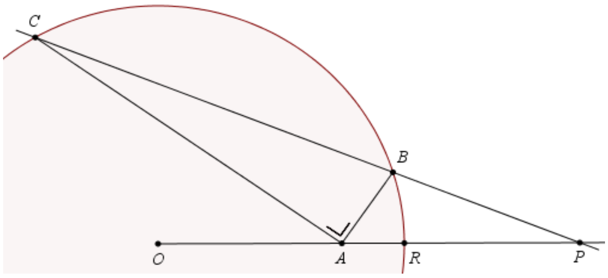
Een niet zo('n) eenvoudige constructie

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)
Krimpen aan den IJssel, september 2017

1. Het probleem



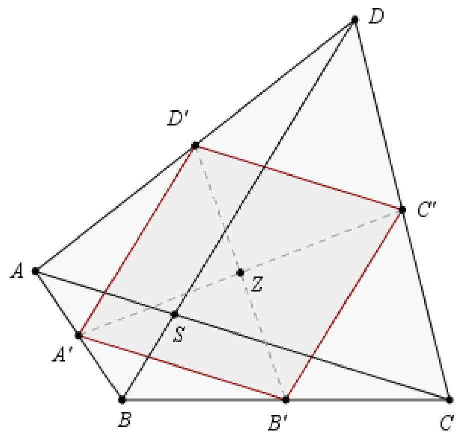
Op het lijnstuk OP liggen de punten A en R (R ligt rechts van A).
Construeer op de cirkel met middelpunt O en straal OR de punten B en C die met P collineair zijn zó, dat hoek BAC recht is.

In [1] gaf Daaf Spijker een (min of meer) elementaire oplossing van bovenstaand probleem, waarbij de constructie werd uitgevoerd met (alleen) passer en latje en met het begrip 'macht van een punt bij een cirkel'.
In hetgeen volgt kies ik een iets andere aanpak.

Ik behandel eerst enkele eigenschappen (E1 t/m E6) die bij eerste beschouwing schijnbaar niet veel met het probleem te maken hebben.

Eigenschap E1. De middens van de zijden van een vierhoek zijn de hoekpunten van een parallellogram.

figuur 1



Bewijs. Zijn A', B', C', D' de middens van de zijden AB, BC, CD, DA, dan is $A'B'$ // AC en ook $C'D'$ // AC. Daaruit blijkt dat $A'B'$ // $C'D'$. Analoog is $B'C'$ // $D'A'$, waarmee het gestelde is aangetoond. ◊

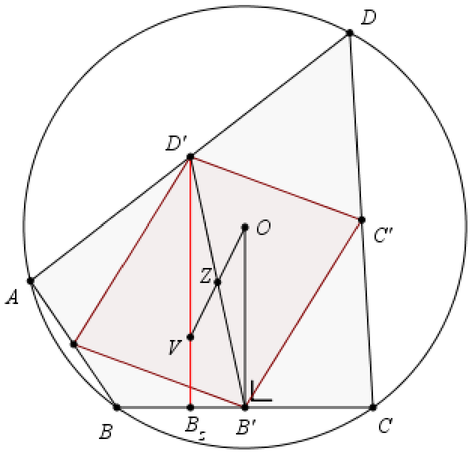
Opmerkingen

1. Het in eigenschap E1 bedoelde parallellogram wordt wel het **Varignon-parallellogram** van de vierhoek genoemd (naar Pierre Varignon, 1654-1722, Frankrijk).
2. Het snijpunt S van de diagonalen heet soms – en in hetgeen volgt ook – **diacentrum** van de vierhoek.
3. Een diagonaal van het Varignon-parallellogram van een vierhoek wordt wel **middellijn** van die vierhoek genoemd.
4. Het snijpunt Z van de middellijnen van een vierhoek kan worden opgevat als het **zwaartepunt** (van de hoekpunten) van de vierhoek. ◊

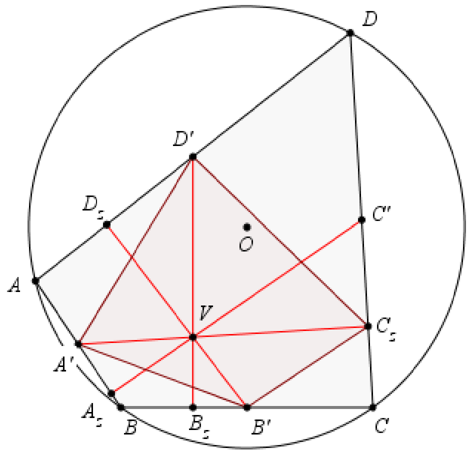
Eigenschap E2. De loodlijnen uit de middens van de zijden van een koordenvierhoek op de 'bijbehorende' overstaande zijde zijn concurrent in een punt V.

Het punt V heet het **nevencentrum** van de koordenvierhoek. [2]

figuur 2a



figuur 2b



Bewijs. Zie figuur 2a. Hierin is B' de projectie van het middelpunt O van de omcirkel op de zijde BC en B_z het voetpunt van de loodlijn uit D' op BC.
Ik beschouw nu de vermenigvuldiging $\mathcal{H}$ met Z (het zwaartepunt van $ABCD$) als centrum en met factor -1. Daarbij is dan:

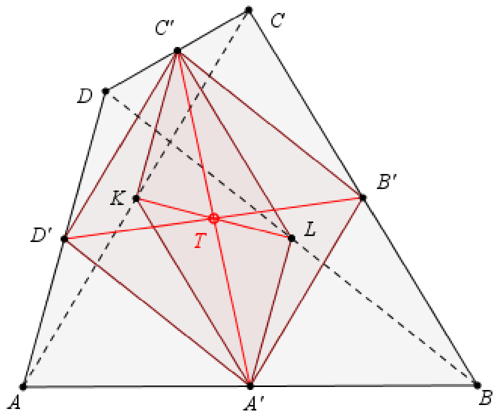
- $\mathcal{H}(O) = V$
- $\mathcal{H}(B') = D'$

Zodat $\mathcal{H}(OB') = VD'$. En dan is, omdat $VD' \mathbin{//} OB'$ is, de lijn $D'V$ een loodlijn op BC, waarmee de lijn $D'B_z$ dus door V gaat.
De positie van Z is onafhankelijk van de loodlijn OB'. En daarmee geldt dit proces voor *elke* projectie van O op een zijde van de vierhoek.
Alle loodlijnen uit een midden van een zijde op de overstaande zijde gaan dus door het punt V; zie figuur 2b. ◊

2. Intermezzo

In figuur 3 staat een *willekeurige* vierhoek $ABCD$ met $A'B'C'D'$ als Varignon-parallellogram.
De punten K en L zijn de middens van de diagonalen AC en BD.
Nu is $A'LC'K$ ook een parallellogram, omdat deze vierhoek kan worden opgevat als het Varignon-parallellogram van de *niet-convexe* vierhoek $ABDC$.
De parallellogrammen $A'B'C'D'$ en $A'LC'K$ hebben diagonaal $A'C'$ gemeenschappelijk.
De lijnen KL, $B'D'$, $A'C'$ zijn dus concurrent in een punt T (dit is in eerste instantie het diacentrum van vierhoek $A'B'C'D'$).

figuur 3

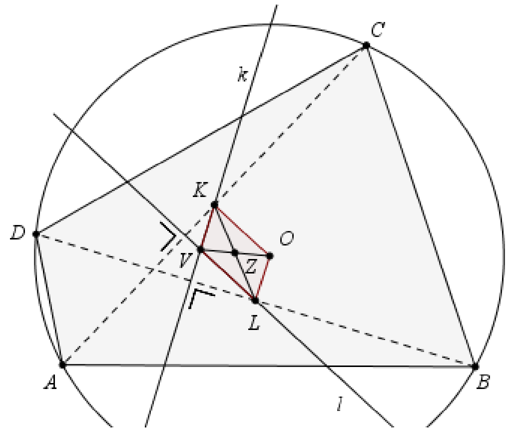


Nu is bewezen:

Eigenschap E3. Het diacentrum van het Varignon-parallellogram van een *willekeurige* vierhoek is het midden van het verbindingslijnstuk van de middens van de diagonalen van die vierhoek.

Eigenschap E4. In een *koordenvierhoek* gaan de loodlijnen uit het midden van een diagonaal op de andere diagonaal door het nevenpunt van die koordenvierhoek.

figuur 4



Bewijs. In figuur 4 zijn K en L de middens van de diagonalen AC en BD van koordenvierhoek $ABCD$. het punt O het omcentrum en het punt Z is het midden van KL (het diacentrum van het Varignon-parallellogram van $ABCD$; zie eigenschap E3).
De lijnen k en l gaan door opvolgend de punten K en L en staan loodrecht op BD en AC. Hun snijpunt is het punt V.
Nu is $OKVL$ een parallellogram, omdat:
- $OL \perp BD$ (BD opgevat als koorde van de omcirkel) en $k \perp BD$, zodat $OL \,//\, KV$;
- $OK \perp AC$ (AC opgevat als koorde van de omcirkel) en $l \perp AC$, zodat $OK \,//\, LV$.

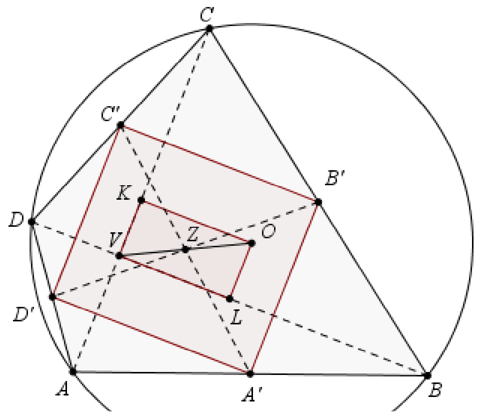
Het punt Z is dus ook het midden van OV, waarmee V inderdaad het nevencentrum is van $ABCD$ (zie het bewijs van eigenschap E2). ◊

3. Nu alleen maar orthodiagonaal

Definitie. Een **orthodiagonale vierhoek** is een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. ◊

Eigenschap E5. In een *orthodiagonale koordenvierhoek* vallen het diacentrum en het nevencentrum samen.

figuur 5

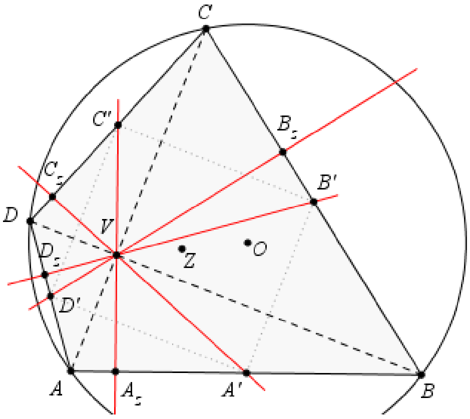


Bewijs. Het middelpunt van de omcirkel van de koordenvierhoek $ABCD$ is O.
Het diacentrum van de vierhoek is het punt V. De diagonalen AC en BD staan per definitie loodrecht op elkaar in het punt V.
- AC is de loodlijn door K (het midden van AC) op BD;
- BD is de loodlijn door L (het midden van BD) op AC.

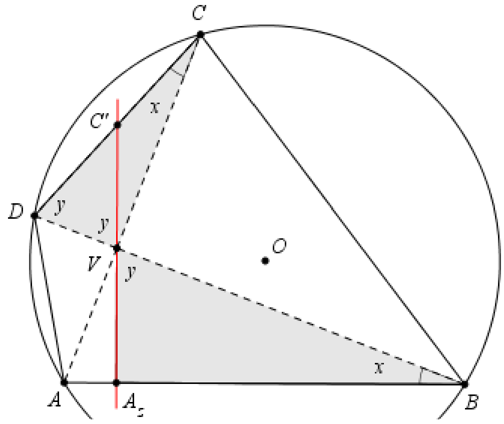
Volgens eigenschap E4 is dan het snijpunt van die loodlijnen – hier is dat het punt V – het nevencentrum van de koordenvierhoek. ◊

Eigenschap E6. In een *orthodiagonale koordenvierhoek* staan de lijnen die gaan door de middens van de zijden en door het diacentrum van de vierhoek, loodrecht op de ‘bijbehorende’ overstaande zijde. [3]

figuur 6



figuur 7



Bewijs. Eigenschap E6 (zie figuur 6) is direct af te leiden uit de hieraan voorafgaande eigenschappen. Er is evenwel een *direct* bewijs dat mede gebaseerd is op een bekende eigenschap van een rechthoekige driehoek, namelijk de *stelling van Thales*.

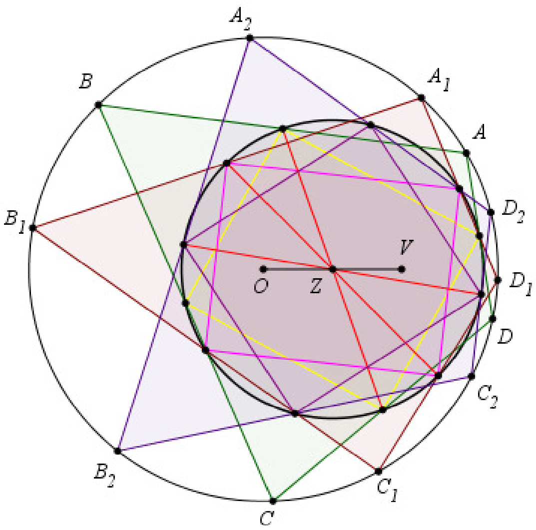
In figuur 7 is *ABCD* een orthodiagonale koordenvierhoek, met *V* als neven- (en dia)centrum.
We willen (bijvoorbeeld) bewijzen dat de lijn *C'V* in A_z loodrecht staat op de zijde *AB* van de vierhoek.

In de in *V* rechthoekige driehoek *VCD* is *C'* het middelpunt van de omcirkel van die driehoek (*stelling van Thales*).
Stellen we in die driehoek $\angle C = x$ en $\angle D = y$, dan is $x + y = 90^\circ$.
En omdat $C'D = C'V$ is $\angle DVC' = y$.
In driehoek *PBV* is daarmee $\angle V = y$ (*overstaande hoeken*).
Ook is $\angle B = ½\ \mathrm{bg}(AD) = \angle ACD = x$ (*stelling van de omtrekshoek*).
Zodat ook in driehoek A_zBV geldt dat $\angle B + \angle V = x + y = 90^\circ$.
Met andere woorden: in driehoek A_zBV is de hoek bij A_z recht. Een analoge redenering kan wordt opgesteld voor de andere bedoelde verbindingslijnen.
Waarmee eigenschap E6 bewezen is. ◊

4. Een ellips?

Ik onderzoek nu verder een niet zo bekende eigenschap van een orthodiagonale koordenvierhoek *ABCD* en het bijbehorende Varignon-parallellogram *A'B'C'D'*, dat in dit geval dus een *rechthoek* is. Het diacentrum *V* van *ABCD* is in dit geval dus eveneens het nevencentrum van *ABCD* (zie eigenschap E5).

figuur 8a

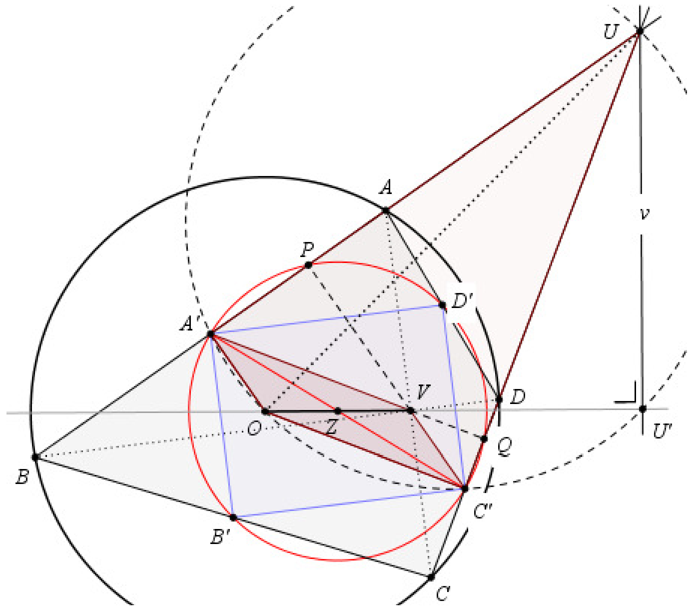


In figuur a8 is met de vierhoeken *ABCD*, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ geïllustreerd wat ik zal gaan bewijzen, namelijk:

Eigenschap E7. Bij *iedere* orthodiagonale koordenvierhoek met een *vaste* cirkel als omcirkel en een *vast* punt V als nevencentrum heeft ook de 'Varignon-rechthoek' van zo'n vierhoek een *vaste* omcirkel (met middelpunt Z, het zwaartepunt van $ABCD$).

Bewijs. Zie figuur 8b. Ik ga uit van een willekeurige, *vaste* cirkel $\mathcal{K}$, met middelpunt O, met daarin beschreven een orthodiagonale koordenvierhoek $ABCD$ waarvan V het nevencentrum is.

figuur 8b



De Varignon-rechthoek van $ABCD$ is $A'B'C'D'$. Uit eigenschap E6 volgt dat:

$A'V \perp CD$ (in Q) en $C'V \perp AB$ (in P)

Maar ook is:

$OC' \perp CD$ (in C') en $OA' \perp AB$ (in A')

En daaruit volgt dan dat $A'OC'V$ een parallellogram is. Het diacentrum daarvan is het midden van het lijnstuk OV en valt dus samen met het zwaartepunt Z van $ABCD$ (zie eigenschap E2).
Omdat $A'OC'V$ en $A'B'C'D'$ het lijnstuk $A'C'$ als gemeenschappelijke diagonaal hebben, is Z ook het middelpunt van de omcirkel van rechthoek $A'B'C'D'$.

Ik merk hierbij op dat *alle* in $\mathcal{K}$ beschreven orthodiagonale vierhoeken hoeken (met V als *vast* nevencentrum) een Varignon-rechthoek hebben met Z als *vast* middelpunt.

Ik zal nu aantonen dat de straal a (= ZA' = ZC') van die omcirkel een constante lengte heeft.

Uit de pooltheorie (zie de paragraaf 6 – Appendix) is bekend dat [4] $U = AB$ & CD een punt is van de poollijn v bij $\mathcal{K}$ van het punt V, en dat v loodrecht staat op OA (in het punt U').
Vierhoek $A'OC'U$ is een koordenvierhoek, omdat daarin de hoeken bij A' en C' recht zijn. Die vierhoek heeft dus een omcirkel waarop ook het punt U' gelegen is – immers, ook $\angle OU'U = 90^\circ$ (*Thales-cirkel* op de middellijn OU).
In die cirkel geldt voor de door Z gaande koorden $A'C'$ en OU':

$ZA' \cdot ZC' = ZO \cdot ZU'$

En dan is met $ZA' = ZC' = a$:

$a^2 = ZO \cdot ZU'$

De punten O, Z en U' zijn *vaste* punten in de configuratie: ze hangen *niet* af van de ligging van A, B, C, D op de cirkel $\mathcal{K}$. Met andere woorden: a is constant.
En daarmee is eigenschap E7 bewezen. ◊

Opmerking 5. In principe zijn in de configuratie van eigenschap E7 (alleen) gegeven:
- de punten O en V, en daarmee het lijnstuk OV, waarvan ik de lengte gelijk stel aan $2c$;
- de lengte R van de straal van de omcirkel van de orthodiagonale koordenvierhoek.

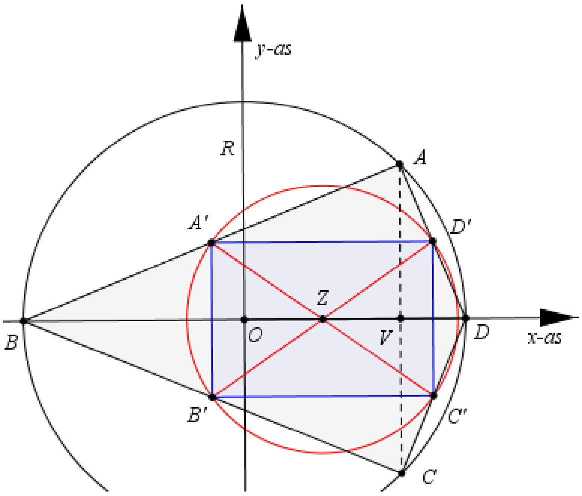
Nu is: $a^2 = ZO \cdot ZU' = ZO \cdot (OU' - ZO)$
En uit de pooltheorie volgt: $R^2 = OV \cdot OU'$

Zodat met $OV = 2c$ blijkt: $OU' = \dfrac{R^2}{2c}$

En dit geeft: $a^2 = c \cdot (\dfrac{R^2}{2c} - c) = \frac{1}{2}R^2 - c^2$

Opmerking 6. Deze waarde van a^2 is ook *analytisch* te vinden, uitgaande van een orthodiagonale koordenvierhoek in een bijzondere ligging; zie figuur 8c.

figuur 8c



De vergelijking van de cirkel in een xOy-stelsel is: $x^2 + y^2 = R^2$

En verder:

$D = (R, 0)$, $B = (-R, 0)$, $Z = (c, 0)$, $V = (2c, 0)$

En dan is:

$y_A = \sqrt{(R^2 - 4c^2)}$

Zodat: $x_{A'} = c - \frac{1}{2}R$ en

$y_{A'} = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 - 4c^2)}$

Daarmee is:

$a^2 = (ZA')^2 = (\frac{1}{2}R)^2 + \frac{1}{4}(R^2 - 4c^2)$

Dus: $a^2 = \frac{1}{2}R^2 - c^2$

En uit de waarde van a^2 blijkt opnieuw dat a een constante is die onafhankelijk is van de ligging van de orthodiagonale koordenvierhoek in de cirkel. ◊

Eigenschap E7 gebruik ik bij het bewijs van:

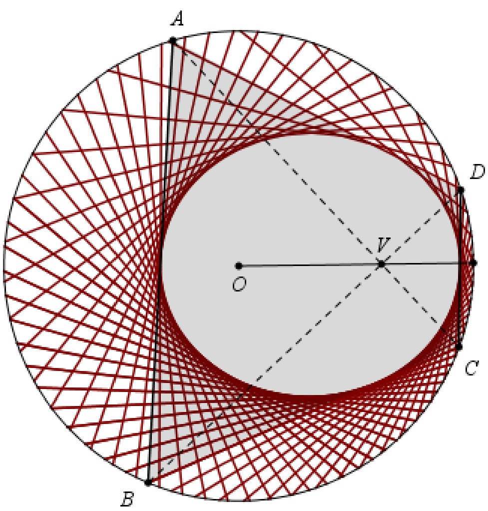
Eigenschap E8. De zijden van een orthodiagonale koordenvierhoek raken aan een (vaste) ellips waarvan de punten O (omcentrum) en V (nevencentrum) de brandpunten zijn.

In figuur 9a is eigenschap E8 geïllustreerd. Hierbij doorloopt het punt A (en daarmee ook de punten B, C en D) de vaste cirkel met middelpunt O. Het punt V is het *vaste* nevenpunt van koordenvierhoek $ABCD$.

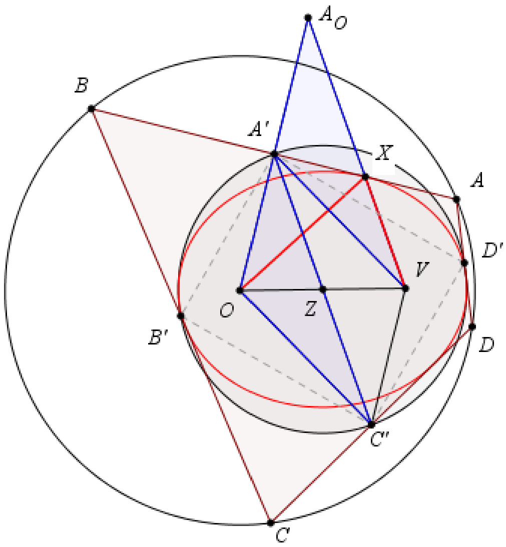
***Bewijs van eigenschap* E8**. Zie figuur 9b.
Om te bewijzen dat (bijvoorbeeld) AB raakt aan de bedoelde ellips zal ik de *hoofdeigenschap* voor deze raaklijn trachten aan te tonen.

Het punt A_O is het spiegelbeeld van O in AB en A_OV & $AB = X$. Het punt X zou nu het raakpunt van AB aan de (gezochte) ellips moeten zijn. En dit zou dan het geval zijn als $OX + VX$ = constante.

figuur 9a



figuur 9b



Tja, hoe groot is die constante? Hoe groot is $OX + VX = A_OV$?

In het bewijs van eigenschap E7 is aangetoond dat vierhoek $A'OC'V$ een parallellogram is. Nu is:

1. $OC' = A'V$ (*evenwijdige zijden van een parallellogram*) ;
2. $OA' = A'A_O$ (vanwege de lijnspiegeling in AB) ;
3. $\angle A'OC' = \angle A_OA'V$ (*overeenkomstige hoeken*) .

Daarmee zijn de driehoeken $A'OC'$ en $A_OA'V$ congruent (ZHZ), zodat ook:

$$A'C' = A_OV$$

We hebben in het bewijs van eigenschap E7 ook gezien dat de lengte van $A'C'$ constant is:
$A'C' = A'Z + ZC' = a + a = 2a$ (de lengte van een diagonaal van de Varignon-rechthoek $A'B'C'D'$).
En daarmee is:

$$OX + VX = A_OX + XV = A_OV = 2a$$

Met andere woorden: de lijn AB raakt in het punt X aan de bedoelde ellips.
Analoog kan worden bewezen dat ook de lijnen BC, CD en DA raaklijnen zijn aan de door de punten O, V en het getal $2a$ bepaalde ellips.
En dit completeert het bewijs van eigenschap E8. ◊

Opmerking 7. De cirkel die in eigenschap E7 gevonden is, is de zogenoemde *hoofdcirkel* van de ellips uit eigenschap E8.
De hoofdcirkel is *per definitie* de cirkel die de hoofdas van de ellips als middellijn heeft.
Op basis van het bovenstaande kunnen de parameters van die ellips – de lengte van de hoofdas (a) en de lengte van de nevenas (b) – worden berekend. In het onderhavige geval is:

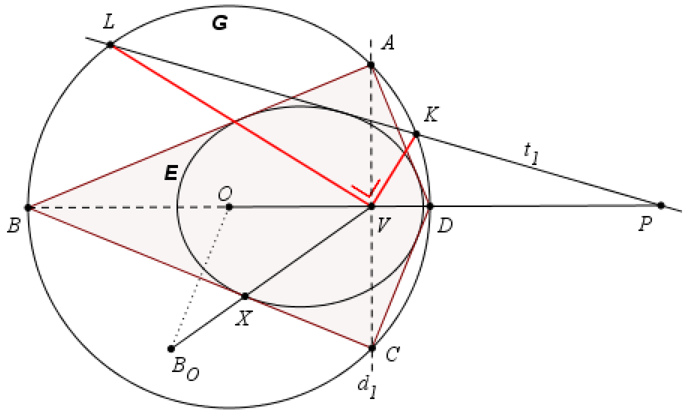
$a^2 = \frac{1}{2}R^2 - c^2$ en $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{1}{2}R^2 - 2c^2$ ◊

5. Constructie

In (bijna) elk dynamische-meetkundeprogramma (dmp) is het mogelijk een ellips te construeren [5]. Een ellips is weliswaar punt voor punt ook met passer en latje te construeren, maar in principe *niet* als een (semi-)continue kromme. Dat kan wél met bedoelde programma's: een ellips is *dmp-contrueerbaar*.

Met dit als 'gegeven' los ik het aan het begin van dit artikel vermelde probleem op.
Ik ga daarbij uit van het lijnstuk OP met daarop de punten V (dat was oorspronkelijk A) en D (dat was oorspronkelijk R).

figuur 10



Constructiestappen:

G = Cirkel(O, D)
d_1 = Loodlijn(V, OP)
{A, C} = Snijpunten(G, d_1)
B = Puntspiegeling(D, O)
BC = Lijnstuk(B, C) ↥
B_O = Lijnspiegeling(O, BC)
$X = BC$ & B_OV
E = Ellips(O, V, X) [5]
t_1 = Raaklijn(P, E) [6]
{K, L} = Snijpunten(t_1, E)

En dan zijn de punten K en L de op de cirkel G zó te construeren punten, dat $\angle KVL = 90^\circ$.

Opmerking 8. Door gebruik te maken van de hoofdcirkel van de ellips en van een loodrechte lijnvermenigvuldiging [7] (en dus *niet* van de ellips zelf en ook *niet* van de formules voor a en b die staan in opmerking 7) is evenwel, uitgaande van dezelfde meetkundige gegevens, een niet al te ingewikkelde constructie met passer en latje van de punten K en L mogelijk. ◊

6. Appendix – wat pooltheorie

Vier collineaire punten A, B, C, D bepalen een zogeheten *dubbelverhouding* (van lengtes van lijnstukken):

$$(ABCD) = (ABC):(ABD) = \frac{CA}{DA}:\frac{DA}{DB}$$

Voor het berekenen van de waarde van de dubbelverhouding moet rekening gehouden met een (te kiezen) oriëntatie op de betrokken lijn..

Voor een punt P *op* een lijnstuk AB is $(ABP) = \dfrac{-PA}{PB}$; voor een punt P op een verlengde van het lijnstuk AB is $(ABP) = \dfrac{PA}{PB}$.

Opmerking 9. De notatie (ABP) wordt *deelverhouding* genoemd. ◊

Als $(ABCD) = -1$, dan *scheiden* de puntenparen (A, B) en (C, D) elkaar *harmonisch*.

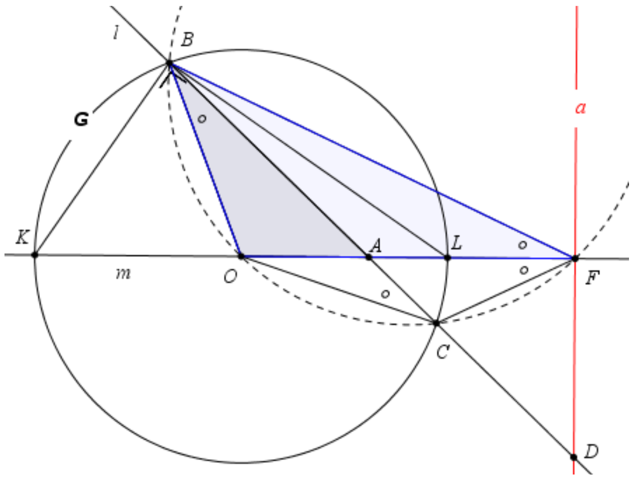
Bewezen kan worden [8]:

Stelling a1. Bij drie collineaire punten A, B, C bestaat precies één punt D zodat $(ABCD) = -1$.
D heet dan de *vierde harmonische* bij A, B, C.

Ik beschouw nu een cirkel G = (O, r) en een punt A (binnen G). Een willekeurige lijn l door A snijdt G in de punten B en C, en ik bewijs vervolgens:

Stelling a2. Is D de vierde harmonische van de collineaire punten A, B, C op l, waarbij B en C ook op een cirkel liggen, dan doorloopt D een rechte lijn a bij rotatie van l om A.
Het punt A heet de *pool* van a bij G, en a heet de *poollijn* van A bij G. [9]

figuur a1



Bewijs. Zie figuur a1.
Het punt D is zó op de lijn l geconstrueerd dat $(BCAD) = -1$. [10]
Ik teken ook de omcirkel van driehoek BCO. Die cirkel snijdt de middellijn $m \equiv OA$ in F.
Nu is, kijkend naar omtrekshoeken op de laatste cirkel en naar de gelijkbenige driehoek OCB:

$$\angle BFO = \tfrac{1}{2}\text{bg}(OB) = \angle ACO = \angle ABO = \tfrac{1}{2}\text{bg}(OC) = \angle AFC$$

FA is daarmee binnenbissectrice van hoek F in driehoek BFC. En omdat $(BCAD) = -1$ is, ligt D op de buitenbissectrice van die hoek. [11]
Hiermee is tevens aangetoond dat de lijn $a \equiv DF$ in F loodrecht staat op m.

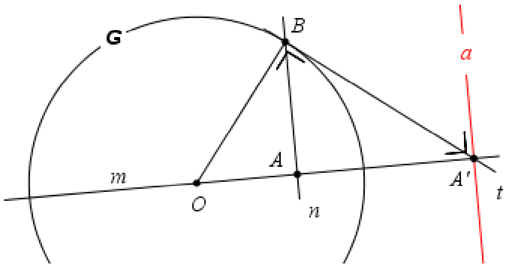
De punten K en L zijn de snijpunten van m met G. Verder:
- $\angle \underline{BFL} + \angle LBF = \angle BLO$ (*binnenhoeken en buitenhoek van driehoek FLB*);
- $\angle LBA + \angle \underline{ABO} = \angle LBO = \angle BLO$ (immers, $OB = OL$) .

Dus is: $\angle LBF = \angle LBA$. De lijn BL is daarmee binnenbissectrice van hoek B in driehoek ABF.
Maar $\angle LBK = 90^{\circ}$. Dus is BK buitenbissectrice van hoek B bij driehoek ABF.
En hiermee is dan $(LKAF) = -1$.

De ligging van het punt F op OA is daarmee *onafhankelijk* van het punt B (en van het punt C); immers, F is de vierde harmonische bij de *vaste* punten A, K en L. En de punten D die liggen op de veranderlijke lijn l, liggen dus steeds loodrecht ‘boven’ (c.q. ‘onder’) het punt F.
De punten D doorlopen dus de lijn a, als l draait om A. ◊

Constructie van de poollijn. Een eenvoudige constructie van de poollijn a van een punt A bij een cirkel G is de volgende.

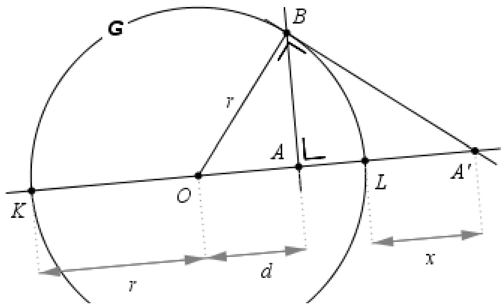
figuur a2



Constructiestappen
- m = Lijn(O, A)
- n = Loodlijn(A, m)
- $B = n$ & G
- OB = Lijnstuk(O, B)
- t = Loodlijn(B, OB)
- $A' = m$ & t
- a = Loodlijn(A', m)

Natuurlijk moet er nog aangetoond worden dat deze constructie juist is. Dat wil zeggen: de dubbelverhouding van het paar (A, A') en het paar snijpunten van m met G moet gelijk zijn aan -1.

figuur a3



In nevenstaande figuur is:
- $OK = OB = OL = r$
- $OA = d$
- $LA' = x$

Volgens een eigenschap in de in B rechthoekige driehoek OBA' is:
- $OB^2 = OA \cdot OA'$ of $r^2 = d(r + x)$

$$\text{Nu is: } (KLAA') = -\frac{AK}{AL} : \frac{A'K}{A'L} = -\frac{AK \cdot A'L}{AL \cdot A'K} = -\frac{(r+d)\cdot x}{(r-d)(2r+x)}$$
$$= -\frac{x(d+r)}{2r^2 + rx - 2dr - dx} = -\frac{x(d+r)}{2d(r+x) + rx - 2dr - dx} =$$
$$= -\frac{x(d+r)}{dx + rx} = -1$$

Waaruit blijk dat de constructie inderdaad juist is.

Opmerking 10. Uit de pooltheorie [9] volgt dat de loodlijn door A op m (in figuur a2 is dat de lijn AB) de poollijn is van A' bij G. ◊

7. Noten

[1] Daaf Spijker (2017): *Een niet (zo) eenvoudig constructieprobleem*. Dit artikel, opgenomen in *WisLer_Constructie.PDF*, is elektronisch beschikbaar op: *https://drive.google.com/open?id=0B6RDfTIJt3kIdjlrZlk3RExmbU0*

[2] Het nevencentrum heet ook wel *Mathot-punt*; naar Jules Mathot (Mathesis, 1901, pp. 25-26). In angelsaksische literatuur gebruikt men meestal de term *anti-center* en in Franse literatuur *anticentre*.

[3] Dit is een stelling (ca. 628) die wordt toegeschreven aan Brahmagupta (ca. 598–ca. 665, India). Zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta*

[4] Met $Z = X$ & Y wordt bedoeld: Z is het (een) gemeenschappelijk punt van de meetkundige objecten X en Y.

[5] *Cabri Geometry* kent *alleen* een functie waarmee via vijf punten een kegelsnede kan worden getekend. Met een zogeheten macro (een gebruiker-gedefinieerde functie) is het echter mogelijk direct een ellips te tekenen als de beide brandpunten én een punt ervan gegeven.
GeoGebra heeft voor dit laatste een ‘ingebouwde’ functie.

[6] In *Cabri Geometry* is voor het direct construeren van een raaklijn uit een punt aan een kegelsnede weer een macro nodig. *GeoGebra* heeft daarvoor weer een ‘ingebouwde’ functie.

[7] Zie hiervoor:
Dick Klingens (2000): *Ellips-constructies met Cabri* [2]. Op de website van de auteur:
http://www.pandd.demon.nl/ellips/ellips2.htm

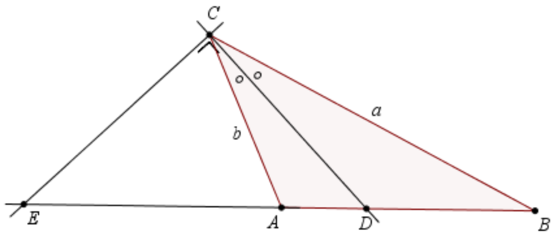
[8] Zie:
Dick Klingens (2002): *Volledige vierzijde en dubbelverhouding*. Op de website van de auteur:
http://www.pandd.demon.nl/vierzijde.htm

[9] Zie ook:
Dick Klingens (2005): *Pool en poollijn ten opzichte van een cirkel*. Op de website van de auteur:
http://www.pandd.demon.nl/pool.htm

[10] Zie:
Dick Klingens (2002): *Stralenbundels*. Op de website van de auteur (paragraaf 2):
http://www.pandd.demon.nl/stralenb.htm#2

[11] Is in driehoek ABC de lijn CD de binnenbissectrice en CE de buitenbissectrice van hoek C (met C, D op de lijn AB), dan is volgens de bissectricestelling(en):

$$DA : DB = b : a \quad \text{en} \quad EA : EB = b : a$$



Dus: $\dfrac{DA}{DB} : \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{b}{a} : \dfrac{b}{a} = 1$, zodat, rekening houdend met de oriëntatie van de lijnstukken:
$(ABDE) = -1$

Het puntenpaar (D, E) op de lijn AB scheidt dus het puntenpaar (A, B) harmonisch.

Omgekeerd, is $(ABDE) = -1$ en is DC een bissectrice van hoek C in driehoek ABC, dan ligt het punt E op de ‘andere’ bissectrice van hoek C.

==========