Negenpuntscirkel

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)
december 2009

In elke driehoek liggen de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de loodlijnstukken tussen hoogtepunt en hoekpunt (de 'bovenste hoogtelijnstukken') op dezelfde cirkel – de Feuerbach-cirkel of negenpuntscirkel.

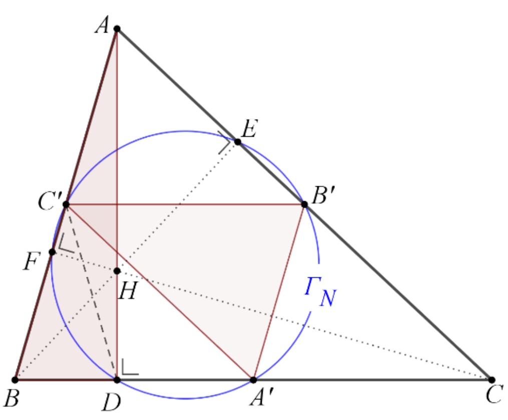
Deze cirkel was in 1763 reeds bekend aan Leonhard Euler (1707-1783, Zwitserland) [1], maar de cirkel wordt vaker in verband gebracht met en genoemd naar Karl (von) Feuerbach (1800-1832, Duitsland), die de cirkel in 1822 in zijn proefschrift "Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung" uitvoerig behandelde; overigens, Feuerbach maakt melding van slechts zes punten op 'zijn' cirkel. De middens van de 'bovenste hoogtelijnstukken' zijn in 1842 voor het eerst genoemd door Olry Terquem (1782-1862, Frankrijk).
De negenpuntscirkel gaat dus in ieder geval door *negen* bijzondere punten van een driehoek, maar er liggen zeker méér significante punten op. Verderop in dit artikel zal ik laten zien dat je, met gemak, ook van een *twaalfpuntscirkel* zou kunnen spreken.

Een *eenvoudig*, *synthetisch* bewijs kan in twee stappen worden beschreven:

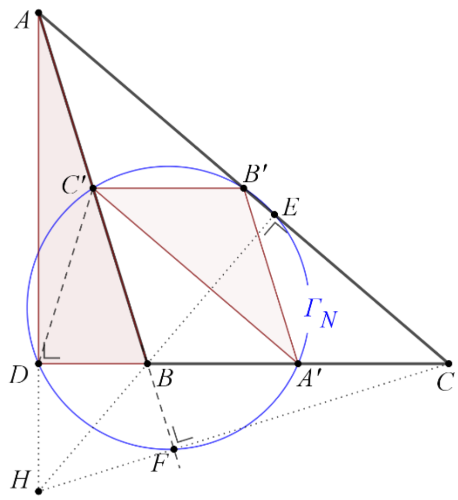
1. de cirkel die gaat door de middens van de zijden van een driehoek, gaat óók door de voetpunten van de hoogtelijnen;
2. de cirkel die gaat door de voetpunten van de hoogtelijnen van een driehoek, gaat óók door de middens van de 'bovenste hoogtelijnstukken'.

Bewijs van stap 1. Zie daarvoor figuur 1. De middens A', B', C' van de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC vormen de zogeheten centrumdriehoek (soms ook wel zwaartelijndriehoek of centrale driehoek genoemd). Deze driehoek heeft uiteraard een omcirkel (omgeschreven cirkel). Ik geef de cirkel in hetgeen volgt aan met Γ_N .

figuur 1



figuur 2



Is nu AD een hoogtelijn van driehoek ABC, dan moet bewezen worden dat het punt D óók op Γ_N ligt.
Driehoek ABD is rechthoekig in D en C' is het midden van de zijde AB van die driehoek. Dan is (volgens een bekende eigenschap van rechthoekige driehoeken):

- $C'D = \frac{1}{2}AB$

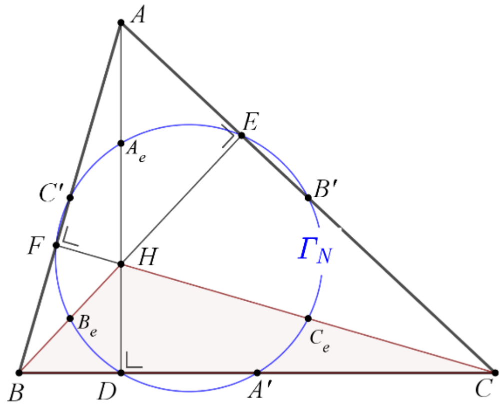
Maar ook is $A'B' = \frac{1}{2}AB$ (*middenparallel* in driehoek ABC), zodat:

- $A'B' = C'D$

Vierhoek $DA'B'C'$ (waarvan $B'C'$ // BC) is dan een *gelijkbenig trapezium*, en zo'n trapezium heeft een omgeschreven cirkel [2]. En dat is natuurlijk de cirkel Γ_N, omdat die cirkel ook al door A', B', C' gaat.
Op dezelfde manier kan worden aangetoond dat ook de voetpunten E, F van de hoogtelijnen uit B, C op Γ_N liggen.
Met andere woorden: naast A', B', C' liggen ook de punten D, E, F op Γ_N .

Opmerking. In het bewijs hierboven is uitgegaan van een *scherphoekige* driehoek ABC. Het gegeven bewijs geldt eveneens (en ongewijzigd) voor een *stomphoekige* driehoek; zie figuur 2. ◊

figuur 3



Bewijs van stap 2. Zie figuur 3. Ik ga uit van de hoogtelijnen AD, BE, CF van driehoek ABC.

In stap 1 is reeds bewezen dat de punten D, E, F op de cirkel Γ_N liggen, waarbij ik – ten overvloede, maar met enige nadruk – opmerk dat de middens van zijden van de driehoek óók op die cirkel liggen.

De middens van de 'bovenste hoogtelijnstukken' zijn A_e, B_e, C_e (deze punten worden wel de punten van Euler van de driehoek genoemd).

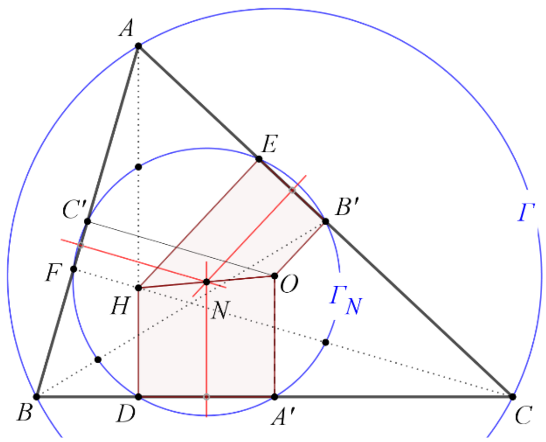
Ik bekijk nu in het bijzonder driehoek HBC. Van deze driehoek zijn de voetpunten van de hoogtelijnen de punten D, E, F (het punt A is het hoogtepunt). De cirkel Γ_N is dus óók de negenpuntscirkel van driehoek HBC.
En die cirkel gaat (zie het bewijs van stap 1) door de middens van de zijden HB en HC. In figuur 3 zijn dat de punten B_e en C_e.
Via een analoge redenering (met bijvoorbeeld driehoek HCA) kan worden aangetoond dat ook het midden A_e van het lijnstuk AH op Γ_N ligt.

Gevolgen

1. Het middelpunt N van de cirkel Γ_N valt samen met het midden van het lijnstuk HO, waarbij O het middelpunt is van de omcirkel Γ van driehoek ABC.
2. De (lengte van de) straal van Γ_N is gelijk aan de helft van de (lengte van de) straal van Γ.

Bewijs van gevolg 1. Zie figuur 4. Het punt N is het snijpunt van de middelloodlijnen van de lijnstukken $A'D$ en $B'E$ (en $C'F$). Deze lijnen zijn óók de middenparallellen in de (rechthoekige) trapezia $A'OHD$ en $B'OHE$. Elk van deze lijnen snijdt de gemeenschappelijke (schuine) zijde HO van beide trapezia in het midden van die zijde. Dat midden valt dus samen met het middelpunt N van Γ_N .

figuur 4



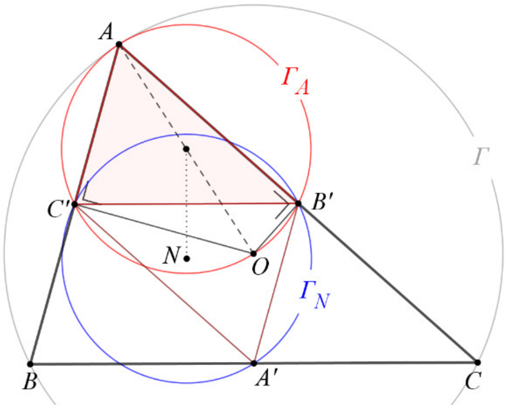
Bewijs van gevolg 2. De cirkel Γ_N is de omcirkel van driehoek $A'B'C'$ en Γ die van driehoek ABC.

Elk van de zijden van driehoek $A'B'C'$ is de helft van een zijde van driehoek ABC. Daarmee is driehoek $A'B'C'$ *gelijkvormig* met driehoek ABC (*hh*). De gelijkvormigheidsfactor is gelijk aan $\frac{1}{2}$.
En dan zijn de omcirkels van die driehoeken gelijkvormig met dezelfde factor, zodat:
de straal van Γ_N is gelijk aan de helft van de straal van Γ.

Van negen naar twaalf. Ik kijk nu in het bijzonder naar het punt O en naar driehoek $AC'B'$; zie figuur 5.

De middelloodlijnen OB' en OC' bepalen ook twee rechthoekige driehoeken AOB' en AOC', en daarmee ook een cirkel die gaat door de punten A, C', O en B'.

figuur 5



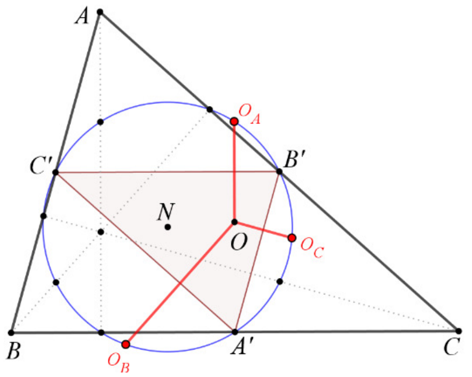
Die cirkel is de *omcirkel* Γ_A van driehoek $AC'B'$ (met het midden van AO als middelpunt).

Omdat de driehoeken $AC'B'$ en $A'B'C'$ (d.i. de centrum-driehoek) congruent zijn, zijn hun omcirkels dat dus ook: $\Gamma_A \cong \Gamma_N$.

Maar er is meer: die cirkels zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $B'C'$.[3]

Gevolg: het $B'C'$-spiegelbeeld van O, dat op Γ_A ligt, ligt dus op Γ_N ; zie figuur 6.
En geheel analoog liggen ook de beeldpunten van O bij spiegeling in $C'A'$ en in $A'B'$ op Γ_N .
De eerder gemaakte opmerking, dat er *meer* significante punten van een driehoek op de negenpuntscirkel liggen, is dus hiermee geïllustreerd.

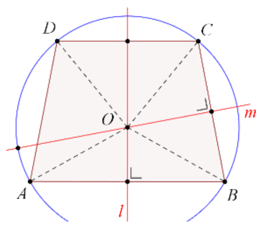
figuur 6



Noten

[1] In Franstalige wiskundige literatuur wordt de negenpuntscirkel vaak `cercle d'Euler` genoemd.
Zie op Wikipedia FR:
https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_d%27Euler

[2] Dat een *gelijkbenig* trapezium $ABCD$ (met $AB \,//\, CD$) een omcirkel heeft, is eenvoudig aan te tonen (zonder gebruik te maken van de term 'koordenvierhoek').



Immers, is l de middelloodlijn van AB en m de middelloodlijn van BC met $O = l \,\&\, m$, dan geldt:

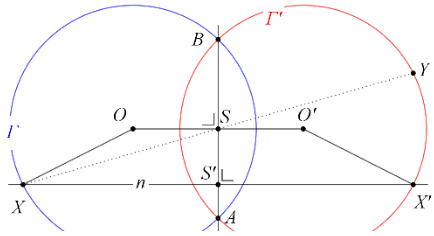
- $O \in l \quad \Rightarrow OA = OB$
- $O \in m \quad \Rightarrow OB = OC$

En omdat l ook de middelloodlijn is van CD geldt:

- $O \in l \quad \Rightarrow OC = OD$

Dus: $OA = OB = OC = OD$, en daarmee is O het middelpunt van de omcirkel van vierhoek $ABCD$.

[3] Uit het feit dat de driehoeken $AC'B'$ en $A'B'C'$ puntsymmetrisch zijn in het midden van het lijnstuk $B'C'$ kan/mag, volgens mij in deze context, niet *zonder meer* worden besloten dat de omcirkels elkaars lijnspiegelbeeld zijn. Vandaar het volgende.



In nevenstaande figuur zijn Γ en Γ' puntsymmetrisch in het punt S (dat hier binnen Γ ligt). Het punt S is dan het midden van het lijnstuk OO' (de centraal van Γ en Γ'). S is dan ook het midden van de gemeenschappelijke koorde AB van beide cirkels.
Is X een willekeurig punt ($\neq A, B$) van Γ en is n de loodlijn door X op AB, met $X' = n$ & Γ' en $S' = n$ & AB, dan is vierhoek $XX'O'O$ een gelijkbenig trapezium (OO' // XX' ; $XO = X'O'$).

AB is de middelloodlijn van OO' en daarmee ook van XX'. Zodat $XS' = S'X'$ is, waaruit de lijnsymmetrie in AB van beide cirkels blijkt.

======