* en *PBC* die beide op bg(*PB*) van die cirkel staan. Op bg(*PC*) van Γ_C staan de omtrekshoeken *PAC* en *PCB*. Omtrekshoeken op dezelfde boog van een cirkel zijn gelijk. En daaruit blijkt het gestelde. ◊

Stelling 2. Voor het A-humpty-punt *P* van driehoek *ABC* geldt:

- *P* ligt op de A-zwaartelijn van de driehoek;
- $BP : CP = BA : BC$ ◊

figuur 3



Bewijs. Zie figuur 3. Daarover allereerst: de lijn *AP* is de machtlijn van de cirkels Γ_B en Γ_C.
Voor [1] $S = AP$ & BC geldt dan, omdat de lijn *BC* raaklijn is aan beide cirkels:

- $SB^2 = SA \cdot SB$ en $SC^2 = SA \cdot SC$

Dus:
(1)… $SB = SC$; het punt *S* is dus het midden van de zijde *BC*; met andere woorden *AP* is zwaartelijn.
Hiermee is het eerste punt in de stelling bewezen.

Ik stel nu ten behoeve van wat meer leesgemak: $\angle BCP = \angle CAP = \text{o}$, $\angle CBP = \angle BAP = \text{x}$.
In driehoek *BCP* is volgens de *sinusregel*:
(2)… $BP : CP = \sin(\text{o}) : \sin(\text{x})$
Relatie (2) gaat dan met de hoeken bij *A* (in de driehoeken *CAS*, *BAS*) over in:
(3)… $BP : CP = \sin(CAS) : \sin(BAS)$
En met (1) is dit te schrijven als

(4)… $BP : CP = \dfrac{SB}{\sin(BAS)} : \dfrac{SC}{\sin(CAS)}$.

In de driehoeken *BSA*, *CSA* is opvolgend:

- $SB : \sin(\text{x}) = BA : \sin(BSA)$, $SC : \sin(\text{o}) = CA : \sin(CSA)$

De hoeken *BSA* en *CSA* zijn samen 180°, zodat:

- $\sin(BSA) = \sin(CSA)$

Uitdrukking (4) gaat dan met deze laatste relaties over in:

(5)… $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{BA}{\sin(BSA)} : \dfrac{CA}{\sin(CSA)} = \dfrac{BA}{CA}$

Hetgeen te bewijzen was. ◊

Gevolgen

1. Volgens de *bissectricestelling* snijden de binnenbissectrice van de hoek *P* (driehoek *PBC*) en die van de hoek *A* (driehoek *ABC*) de gemeenschappelijke zijde *BC* in een punt dat die zijde *inwendig* verdeelt in de verhouding van de opstaande zijden. Omdat die beide verhoudingen hetzelfde zijn (stelling 2), snijden die bissectrices elkaar dus in hetzelfde punt *A'* op de zijde *BC*.

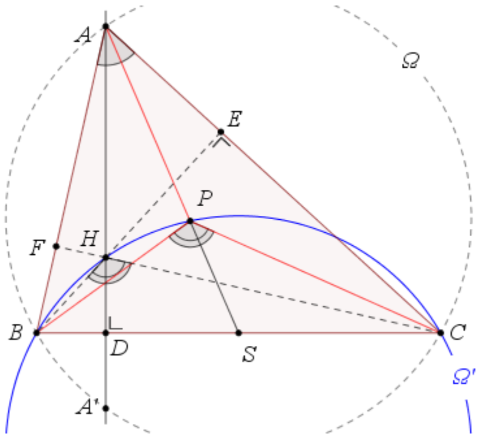
2. De zogeheten *A-Apollonius-cirkel* van een driehoek is de meetkundige plaats van alle punten X waarvoor $XB : XC = BA : CA$.[2]
Het A-humpty-punt P van driehoek ABC ligt dus ook op die cirkel. In de figuur is K_A de A-Apolloniuscirkel (middelpunt G_u). Deze cirkel gaat ook door de punten A en A'.
K_A behoort tot de cirkelbundel die bepaald wordt Γ_A en Γ_B (A en P zijn de zogeheten basispunten (snijpunten) van de bundel).
Dus is $G_u = M_BM_C$ & BC. ◊

Stelling 3.1. Is H het hoogtepunt van driehoek ABC en is Ω' de omcirkel van driehoek BCH, dan is P het snijpunt van de A-zwaartelijn van driehoek ABC met het boogdeel BHC van Ω'.
3.2. Is P' het tweede snijpunt van de A-zwaartelijn (waarop het A-humpty-punt P ligt) met de omcirkel Ω, dan zijn P en P' puntsymmetrisch met het midden S van BC. ◊

Opmerking. De cirkel Ω' is de *A-cirkel van Carnot*.[3] Deze cirkel hang samen met het bewijs dat Carnot heeft gegeven van het feit dat Ω' het BC-spiegelbeeld is van de omcirkel Ω van driehoek ABC. ◊

Bewijs van stelling 3.1. Zie figuur 4.1, met een scherphoekige driehoek. In stelling 2 (het eerste punt) is bewezen dat P op de A-zwaartelijn van de driehoek ligt.

figuur 4.1



Uit stelling 1 volgt dat:
- $\angle BPC = 180^o - \alpha$

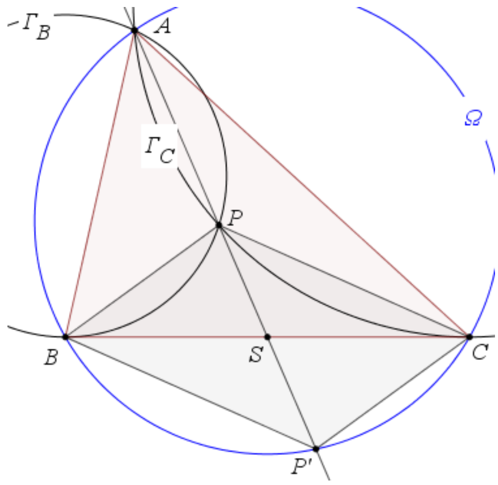
waarin α de grootte is van hoek A.

De boog(BHC) van Ω' is een (deel van) de meetkundige plaats van de punten X binnen de driehoek waarvoor:
- $\angle BXC = 180^o - \alpha$

immers, die boog is het BC-spiegelbeeld van bg($BA'C$).
Zo is:
- $\angle BHC = 180^o - (90^o - \angle B) - (90^o - \angle C)$
  $= \angle B + \angle C = 180^o - \alpha$

Het punt P ligt dus, evenals H, op deze boog. ◊

figuur 4.2



Bewijs[4] van stelling 3.2. Zie figuur 4.2. De basispunten van de cirkels Γ_B en Ω zijn A, B. De lijnstukken PAP' en BBC zijn dubbelkoorden van die cirkels. Zodat:
- $PB \parallel P'C$

De basispunten van de cirkels Γ_C en Ω zijn A, C. De lijnstukken PAP' en CCB zijn dubbelkoorden van die cirkels. Zodat:
- $PC \parallel P'B$

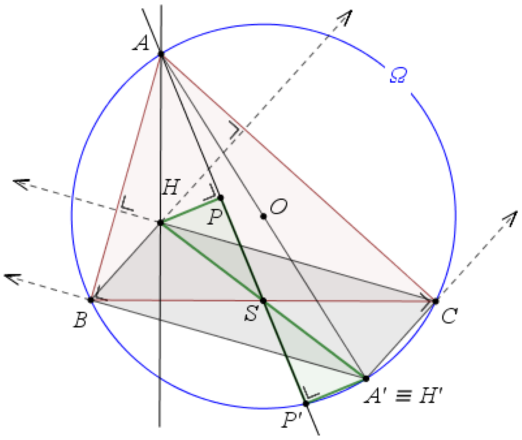
Vierhoek $PBP'C$ is dan een parallellogram, waarvan PP' en BC de diagonalen zijn.
Hun snijpunt S is dan het midden van PP' (en het midden van BC). ◊

Ten behoeve van nóg een eigenschap van een humpty-punt geef ik nu het bewijs van de volgende hulpstelling.

Lemma 4. Het puntspiegelbeeld van het hoogtepunt van een driehoek in het midden van een zijde ligt op de omcirkel van die driehoek. ◊

In figuur 5 bekijk ik daartoe driehoek ABC. Daarin is H het hoogtepunt, S het midden van BC en A' het tegenpunt van A op de omcirkel Ω (middelpunt O) van de driehoek; H' is het spiegelbeeld van H in het punt S.
Er zijn meer elementen in figuur 5 opgenomen, maar die zullen gebruikt worden in het bewijs van stelling 5.

figuur 5



Bewijs van lemma 4. Omdat AA' een middellijn is van Ω, is:
- $\angle ACA' = 90^o$
- $\angle ABA' = 90^o$

De lijn $A'C$ is dan evenwijdig met de B-hoogtelijn en de lijn $A'B$ is evenwijdig met de C-hoogtelijn. Of ook:
- $A'C$ // BH en $A'B$ // CH

Maar dan is $A'CHB$ een parallellogram, waarvan HA' een diagonaal is. En dit lijnstuk wordt door het punt S in twee gelijke stukken gedeeld: $HS = SA'$.
Dus is met $A' \equiv H'$:
- $HS = SH'$ ◊

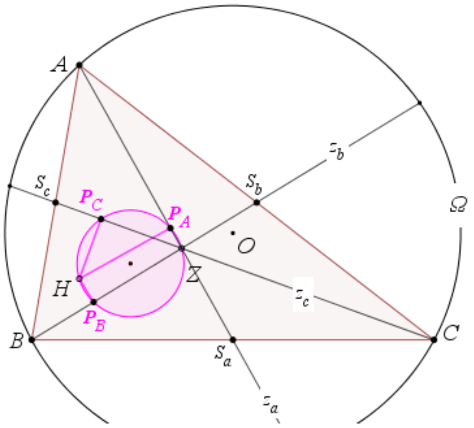
En nu geldt ook:

Stelling 5. In een driehoek ABC waarvan H het hoogtepunt is en P het A-humpty-punt, is de hoek APH een rechte hoek. ◊

Bewijs. Zie weer figuur 5. P is het A-humpty-punt van de driehoek, en zoals uit stelling 3.2 blijkt snijdt de A-zwaartelijn (waarop P ligt) de omcirkel Ω in het S-spiegelbeeld P' van P.
De driehoeken HPS en $A'P'S$ zijn dan congruent (HZH, met hoek S als gemeenschappelijke hoek), immers volgens lemma 4 is ook $HS = A'S'$.
Verder is $\angle A'P'A = 90^o$ (Thales-cirkel op AA'). En uit de genoemde congruentie volgt dan dat:
- $\angle HPS = \angle HPA = 90^o$ ◊

Gevolg

figuur 6



In figuur 6 zijn z_a, z_b, z_c de zwaartelijnen van de driehoek, en zijn S_a, S_b, S_c de middens van de zijden.

Zijn verder P_A, P_B, P_C de op de zwaartelijnen gelegen humpty-punten van driehoek ABC, is H het hoogtepunt en Z het zwaartepunt van de driehoek, dan is op basis van stelling 5, voor $i = A, B, C$:
- $\angle HP_iZ = 90^o$

De punten P_A, P_B, P_C zijn dus concyclisch.

Met andere woorden:

Stelling 6. De humpty-punten P_A, P_B, P_C van een driehoek ABC liggen op een cirkel met het lijnstuk HZ als middellijn. ◊

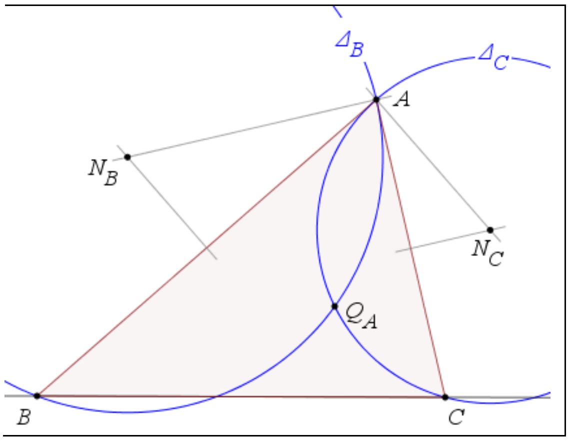
3. Dumpty-punt

Het dumpty-punt van een hoekpunt van een driehoek wordt eveneens gedefinieerd met behulp van twee cirkels. Deze cirkels raken elk aan een andere zijde van de driehoek, maar dan wel in het gemeenschappelijk hoekpunt van die twee.

Definitie. De cirkels Δ_B, Δ_C (middelpunten N_B, N_C) die in A raken aan de zijden CA, BA van driehoek ABC en die door B, C gaan, snijden elkaar, behalve in A, in het **A-dumpty-punt** van de driehoek; zie figuur 7.
Analoge beschrijvingen zijn er uiteraard voor het B- en C-dumpty-punt van een driehoek. ◊

Opmerking. De cirkels Δ_B, Δ_C zijn de zogeheten **A-Lemoine-cirkels** van driehoek ABC.[5] ◊

figuur 7

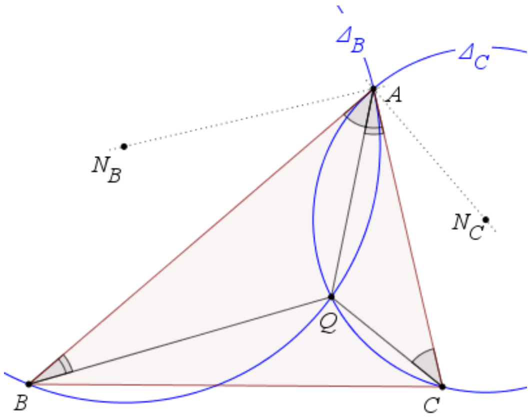


Een eerste gevolg van deze definitie betreft ook nu twee paar gelijke hoeken.

Stelling 7. Voor het A-dumpty-punt Q van driehoek ABC geldt (zie figuur 8):

- $\angle QAB = \angle QCA$ en $\angle QAC = \angle QBA$ ◊

figuur 8



Bewijs. In cirkel Δ_C is:

- $\angle QAB = \frac{1}{2}\text{bg}(AC) = \angle QCA$ (*omtrekshoeken*)

In cirkel Δ_B is:

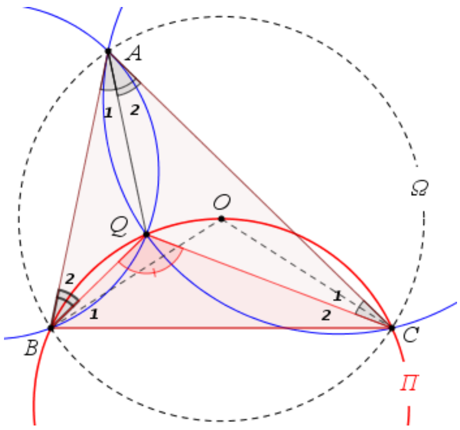
- $\angle QAC = \frac{1}{2}\text{bg}(AQ) = \angle QBA$ (*omtrekshoeken*)

En dit komt overeen met het gestelde. ◊

Gevolg

In figuur 9 is $\angle QAB = \angle A_1$, $\angle QAC = \angle A_2$, $\angle QBC = \angle B_1$, $\angle QBA = \angle B_2$, $\angle QCA = \angle C_2$ en $\angle QCB = \angle C_2$.
Verder is het punt O het middelpunt van de omcirkel Ω van de driehoek. Punt Q is ook in deze figuur het A-dumpty-punt van de driehoek.

figuur 9



Voor $\angle A = \alpha$ is dan:

- $\angle BOA = 2 \cdot \angle A_{12} = 2\alpha$ (omtrek- en middelpuntshoek van Ω).

Nu is:

$\angle BQO = 180^\circ - (\angle B_1 + \angle C_2)$
$= 180^\circ - (\angle B - \angle B_2) - (\angle C - \angle C_2)$
$= \angle A + \angle B_2 + \angle C_2 = 2 \cdot \angle A = 2\alpha$

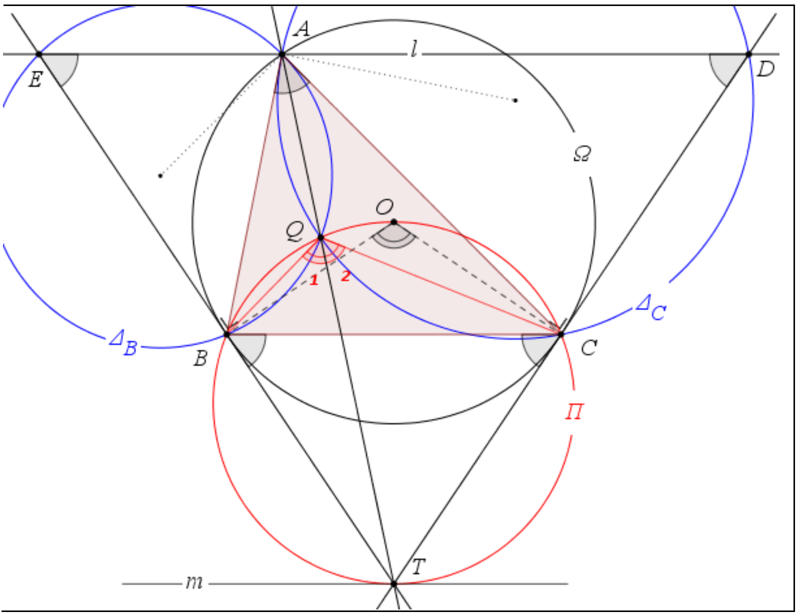
Daarmee is het punt Q (evenals O) een element van de verzameling punten X waarvoor $\angle BXC = 2\alpha$.
Nu is bewezen:

Stelling 8. Het A-dumpty-punt Q van driehoek ABC ligt op het hetzelfde boogdeel van de omgeschreven cirkel Π van driehoek BOC als het punt O. ◊

Opmerking. De cirkel Π is de **A-cirkel van Kosnita**.[6] Deze cirkel moet niet worden verward met de A-cirkel van Carnot, d.w.z. met het spiegelbeeld van de omcirkel Ω van de driehoek in de zijde BC. Zie voor deze laatste cirkel stelling 3.1 in de vorige paragraaf. ◊

Ik bekijk vervolgens bovenstaande configuratie, maar dan uitgebreid met de omcirkel van de driehoek. Daaruit zal dan de belangrijkste eigenschap van de dumpty-punten volgen.

figuur 10



In figuur 10 gaat de lijn *l* door *A* evenwijdig met *BC*. De tweede snijpunten op Δ_C en Δ_B zijn *D* en *E*. Verder is *T* = *DC* & *EB*. *Ω* is de omcirkel van driehoek *ABC* en *Π* is de omcirkel van driehoek *QBC*. In stelling 8 is aangetoond dat *Π* ook door het middelpunt *O* van *Ω* gaat. Ik merk verder op dat:

- $\angle BQC = \angle BOC = 2\alpha$

Nu is blijkt ook:

- $\angle \boldsymbol{TBC} = \angle TEA = \angle BEA$ (*overeenkomstige hoeken*)
- $\angle BEA = \frac{1}{2}\text{bg}(BA)$ op $\Delta_B = \angle BAC = \angle A$ (*CA* is raaklijn in *A* aan Δ_B)
- $\angle A = \angle BAC = \frac{1}{2}\text{bg}(AC)$ op $\Delta_C = \angle ADC$ (*BA* is raaklijn in *A* aan Δ_C)
- $\angle ADC = \angle ADT = \angle \boldsymbol{BCT}$ (overeenkomstige hoeken).

En daaruit volgt dat driehoek *TCB* T-gelijkbenig is.
De lijn *m* die dan door *T* gaat en evenwijdig is met *BC*, raakt dan aan de cirkel *Π*.

De cirkels Δ_B en *Π* hebben *B* en *Q* als basispunten, *EBP* is een dubbelkoorde van die cirkels en er geldt *EA* // *m* (rakend in *T*).
Volgens een stelling van Reim zijn nu de punten *A*, *Q*, *T* collineair (*AQT* is dan een dubbelkoorde van die cirkels).
Of anders gezegd: het punt *T* ligt op *Π*. En daarmee is vierhoek *QBTC* een koordenvierhoek.

Ik betrek nu de cirkel *Ω* bij mijn beschouwingen. De cirkels Δ_B en *Ω* hebben *A* en *B* als basispunten, *AAC* als dubbelkoorde en er geldt *AE* // *CB*.
Volgens een stelling van Reim raakt dan *BE* in *B* aan *Ω*.
En met een analoge redenering geldt ook dat *CD* in *C* raakt aan *Ω*.

Uit een in de appendix opgenomen constructie van de *symmedianen* van een driehoek blijkt nu dat de lijn *AQ* de **A-symmediaan** is van de driehoek.[7] In woorden:

Stelling 9. Als *Q* het A-dumpty punt is van driehoek *ABC*, dan is de lijn *AQ* de A-symmediaan van die driehoek.
Een overeenkomstige formulering geldt natuurlijk ook voor het B- en C-dumpty-punt van de driehoek. ◊

Gevolgen

1. In de koordenvierhoek *OBTC* is:

- $\angle BTC = 180^\circ - 2\alpha$

2. In *Π* zijn de bogen *BT* en *CT* aan elkaar gelijk (even groot). Verder is dan:

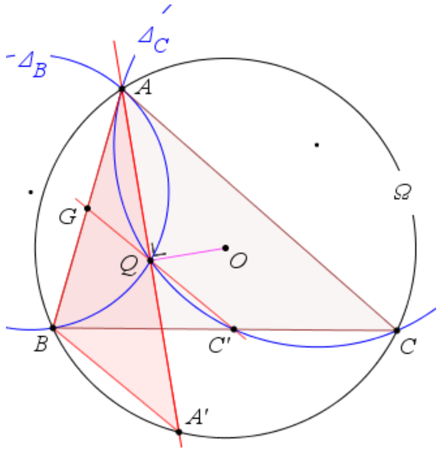
- $\angle BQT = \frac{1}{2}\text{bg}(BT) = \frac{1}{2}\text{bg}(CT) = \angle CQT$

En dan blijkt dat de lijn *AQ* ook de binnenbissectrice is van de hoek *BQC*. ◊

Ik laat nu een hulpstelling volgen die ik zal gebruiken bij het bewijs van stelling 11. Het bewijs van de hulpstelling (lemma 10) staat in de appendix.

Lemma 10. Met Q als A-dumpty-punt van driehoek ABC, C' als tweede snijpunt van de A-Lemoine-cirkel Δ_C met BC en $G = AB$ & $C'Q$, is het punt G het midden van de zijde AB (zie figuur 11). ◊

figuur 11



Een andere eigenschap van de dumpty-punten is dan:

Stelling 11. Een dumpty-punt van een driehoek is het midden van de koorde die door de omcirkel van die driehoek wordt afgesneden van een symmediaan. ◊

Bewijs. Zie figuur 11 waarin het bewijs voor de A-symmediaan van driehoek ABC is geïllustreerd.
Het punt Q is weer het A-dumpty-punt. A' is het tweede snijpunt van AQ met Ω.
Volgens lemma 10 is daarin het punt G het midden van het lijnstuk AB.

De cirkels Ω en Δ_C hebben A en C als basispunten. Verder zijn $C'CB$, QAA' van die cirkels. Volgens een stelling van Reim is dan:

- $C'Q$ // BA', en dan is ook GQ // BA'

In driehoek ABA' is dan $AQ = QA'$ (want GQ is middenparallel in die driehoek). ◊

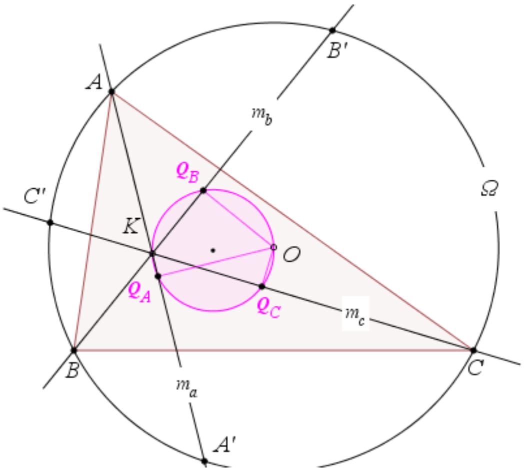
Gevolg

Omdat Q het midden is van AA' en AA' een koorde is van Ω (middelpunt O), staat OQ in Q loodrecht op de symmediaan AA'. ◊

En dan geldt, weer als gevolg hiervan (zie figuur12):

Stelling 12. De dumpty-punten Q_A, Q_B, Q_C van een driehoek ABC liggen op een cirkel met het lijnstuk OK als middellijn. Het punt O is het middelpunt van de omcirkel en K is het zogeheten symmediaanpunt [7] van de driehoek. ◊

figuur 12



Bewijs. De loodrechte projecties van Q op de symmedianen m_a, m_b, m_c zijn Q_A, Q_B, Q_C, de A-, B-, C-dumpty-punten van driehoek ABC; zie het gevolg van stelling11.

De symmedianen zijn concurrent in het punt K.

De punten Q_i ($i = A, B, C$) liggen daardoor alle op dezelfde Thales-cirkel op het lijnstuk OK. ◊

4. Noten

[1] In hetgeen volgt betekent $X = a$ & b: het punt X is het/een gemeenschappelijk punt van de meetkundige objecten a en b.

[2] Zie voor de Apollonius-cirkels van een driehoek bijvoorbeeld:
» Dick Klingens (1999): *Apollonius-cirkel(s), isodynamische punten*. Op de website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm*

[3] Naar Lazare Carnot (1753–1823, Frankrijk).

[4] In dit bewijs en in enkele volgende, zal ik gebruik maken van stellingen van Reim. Deze stellingen zijn uitvoerig behandeld in het artikel:
» Dick Klingens (2017): *Cirkels van Reim*. Ongepubliceerd; pdf-bestand, bereikbaar via:
http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/CirkelsVanReim_vs2.pdf

De stellingen zijn genoemd naar Anton Reim (1832–1922, Duits Bohemen (Sudetenland)).
De gebruikte stellingen zijn:

Stelling R1. Bij twee gegeven cirkels met basispunten A en B met dubbelkoorde PAQ geldt:
het gebroken lijnstuk $[P'BQ']$ is *dan en slechts dan* een dubbelkoorde als $PP' \parallel QQ'$.
Hierbij zijn P, Q, P', Q' de eindpunten van de koorde c.q. van het gebroken lijnstuk. ◊

Stelling R2. Snijden twee dubbelkoorden elkaar op een Reim-cirkel, dan is de raaklijn in dat snijpunt aan die Reim-cirkel evenwijdig met de verbindingslijn van de andere eindpunten van die koorden. ◊

[5] Naar Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840–1912, Frankrijk).

[6] Naar Cezar Coşniţă (1910–1962, Roemenië). De achternaam wordt, in verband met de diakritische tekens, vaak gespeld als Kosnita, en in een enkel geval ook als Konitza.

[7] Het spiegelbeeld van een zwaartelijn van een driehoek in de bissectrice door hetzelfde hoekpunt is een **symmediaan** van die driehoek
De symmediaan die door het hoekpunt X gaat, wordt wel aangegeven met X-symmediaan.
De drie symmedianen van zijn concurrent is het **symmediaanpunt** (ook **punt van Lemoine** genoemd). Dit punt wordt meestal aangegeven met de letter K.

5. Appendix

5.1. Constructie van een symmediaan

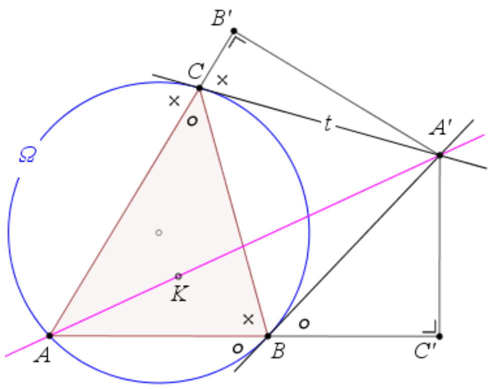
Een bekende eigenschap van een symmediaan van een driehoek (en een kenmerk voor zo'n lijn) is:

Lemma a1. Als bij een driehoek de afstanden van een willekeurig punt van een hoektransversaal tot twee zijden van die driehoek zich verhouden als de lengtes van die zijden, dan is die lijn een *symmediaan* van die driehoek.[n1] ◊

Samenhangend hiermee bewijs ik nu:

Lemma a2. De A-symmediaan van driehoek ABC gaat door het snijpunt A' van de raaklijnen in B, C aan de omcirkel Ω van die driehoek.

figuur 4



Bewijs. De lengtes van de lijnstukken $A'B'$ en $A'C'$ zijn de afstanden van A' tot de zijden AC en AB van de driehoek. De lengte van het raaklijnstuk uit A' aan Ω is gelijk aan t.

Dan is (zie de tekens in de gelijke hoeken) met $AC = b$ en $AB = c$ volgens de *sinusregel*:

- $b = 2R\cdot\sin(B) \;\Rightarrow\; b = 2R\cdot\dfrac{A'B'}{t}$
- $c = 2R\cdot\sin(C) \;\Rightarrow\; c = 2R\cdot\dfrac{A'C'}{t}$

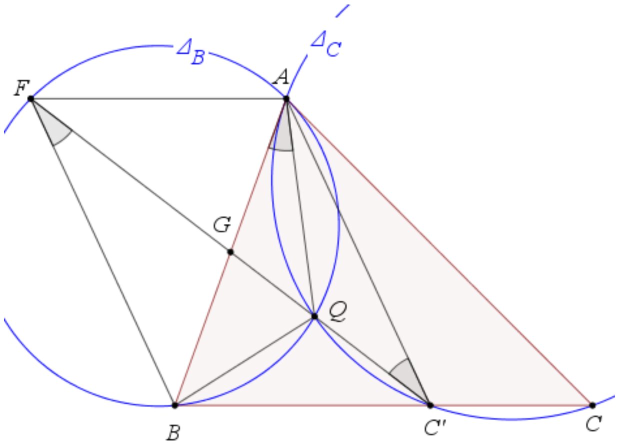
Dus is $A'B' : A'C' = b : c$.

Waarmee lemma 2 is aangetoond. ◊

5.2. Bewijs van lemma 10

Lemma a3 (= lemma 10). Met Q als A-dumpty-punt van driehoek ABC, C' als tweede snijpunt van BC met de A-Lemoine-cirkel Δ_C en $G = AB$ & $C'Q$, is het punt G het midden van de zijde AB.

figuur a2



Naast de gegevens zijn in figuur a1 ook getekend:

- $F = C'G$ & ΓB
- de lijnstukken AQ, AC', BQ

Van de cirkels Γ_B en Γ_C zijn de punten A, Q de basispunten. AAC en FQC' zijn dubbelkoorden van die cirkels. Dan is:

- AF // CC' (stelling van Reim)

Dus evengoed:
(a1)… AF // BC'

In Γ_C is: $\angle AC'Q = \frac{1}{2}\text{bg}(AQ) = \angle BAQ$ (raaklijn, koorde).
In Γ_B is: $\angle BAQ = \frac{1}{2}\text{bg}(BQ) = \angle BFQ$ (omtrekshoeken).
En dan is $\angle AC'Q = \angle BFQ$, zodat:
(a2)… BF // AC'
Uit (a1) en (a2) blijkt nu dat vierhoek $BC'AF$ een parallellogram is. G is daarvan het snijpunt van de diagonalen, zodat G dus het midden is van AB. En dit laatste is hetgeen bewezen moest worden. ◊

6. Noot bij de appendix

[n1] Zie met betrekking tot deze eigenschap stelling 5.2 van:
» Dick Klingens (1999): *Isogonale verwantschap, antiparallel, punt van Lemoine*. Op: *http://www.pandd.demon.nl/isogon.htm*

=====