Over het nevencentrum van een koordenvierhoek

Dick KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)

september 2017

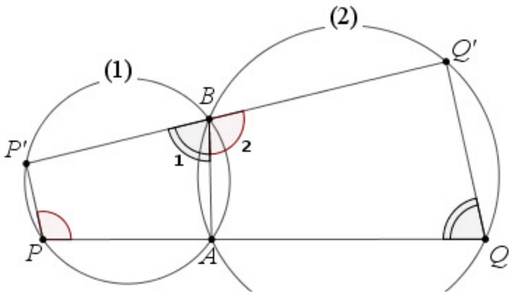
1. Cirkels van Reim

Allereerst – dus voordat ik enige inhoud geef aan de kop van dit artikel – bewijs ik een stelling die ik in hetgeen daarna volgt een aantal keren zal gebruiken. Ik gebruik ook de hierna volgende terminologie; zie figuur 1.

- De cirkels (1) en (2) snijden elkaar in de *basispunten* A en B.
- De koorden PA en QA liggen in elkaars verlengde, de koorden $P'B$ en $Q'B$ eveneens. Deze koorden heten daarom *dubbelkoorden*.
  Notatie: PAQ en $P'BQ'$; de naam van een basispunt staat dus in (het midden van) de naam van de koorde.
- Is $\angle UXV \neq 180°$ dan is $[UXV]$ een zogeheten *gebroken lijnstuk*.

Stelling 1 (**stelling van Reim** [1]). A en B zijn de basispunten van de cirkels (1) en (2); PAQ is een dubbelkoorde van dit ‘stelsel’. Dan:
$[P'BQ']$ is een dubbelkoorde *desda* $PP' \,//\, QQ'$. ◊

figuur 1



Bewijs (noodzakelijk). Stel $P'BQ'$ is een dubbelkoorde; m.a.w.: $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$.
Dan is:
- in koordenvierhoek $PABP'$: $\angle P + \angle B_1 = 180°$;
- in koordenvierhoek $AQQ'B$: $\angle B_2 + \angle Q = 180°$.

Opgeteld:
$$\angle P + (\angle B_1 + \angle B_2) + \angle Q = 360°$$
Zodat: $\angle P + \angle Q = 180°$.
En daarmee is $PP' \,//\, QQ'$, omdat de hoeken P en Q binnenhoeken zijn bij de dragers van PP' en QQ'.

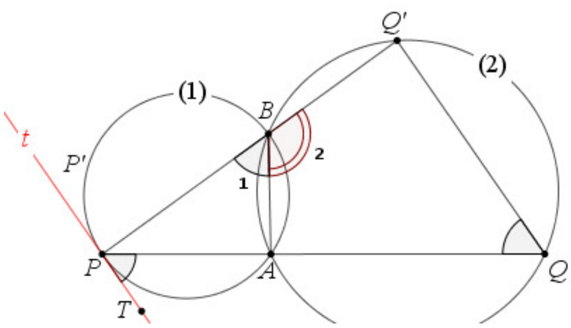
Bewijs (voldoende). Stel $PP' \,//\, QQ'$, zodat $\angle P + \angle Q = 180°$ (*binnenhoeken*). Nu is ‘nog steeds’:
- in koordenvierhoek $PABP'$: $\angle P + \angle B_1 = 180°$;
- in koordenvierhoek $AQQ'B$: $\angle Q + \angle B_2 = 180°$.

Na optelling blijkt: $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$, zodat $[P'BQ']$ inderdaad een dubbelkoorde is. ◊

Gevolg. In figuur 2 staat een ‘ontaarde’ illustratie van de stelling van Reim. De beide dubbelkoorden hebben P als gemeenschappelijk punt *op* cirkel (1).
Ik bewijs nu:

Stelling 1ad. De lijn t is de raaklijn in P aan (1) *desda* $t \,//\, QQ'$.

figuur 2



Bewijs (noodzakelijk). $\angle P = \angle TPA = ½\text{bg}(AP)$.
Maar ook is $\angle B_1 = ½\text{bg}(AP)$. Dus:
$$\angle P = \angle B_1$$
En daarbij is $\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$, zodat voor hoek Q in de koordenvierhoek $AQQ'B$ geldt:
$$\angle Q = \angle P$$
Maar dan is $t \,//\, QQ'$, omdat $\angle P$ en $\angle Q$ verwisselende binnenhoeken zijn bij de lijn t en de drager van QQ'.

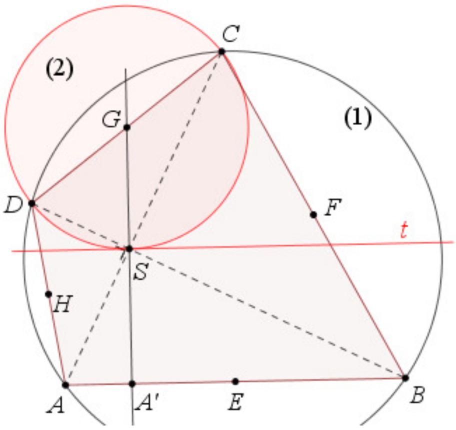
Bewijs (voldoende). Nu ga ik uit van een lijn t door P waarbij $\angle P = \angle TPA = \angle Q$; ik moet nu immers uitgaan van $t \,//\, QQ'$, en bewijzen dat t raaklijn is aan (1).
Bij de koordenvierhoek $AQQ'B$ is $\angle Q = \angle B_1$ (*binnenhoek*, *overstaande buitenhoek*), zodat $\angle P = \angle B_1$.
Omdat $\angle B = ½\text{bg}(AP)$ is ook $\angle P = ½\text{bg}(AP)$.

Maar dit kan alleen maar als de lijn t *raaklijn* is in P aan cirkel (1). ◊

2. Orthodiagonaal (bijvoeglijk) en orthomediaan (zelfstandig)

Ik kijk eerst naar zogenoemde *orthodiagonale* koordenvierhoeken. Dat zijn koordenvierhoeken waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

figuur 3a



In figuur 3a is $ABCD$ een orthodiagonale koordenvierhoek met omcirkel (1).
S is het diagonaalcentrum (het snijpunt van de diagonalen) en G is het midden van CD.[2]
Verder is GS & $AB = A'$. Dan geldt:

≡≡ $GA' \perp AB$.

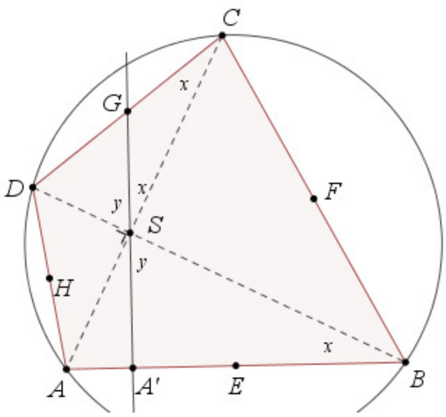
Bewijs. De omcirkel (2) van driehoek SCD is een *Thales-cirkel* met middelpunt G.
Beide cirkels vormen nu 'Reim-stelsel', met C en D als basispunten.

De dubbelkoorden ACS en BDS snijden elkaar in S, gelegen op (2). Overeenkomstig stelling 1ad is dan de raaklijn t in S aan (2) evenwijdig met AB. En GS staat loodrecht op t (*straal*, *raaklijn*), zodat inderdaad $GA' \perp AB$. ◊

Opmerkingen

1. Dat GA' loodrecht staat op AB kan ook 'direct' bewezen worden door middel van "hoeken jagen".

figuur 3b



Driehoek SCG is gelijkbenig, omdat die driehoek een deel van een *Thales-driehoek* is.
Stel $\angle SCG = \angle CSG = x$ en $\angle GSD = y$. Dan is:

$$x + y = \angle CSD = 90^\circ$$

Ook is:

$$\angle SCG = \angle ACD = \tfrac{1}{2}\text{bg}(AD)$$

Maar dan geldt ook:

$$\angle ABD = \tfrac{1}{2}\text{bg}(AD) = \angle SCG = x$$

Verder is:

$\angle BSA' = y$ (*overstaande hoeken*)

Direct is dan in te zien dat in driehoek $A'BS$ hoek A' een rechte hoek is. ◊

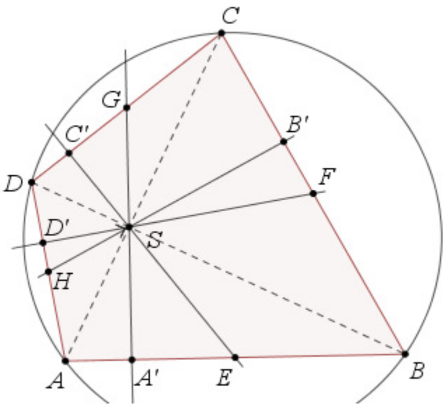
2. Het omgekeerde van deze eigenschap geldt eveneens:

≡≡ ALs de loodlijn uit S op AB snijdt de zijde CD in G, dan G is het midden van CD. ◊

Definitie. Een lijn die door het midden van een zijde van een koordenvierhoek gaat én loodrecht staat op de overstaande zijde, heet *orthomediaan* van die koordenvierhoek.[3]

In figuur 3a (en 3b) is GA' een orthomediaan van $ABCD$; in dit geval zou men kunnen spreken van de AB-orthomediaan.

figuur 4

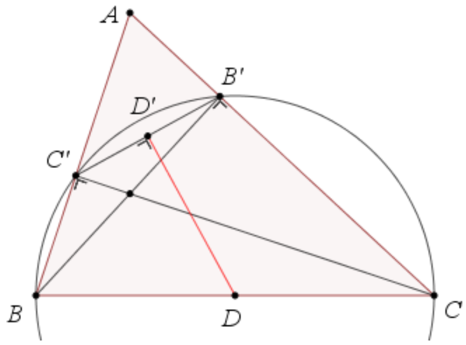


Omdat het punt *S* een *vast* punt is van de beschouwde koordenvierhoek en dezelfde redenering kan worden opgezet uitgaande van *ES*, *FS* en *HS*, geldt:

Stelling 2. In een orthogonale koordenvierhoek snijden de vier orthomedianen elkaar in het diagonaalcentrum van die koordenvierhoek. ◊

Voorbeeld. Om te gebruiken…(?)
Het bovenstaande heeft iets weg van de in figuur 5 staande configuratie.

figuur 5



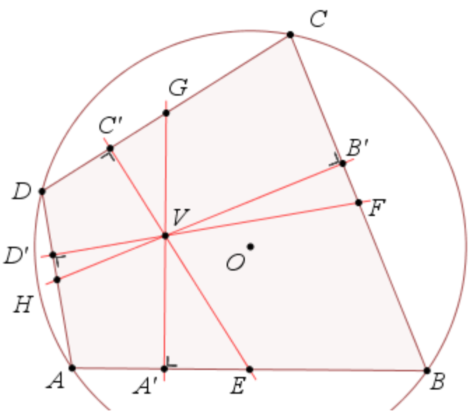
In driehoek *ABC* zijn *BB'* en *CC'* hoogtelijnen.
D is het midden van *BC* en *DD'* staat loodrecht op *B'C'*.
DD' is dus een orthomediaan in de koordenvierhoek *BCB'C'*.

En dan is *D'* hier het midden van het lijnstuk *B'C'*.

Een bewijs voor dit laatste? Bijna triviaal: *B'C'* is een koorde van de cirkel met middelpunt *D* en loodlijnen uit het middelpunt op koorden gaan door het midden van die koorden. ◊

3. Een willekeurige koordenvierhoek

figuur 6



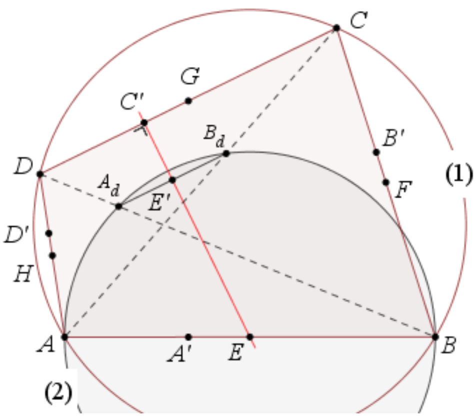
In figuur 6 zijn de zes orthomedianen in een willekeurige koordenvierhoek *ABCD* getekend. *E*, *F*, *G*, *H* zijn de middens van de zijden van die vierhoek.

Vraag – Gaan de lijnen *EC'*, *FD'*, *GA'*, *HB'* inderdaad door hetzelfde punt *V*?
Antwoord – Ja.

Ik zal bewijzen:

Stelling 3. Een vierhoek is een koordenvierhoek *desda* de orthomedianen zijn concurrent.[4] ◊

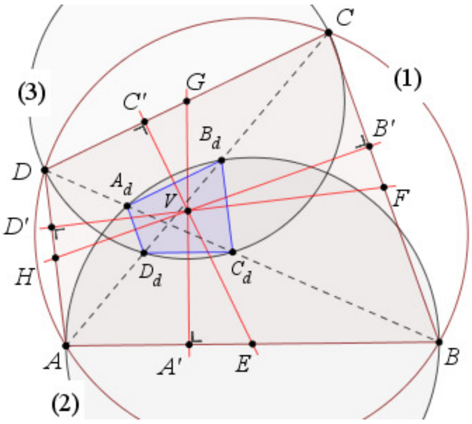
figuur 7a



Bewijs (noodzakelijk). *E* is het midden van *AB* en *C'* is het voetpunt van de *CD*-orthomediaan.
De cirkel op *AB*, middelpunt *E*, aangegeven met (2), snijdt de diagonalen in A_d en B_d.
Omcirkel (1) en cirkel (2) vormen een 'Reim-stelsel' met *A* en *B* als basispunten. Voor de dubbelkoorden CAB_d en DBA_d blijkt met het gevolg van stelling 1 dat $CD \parallel A_dB_d$.
Met *E'* als midden van A_dB_d is *EE'* de middelloodlijn van A_dB_d.

De *CD*-orthomediaan van *ABCD* valt dus samen met de middelloodlijn van A_dB_d. Of anders gezegd: de punten *E*, *E′*, *C′* zijn collineair. (Het bewijs wordt nu min of meer onderbroken.)

figuur 7b



De snijpunten van cirkel (3), die *CD* als middellijn heeft, met de diagonalen van *ABCD* zijn C_d en D_d.

En analoog geldt nu, overeenkomstig de beschouwingen bij figuur 7a:

- AB // C_dD_d, BC // A_dD_d, DA // C_dB_d ;
- *FD′*, *GA′*, *HB′* zijn de middelloodlijnen van opvolgend de zijden B_dC_d, C_dD_d, D_dA_d.

Merk verder op dat vierhoek $A_dB_dC_dD_d$ dezelfde diagonalen heeft als *ABCD*.

Daaruit volgt dat ook $A_dB_dC_dD_d$ een koordenvierhoek is (er is sprake van *indirecte* gelijkvormigheid).

Ik geef in hetgeen volgt het middelpunt van de omcirkel van $A_dB_dC_dD_d$ aan met de letter *V*.[5]
Het punt staat in de wiskundige literatuur bekend onder de naam nevencentrum, anticentre (Frans), retrocenter (Engels), punt van Mathot en ook als punt van Euler (het zoveelste).
Ik gebruik de term *nevencentrum*.

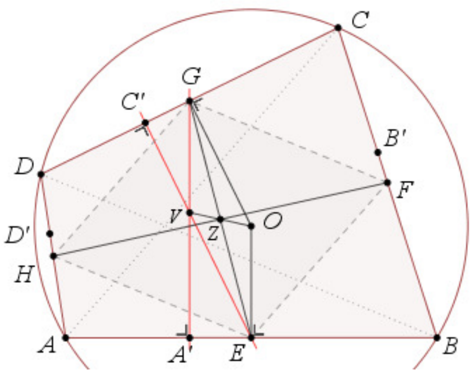
Opmerking. Met de kennis uit paragraaf 2 (zie stelling 2) blijkt dus:

≡≡ In een orthodiagonale koordenvierhoek vallen het diacentrum en het nevencentrum samen. ◊

(En nu pak ik het bewijs van stelling 3 weer op.)
De lijn *EC′* gaat als middelloodlijn van de zijde A_dB_d van de koordenvierhoek $A_dB_dC_dD_d$ uiteraard door het punt *V*. En dat geldt ook voor de andere middelloodlijnen van die koordenvierhoek, te weten: de lijnen *FD′*, *GA′* en *HB′*.
Met andere woorden: de orthomedianen van de koordenvierhoek *ABCD* zijn concurrent in het punt *V* (zie figuur 6).
Geformuleerd: *als* *ABCD* is een koordenvierhoek, *dan* de orthomedianen van *ABCD* zijn concurrent. ◊

Voordat ik het ‘voldoende’ deel van het bewijs van stelling 3 geef, kijk ik eerst naar de ligging van het punt *V* ten opzichte van het omcentrum *O* van *ABCD*; zie figuur 7c.

figuur 7c



Er zitten parallellogrammen in deze configuratie:

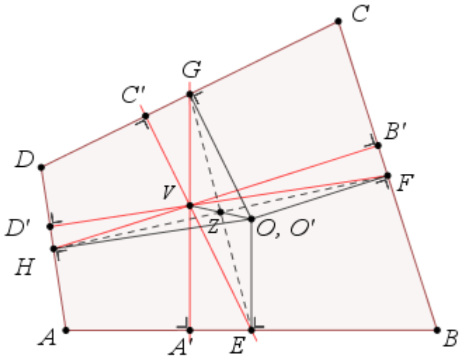
- *EFGH*, het zogeheten Varignon-parallellogram van *ABCD* (*EF* // ½*AC*, *GH* // ½*AC*);
- *EOGV* (*EO* // *GA′*, *OG* // *EC′*)

De bimedianen *EG* en *FH* zijn de diagonalen van *EFGH*.
Hun snijpunt is *Z*.
Maar *EG* is ook een diagonaal van *EOGV*.
Het punt *Z* is daarom het midden van het lijnstuk *OV*.[6]

Of ook: het punt *V* is het (punt)spiegelbeeld van het omcentrum *O* van *ABCD* in het punt *Z*.

Bewijs van stelling 3 (voldoende). Ik zal (moet) nu aantonen dat het snijpunt *O′* van de middelloodlijnen van de zijden *BC* en *DA* samenvalt met *O* dat het snijpunt is van de middelloodlijnen van AB en CD, gegeven het feit dat de orthomedianen van *ABCD* concurrent zijn in *V*; zie figuur 7d.

figuur 7d



Op basis van de gegevens zijn er twee parallellogrammen:

- *EOGV*, met *VO* als diagonaal, waarvan *Z* het midden is;
- *FVHO′*, met diagonaal *VO′*, waarvan *Z* het midden is.

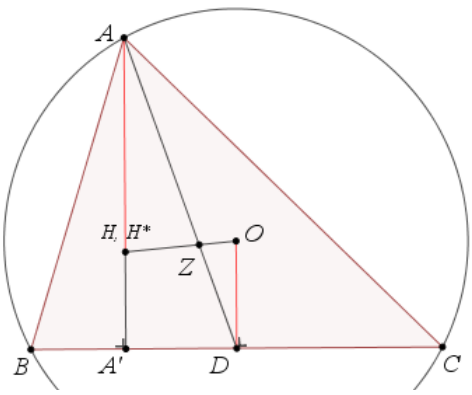
Immers, de beide andere diagonalen van die parallellogrammen zijn de bimedianen van *ABCD* die *Z* als snijpunt hebben.
Conclusie:
$O \equiv O'$

Met andere woorden: er is een punt *O* waarvoor $OA = OB = OC = OD$. Vierhoek *ABCD* heeft daarmee een omcirkel met middelpunt *O* en is dus een koordenvierhoek.
Geformuleerd: *als* de orthomedianen van *ABCD* zijn concurrent, *dan* *ABCD* is een koordenvierhoek.
En hiermee is stelling 3 volledig (noodzakelijk en voldoende) bewezen. ◊

4. Herhaling?

Stelling 4. De afstand van het omcentrum van een driehoek tot een zijde is de helft van (de lengte van) het “bovenste stuk” van de hoogtelijn op die zijde.[7]

figuur 8



Bewijs. Er moet dus bewezen worden dat:
$AH = 2 \cdot OD$
waarbij *D* het midden van is *BC*, en *H* het hoogtepunt.

AD is de zwaartelijn uit *A*, met het zwaartepunt *Z* daarop.
V is de vermenigvuldiging met *Z* als centrum en factor -2.

Daarmee is:
$V(D) = A$ en $V(O) = H^*$, met $AH^* = 2 \cdot OD$

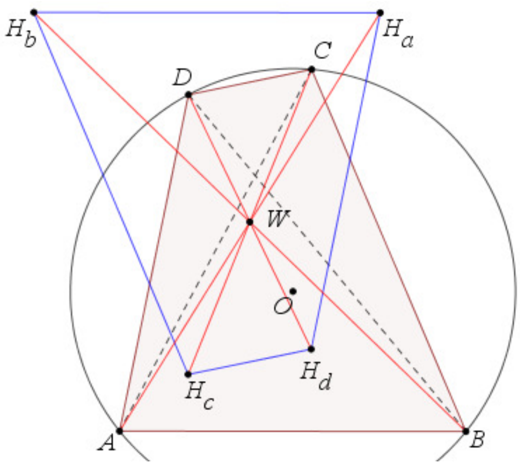
Ik zal nu laten zien dat $H \equiv H^*$.
Bij bedoelde vermenigvuldiging is $AH^* \,//\, OD$, zodat $AH^* \perp BC$. AH^* is dus de hoogtelijn uit *A*; of anders gezegd: H^* ligt op de hoogtelijn uit *A*.
Eenzelfde redenering kan worden opgesteld uitgaande van het hoekpunt *B* of het hoekpunt *C*, bij de *vaste* punten *O*, *Z* en H^*. De hoogtelijnen uit *A*, *B*, *C* gaan dus alle drie door H^*.
Met andere woorden: $H \equiv H^*$. ◊

5. Met diagonaaldriehoeken

Definitie. Een *diagonaaldriehoek* van een vierhoek wordt gevormd door drie hoekpunten van die vierhoek en hun verbindingslijnstukken.

Ik bekijk nu de hoogtepunten van de vier diagonaaldriehoeken van koordenvierhoek *ABCD*; het zijn de punten H_a, H_b, H_c, H_d van opvolgend de driehoeken *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC*; zie figuur 9a.

figuur 9a

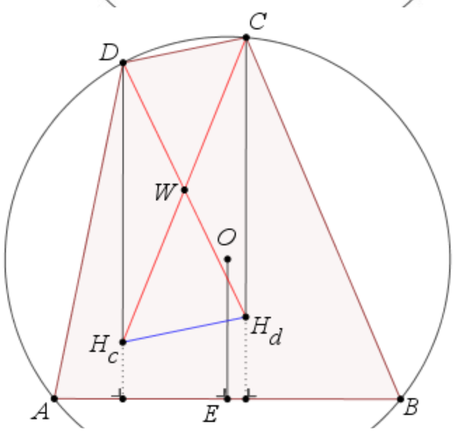


Tja, wat kan er worden gezegd van de lijnen AH_a, BH_b, CH_c, DH_d?
Gaan ze alle door hetzelfde punt W?
En, is vierhoek $H_aH_bH_cH_d$ soms ook een koordenvierhoek?

Ik kijk eerst maar eens naar een eenvoudiger configuratie.

In figuur 9b zijn alleen de hoogtepunten H_c en H_d van de diagonaaldriehoeken ABD en ABC opgenomen.
Het punt E is het midden van zijde AB.

figuur 9b



Volgens stelling 4 is dan:
- in driehoek ABD: $DH_c = 2 \cdot OE$
- in driehoek ABC: $CH_d = 2 \cdot OE$

zodat:

$$DH_c = CH_d$$

Verder is $DH_c \perp AB$ en $CH_d \perp AB$, waaruit blijkt dat:

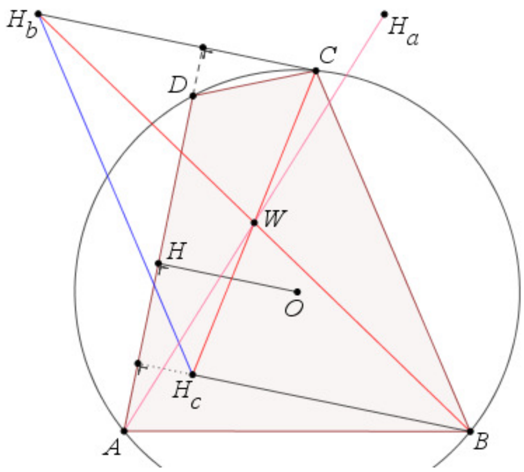
$$DH_c \,//\, CH_d$$

Maar dan is CDH_cH_d een parallellogram!

Ik geef het midden van diagonaal CH_c (alvast maar) aan met W.

Gaan de lijnen AH_a en BH_b ook door W?
Voor het antwoord op deze vraag neem ik ook het punt H_b erbij; zie figuur 9c. H_b is het hoogtepunt van driehoek CDA. Ik bekijk dan vierhoek BCH_bH_c. Het punt H is het midden van DA.

figuur 9c



En ook hier is volgens stelling 4:
- in driehoek CAD: $CH_b = 2 \cdot OH$
- in driehoek DAB: $BH_c = 2 \cdot OH$

En daaruit blijkt:

$$CH_b = BH_c$$

En verder is $CH_b \,//\, BH_c$ (ze staan beide loodrecht op DA).
Zodat ook vierhoek BCH_bH_c een parallellogram is, waarin CH_c (zie figuur 9b) eveneens een diagonaal is.
De andere diagonaal, BH_b, gaat zodoende ook door W.

En natuurlijk kan geheel analoog bewezen worden dat ook AH_a door W gaat.
En dan geldt:

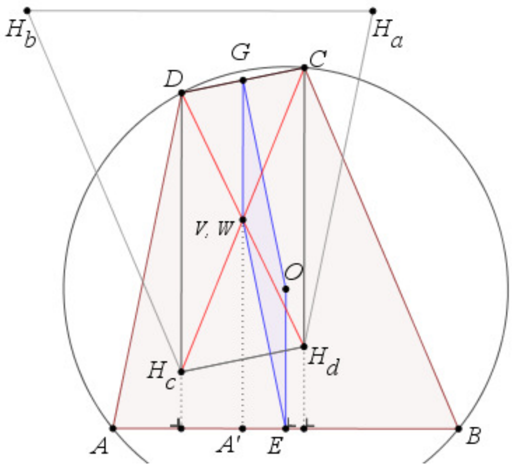
Stelling 5. In een koordenvierhoek snijden de verbindingslijnen van de hoogtepunten van de diagonaaldriehoeken met het ‘overgebleven’ hoekpunt van de vierhoek elkaar in hetzelfde punt; zie figuur 9a.

Gevolg. De bedoelde verbindingslijnen delen elkaar in het punt W middendoor. Ook de bij figuur 9a gestelde tweede vraag kan nu beantwoord worden.
De vierhoek $H_aH_bH_cH_d$ is een koordenvierhoek omdat een puntspiegeling met W als centrum $ABCD$ afbeeldt op $H_aH_bH_cH_d$. De vierhoeken $ABCD$ en $H_aH_bH_cH_d$ zijn dus congruent. ◊

Het punt W wordt wel het *Mathot-punt*[8] van koordenvierhoek $ABCD$ genoemd.

Ik bewijs vervolgens dat het punt W samenvalt met het nevenpunt V van $ABCD$; zie figuur 9d, waarin onder meer de vierhoek CDH_cH_b opnieuw is weergegeven, samen met *vierhoek* $\boldsymbol{W}EOG$.

figuur 9d



In driehoek CDH_c is:

$GW = ½DH_c$ (*middenparallel*)

Ook is (en dat stond hiervoor al):

$DH_c = 2 \cdot OE$ (stelling 4 in diagonaaldriehoek DAB)

En daarmee is dan $GW = OE$.

En ook:

$GW \,//\, DH_c$ én $DH_c \perp AB$ waaruit volgt: $GW \perp AB$

Ook is (heel bekend dat) $OE \perp AB$, zodat:

$GW \,//\, OE$

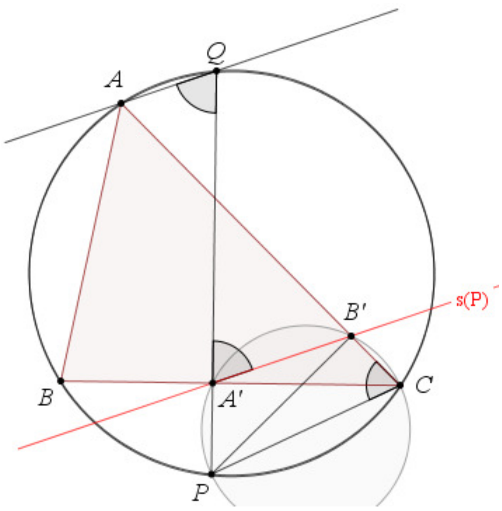
Maar dan is $WEOG$ een parallellogram. En dat parallellogram is ook hiervoor al ter sprake gekomen, namelijk bij stelling 3: GW is een orthomediaan van $ABCD$ en OG is een lijnstuk dat evenwijdig is aan de CD-orthomediaan door E. Dus: $W \equiv V$.
In woorden:

Stelling 6. Het Mathot-punt en het nevencentrum van een koordenvierhoek vallen samen.

6. Ook een herhaling?

Stelling 7.1. De drie spiegelbeelden van een punt van de omcirkel van een driehoek in de zijden van die driehoek liggen op dezelfde rechte lijn.
Deze lijn heet de *Steiner-lijn* van dat punt op de omcirkel bij de driehoek.[9]
7.2. De Steiner-lijn van een punt (van de omcirkel) bij een driehoek gaat door het hoogtepunt van die driehoek.

figuur 10a



Bewijs. Ik bewijs eerst iets over het hoogtepunt H in samenhang met de zogeheten *Simson-lijn* $s(P)$ van het punt P. Zie daartoe eerst figuur 10a.
Zoals bekend [10] is dit de lijn door de projecties A', B' (en C') van het punt P op de zijden van de driehoek.
Q is het tweede snijpunt van de 'BC-spiegelende' lijn van P.
Vierhoek $CB'A'P$ is een koordenvierhoek. Dus:

$\angle PCB' = \angle B'A'Q$ (*binnen- en buitenhoek*)

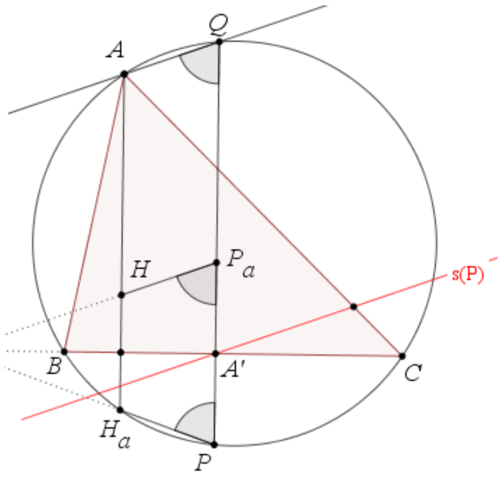
Ook is:

$\angle PCB' = ½\text{bg}(PBA) = \angle AQP$

Dan blijkt:

$AQ \,//\, s(P)$

figuur 10b



Ook is bekend dat H_a (het snijpunt van de hoogtelijn uit A met de omcirkel) het spiegelbeeld is van H in BC.
Wegens de spiegelsymmetrie is dan:

$\angle HP_aA' = \angle H_aPA'$

En verder ook:

$\angle H_aPA' = ½(\text{ bg}(H_aBA) + \text{bg}(AQ))$

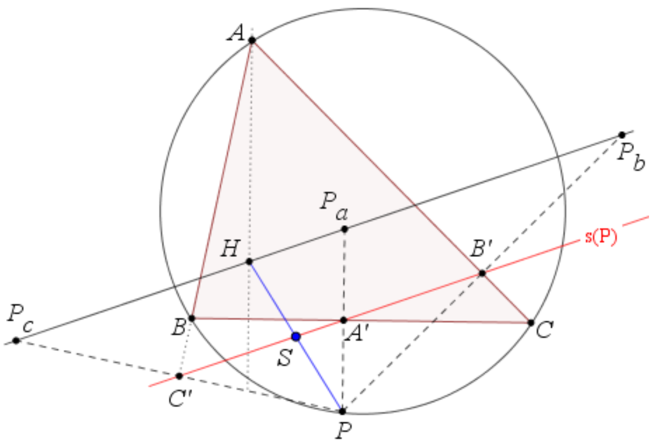
en:

$\angle AQP = ½(\text{ bg}(ABH_a) + \text{bg}(H_aP))$

En omdat $\text{bg}(H_aP) = \text{bg}(AQ)$ (immers, $AH_a \parallel QP$) volgt hieruit dat $\angle HP_aA' = \angle AQP$.
En dit houdt in dat:

$HP_a \parallel AQ \parallel s(P)$ of $HP_a \parallel \text{Simson}(P)$

figuur 10c



Uit de constructie van de spiegelbeelden van P in de zijden blijkt dat de punten P_a, P_b, P_c op dezelfde rechte lijn liggen.
Immers, bij een vermenigvuldiging met factor 2 met P als centrum gaan de snijpunten A', B', C' van de 'spiegelende' lijnen met de zijden over in de punten P_a, P_b, P_c.
De Steiner-lijn van P is dan het beeld van de Simson-lijn van P bij die vermenigvuldiging.

Zodat ook:

Simson(P) // Steiner(P)

Omdat hierboven bewezen is dat HP_a evenwijdig is met Simson(P) ligt het hoogtepunt H dus op Steiner(P), welke lijn immers ook door P_a gaat. ◊

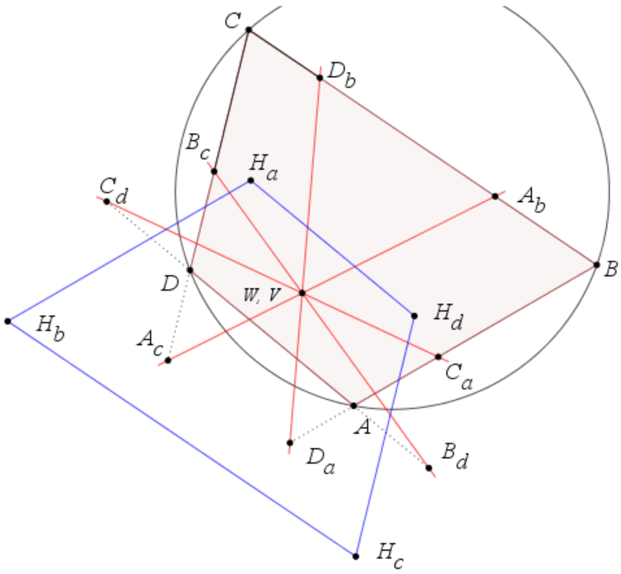
Gevolg van stelling 7. Is P een punt van de omcirkel van een driehoek, dan ligt het midden S van het lijnstuk PH (het punt H is hoogtepunt van de driehoek) op de Simson-lijn van P. ◊

7. Simson-lijnen in een koordenvierhoek

Ik geef direct maar de te bewijzen eigenschap:

Stelling 8. De Simson-lijnen van een hoekpunt van een koordenvierhoek bij de diagonaaldriehoek bepaald door de 'andere drie' hoekpunten zijn concurrent.

figuur 11a



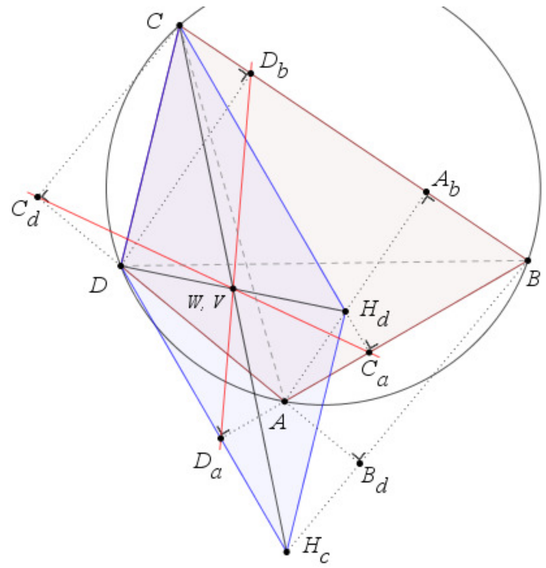
In figuur 11a staat een illustratie van stelling 8.
De hoogtepunten van de deeldriehoeken zijn weer H_a, H_b, H_c, H_d.

A_b is de projectie van A op BC, A_c is de projectie van A op CD; dan is A_bA_c de Simson-lijn van A bij BCD: Simson(A, BCD).
B_c is de projectie van B op CD, B_d is de projectie van B op DA; dan is B_cB_d Simson(B, CDA).
Enzovoort.

Zo op het oog gaan de lijnen A_bA_c, B_cB_d, C_dC_a en D_aD_b inderdaad door eenzelfde punt W.

En wat zal blijken: $W \equiv V$; W valt samen met het nevenpunt V van $ABCD$.
Ik bekijk een en ander in een iets vereenvoudigde figuur; zie figuur 11b.

figuur 11b



Merk op dat H_c, H_d de hoogtepunten zijn van de driehoeken DAB, ABC.
En dat V het snijpunt is van CH_c en DH_d, het Mathot-punt van $ABCD$ (zie stelling 6).

C_aC_d is de Simson-lijn van C bij driehoek DAB;
D_aD_b is de Simson-lijn van D bij driehoek ABC.

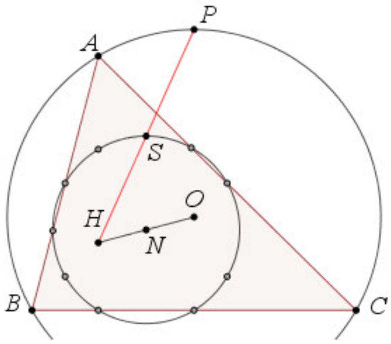
Overeenkomstig het gevolg van stelling 7:
- bij driehoek DAB: het midden van CH_c ligt op de Simson-lijn van C;
- bij driehoek ABC: het midden van DH_d ligt op de Simson-lijn van D.

In het parallellogram CDH_cH_d zijn dat de middens van de diagonalen. En dan is inderdaad $W \equiv V$.
En mutatis mutandis blijkt dat ook A_bA_c en B_cB_d door het nevenpunt V gaan. ◊

8. Negenpuntscirkels in een koordenvierhoek.

Ik ga er van uit dat de belangrijkste eigenschappen van de negenpuntscirkel (npc) van een driehoek (omcentrum O, hoogtepunt H) bij de lezer bekend zijn (zie figuur 12); zo niet zie [11]:
- de npc gaat door de middens van de zijden van de driehoek;
- de npc gaat door de voetpunten van de hoogtelijnen;
- de npc gaat door de middens van de ‘bovenste stukken’ van de hoogtelijnen;
- het middelpunt N van de npc is het midden van het lijnstuk OH;
- de straal van de npc is de helft van de straal van de omcirkel van de driehoek.

figuur 12

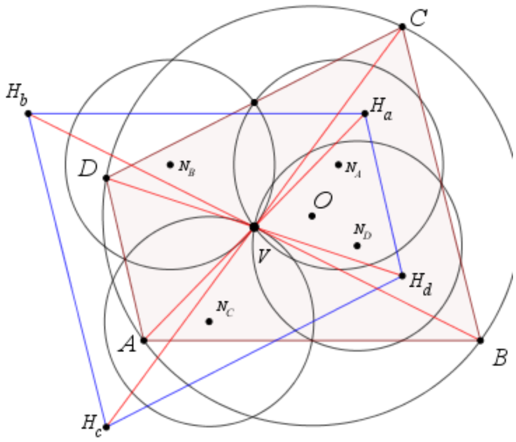


Gevolg. Ligt een punt *P* op de omcirkel van driehoek *ABC*, dan ligt het midden *S* van het lijnstuk *PH* op de negenpuntscirkel van driehoek *ABC*.
Immers, de negenpuntscirkel is het beeld van de omcirkel bij een vermenigvuldiging met de factor ½ en *H* als centrum.

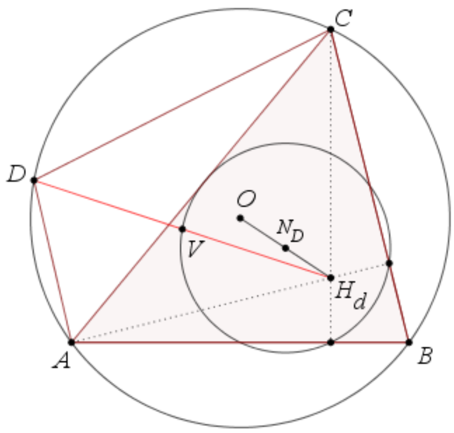
Elke diagonaaldriehoek van een koordenvierhoek heeft dus een negenpuntscirkel. Die cirkels zijn even groot, immers de straal van elk is gelijk aan de helft van die van de omcirkel van de koordenvierhoek.

Stelling 9a. De negenpuntcirkels van de diagonaaldriehoeken van een koordenvierhoek snijden elkaar in hetzelfde punt; zie figuur 13a.
9b. De negenpuntscentra van de diagonaaldriehoeken zijn de hoekpunten van een koordenvierhoek die gelijkvormig is met de oorspronkelijke koordenvierhoek.

figuur 13a



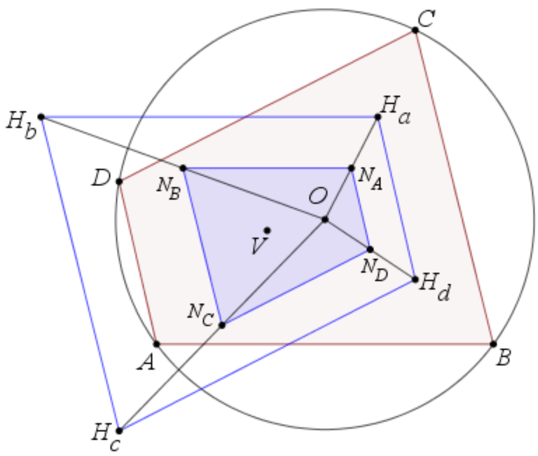
figuur 13b



Bewijs van 9a. Zie figuur 13b. Uit de vermenigvuldiging met ½ van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* ten opzichte van het hoogtepunt H_d (zie ook het gevolg van stelling 7) volgt dat het beeld van *D* – en dat is het nevenpunt *V* – op de negenpuntscirkel van driehoek *ABC* ligt.
Dit geldt voor elke vermenigvuldiging met H_i als centrum ($i = a$, *b*, c en factor ½), zodat de negenpuntscirkels van de diagonaaldriehoeken van de koordenvierhoek het punt *V* gemeenschappelijk hebben. ◊

Opmerking. Het nevenpunt van de koordenvierhoek *ABCD* wordt in de configuratie met de vier negenpuntscirkels ook wel het *punt van Euler*[12] van *ABCD* genoemd. ◊

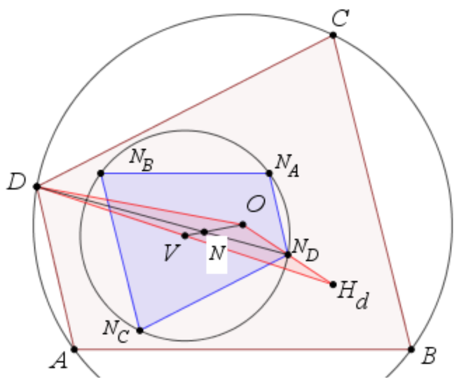
figuur 13c



Bewijs van 9b. Zie figuur 13c. De punten N_i (met i = *a*, *b*, *c*, *d*) zijn de middens van de lijnstukken OH_i . Hierboven bleek – in het gevolg van stelling 5 – dat $H_aH_bH_cH_d$ een koordenvierhoek was, die op grond van de puntspiegeling in *V* congruent was met *ABCD*.
$N_AN_BN_CN_D$ is dan een koordenvierhoek die gelijkvormig is met *ABCD*, met factor ½. ◊

Opmerking. Er is ook een iets andere manier om stelling 9b te bewijzen; zie daarvoor figuur 13d.

figuur 13d



In driehoek ODH_d zijn OV en DN_D zwaartelijnen (V is immers het midden van DH_d, en N_D is midden van OH_d). Hun snijpunt N, het zwaartepunt van ODH_d, verdeelt daardoor het lijnstuk OV in stukken met de volgende verhouding:

$$VN : NO = 1 : 2$$

Zij nu N het centrum van een vermenigvuldiging met factor -½.

Met deze vermenigvuldiging wordt vierhoek $ABCD$ en diens omcirkel afgebeeld op $N_AN_BN_CN_D$ en diens omcirkel en daardoor is er inderdaad sprake van gelijkvormigheid van beide vierhoeken. ◊

9. Noten

[1] Naar Anton Reim, 1832-1922, Duits Bohemen / Sudetenland. De beide cirkels worden wel *cirkels van Reim* genoemd.

[2] In hetgeen volgt betekent $A = x \,\&\, y$: A is het (een) gemeenschappelijk punt van de meetkundige objecten x en y. $\{A, B\} = x \,\&\, y$ betekent: de snijpunten van de objecten x en y zijn A en B.

[3] Deze definitie c.q. afspraak is beperkt tot dit artikel. In de Nederlandse wiskundeliteratuur bestaat er geen algemeen gebruikte naam of term voor een dergelijke lijn.

[4] Deze stelling staat bekend als de *stelling van Bretschneider*; naar Carl Anton Bretschneider (1808-1878, Duitsland) die van de eigenschap melding maakte in "*Ueber die abgeleiteten Vierecke, welch von je vier merkwärdigen Punkten des geradlinigen Viereck gebildet worden*". Dit artikel staat in het tijdschrift *Mathematik und Physik* (ook bekend als *Grunert*, d.i. de naam van de uitgever van het tijdschrift, J.A. Grunert); 3e jaargang, 1843, pp. 84-99.

[5] De bedoelde cirkel heet wel *cirkel van Morel*; naar Amédée Morel (Frankrijk), die in 1867 bij de oplossing van een wiskundig probleem in het tijdschrift *Nouvelles Annales de Mathématiques* de cirkel vermeldde.

[6] Er zijn overwegingen om het punt Z, het snijpunt van de bimedianen van een vierhoek, het *zwaartepunt* (van de hoekpunten) van die vierhoek te noemen.

[7] Aan deze stelling wordt soms gerefereerd met *stelling van Carnot*; naar Lazare Carnot (1753-1823, Frankrijk).

[8] Naar Jules Mathot (Frankrijk), die deze eigenschap publiceerde in het tijdschrift *Mathesis*, 1901, pp. 25-26.

[9] Naar Jakob Steiner, 1796-1863, Zwitserland.

[10] En zo niet, zie dan bijvoorbeeld:
Dick Klingens (2008): *De lijn van Simson en een enveloppe*. Elektronisch beschikbaar via (website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/simson.htm

[11] Dick Klingens (2000): *Over de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler*. Elektronisch beschikbaar via (website van de auteur):
http://www.pandd.demon.nl/feuerbach.htm

[12] Naar Leonard Euler, 1707-1783, Zwitserland

versie 1.0 – 13 september 2017 / versie 1.1 – 20 september 2017

versie 2.0 – 22 september 2017