Een sangaku (en niet alleen) als het regent

DICK KLINGENS (*dklingens@gmail.com*)
Krimpen aan den IJssel, augustus 2017

1. Het waarom

Een tijdje geleden plaatste ik op de Facebook-pagina van de besloten groep “Leraar Wiskunde” [1, 2] het in figuur 1 vermelde probleem, onder het kopje “Als het in de vakantie regent?”. Vandaar ook de titel van dit artikel.

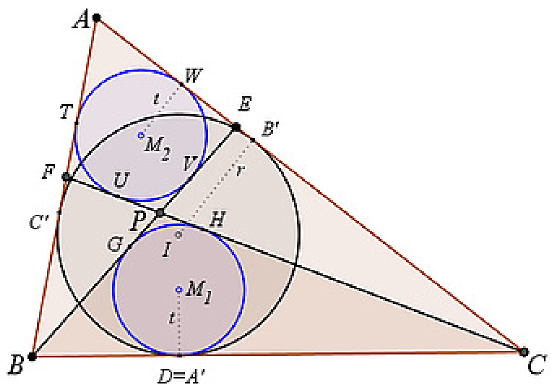
figuur 1

[3, 4]

De vragen in figuur 1 verdienen vanzelfsprekend een antwoord. Die antwoorden volgen hierna.

In figuur 2 staat dezelfde driehoek als in figuur 1, maar nu zijn de significante punten, en een enkel lijnstuk, voorzien van een naam.

figuur 2



De lijn BE raakt aan de kleine cirkels in G en V, de lijn CF raakt aan die cirkels in H en U.
Deze raaklijnen snijden elkaar in het punt P.
De cirkel met middelpunt M_1 raakt aan BC in D, die met middelpunt M_2 raakt aan AB in T en aan AC in W.
De incirkel van driehoek ABC (middelpunt I, straal r) raakt de zijden van de driehoek opvolgend in A', B', C'.
De lengte van de straal van elk der kleine cirkels is gelijk aan t.

Bij de oplossing van het probleem gebruik ik enkele stellingen die vroeger tot de standaard planimetriebagage van de onderbouwleerling behoorden.

Stelling 1 (ook wel **formule van Heron**; naar Heron van Alexandrië, ±10 – ±75, Egypte). Voor de oppervlakte O van driehoek ABC geldt:

$$O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

waarbij s gelijk is aan de *halve* omtrek van die driehoek. ◊

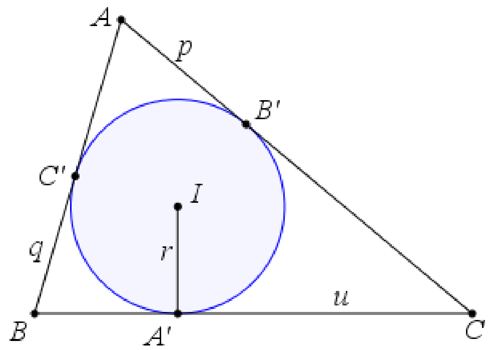
Stelling 2. De lengte van een raaklijnstuk uit een hoekpunt van een driehoek aan de incirkel van die driehoek is gelijk aan de *halve* omtrek van die driehoek verminderd met de lengte van de overstaande zijde van dat hoekpunt.
In formule: $AB' = s - a$, $BC' = s - b$, $CA' = s - c$. ◊

Stelling 3. In een willekeurige driehoek ABC waarvan de (lengte van de) straal van de incirkel gelijk is aan r, geldt:

(1)... $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \Diamond$$

In hetgeen volgt wordt stelling 3 iets anders toegepast; zie figuur 3.

figuur 3



Met $AB' = p$, $BC' = q$ en $CA' = u$, geldt ook (en de lezer ga dit na!):

$$\sqrt{(p+q+u)pqu} = (p+q+u)\cdot r$$

Na kwadratering en een kleine vereenvoudiging is dan:

$$pqu = (p + q + u) \cdot r^2$$

zodat:

(2)... $$p = \frac{(q+u)r^2}{qu-r^2} = \frac{ar^2}{qu-r^2} = \frac{ar^2}{(s-b)(s-c)-r^2}$$

De bewijzen van de genoemde drie stellingen zijn te vinden in het eerste deel van de appendix (paragraaf 8).
Die stellingen zijn mijns inziens voldoende gereedschap om het onderzoek van de sangaku te starten. Ik bewijs eerst:

Eigenschap S1. In de configuratie van figuur 2 geldt: de punten D en A' vallen samen.
Met andere woorden: de cirkel met middelpunt M_1 raakt aan BC in *hetzelfde* punt als de incirkel van de driehoek. ◊

Bewijs. Ik zal laten zien dat $CD = CA'$. Dit zijn resp. de lengte van het raaklijnstuk uit C aan cirkel M_1 en die van het raaklijnstuk uit C aan cirkel I.
In driehoek BCP is:

$$\begin{aligned}2CD &= CD + CH = (CP - HP) + (CB - DB) = (CP - PG) + (CB - BG) = \\ &= CP + CB - (PG + BG) = CP + CB - BP\end{aligned}$$

Zodat [5], met $CB = a$:

$$\begin{aligned}CD &= \tfrac{1}{2}(CP + CB - BP) = \tfrac{1}{2}((CU - UP) - (BV - VP) + a) \\ &= \tfrac{1}{2}(CU - BV + a) \quad \backslash\backslash \text{ raking aan cirkel } M_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(CW - BT + a) \quad \backslash\backslash \text{ idem} \\ &= \tfrac{1}{2}((CA - AW) - (BA - AT) + a) \\ &= \tfrac{1}{2}(CA - BA + a) \quad \backslash\backslash \text{ raking aan cirkel } M_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(a + b - c) = s - c = CA'\end{aligned}$$

Waarmee het gestelde is aangetoond. ◊

Eigenschap S2. In de configuratie van figuur 2 geldt: $HU = B'W$. ◊

Bewijs. Ook nu gebruik ik de eigenschappen van de raaklijnstukken uit C aan de drie cirkels, met name ook eigenschap S1. En dan blijkt dat:

$$HU = CU - CH = CW - CD = CW - CB' = B'W \quad \Diamond$$

2. En verder

Omdat de punten M_2 en I beide op de bissectrice van hoek A liggen – de 'bijbehorende' cirkels raken immers aan de benen van hoek A – kan cirkel M_2 opgevat worden als het beeld van cirkel I bij een vermenigvuldiging met het punt A als centrum.
Voor t (= $M_1D = M_2W$, de straal van de cirkels M_1 en M_2) en r (= IB', de straal van cirkel I) geldt dan:

$$AW : AB' = t : r$$

Nb. Omdat $AW < AB'$ is, is ook $t < r$. Uit de vraagstelling bij het probleem is dit natuurlijk al bekend, maar het is toch iets om even bij stil te staan. Later – bij relatie (6d) – wordt er gebruik van gemaakt!

Met een (niet zo vaak gebruikte) eigenschap van evenredigheden is dan ook:

$(AB' - AW) : AB' = (r - t) : r$

En deze uitdrukking is equivalent met:

(3)… $BW' : AB' = (r - t) : r$

En dan volgt uit (3), samen met eigenschap S2 en formule (2), toepast in driehoek ABC met $p = AB'$, dat:

(4)… $$HU = \frac{r-t}{r} \cdot AB' = \frac{r-t}{r} \cdot \frac{ar^2}{(s-b)(s-c)-r^2} = \frac{ar(r-t)}{(s-b)(s-c)-r^2}$$

Ook is bekend dat het snijpunt van twee gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels gelegen is op de centraal van die cirkels.
Daarmee ligt P dus op M_1M_2 en, vanwege de gelijke stralen van beide cirkels, is P het midden van het lijnstuk HU. Zodat met relatie (2), nu toegepast in driehoek PBC met $p = PH$, geldt:

(5)… $$HU = 2PH = \frac{2at^2}{(s-b)(s-c)-t^2}$$

Uit (4) en (5) volgt nu direct:

Eigenschap S3. Er is een, via formule (1) *impliciet*, verband tussen de straal t van de beide kleine cirkels en de zijden van driehoek ABC, namelijk:

(6a)… $$\frac{r(r-t)}{(s-b)(s-c)-r^2} = \frac{2t^2}{(s-b)(s-c)-t^2} \quad \lozenge$$

Formule (6a) kan nog op een iets andere manier geschreven worden. Ter vereenvoudiging van de hierna volgende stappen is $A = (s-b)(s-c)$. En daarmee blijkt uit (6a):

$$\frac{r^2 - rt}{A - r^2} = \frac{2t^2}{A - t^2} \;\Rightarrow\; 2t^2(A - r^2) = (r^2 - rt)(A - t^2) \;\Rightarrow$$
$$2At^2 - 2r^2t^2 = Ar^2 - r^2t^2 - Art + rt^3 \;\Rightarrow\; rt^2(r+t) = A(2t^2 + rt - r^2)$$

Herschikking van de factoren geeft dan:

(6b)… $$\frac{r}{A} = \frac{(2t-r)(t+r)}{t^2(r+t)} \;\Rightarrow\; \frac{r}{A} = \frac{2t-r}{t^2}$$

Zodat:

(6c)… $$\frac{2}{t} - \frac{r}{t^2} = \frac{r}{(s-b)(s-c)}$$

Gevolg. Uit (6b) blijkt: $\frac{r}{A}t^2 - 2t + r = 0$

Of ook:

(6d)… $$\left(\sqrt{\tfrac{r}{A}}\,t - \sqrt{\tfrac{A}{r}}\right)^2 = \tfrac{A}{r} - r$$

Hieruit blijkt:

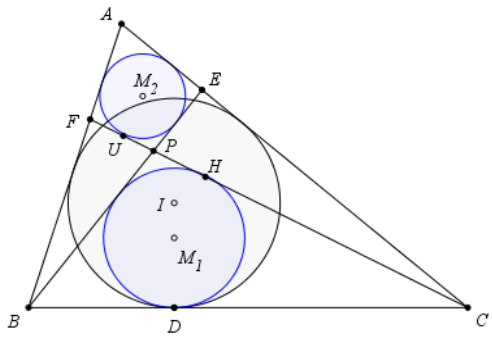
Eigenschap S4. In een gegeven driehoek ABC zijn de beide gelijke cirkels die raken aan de lijnen BE en CF, als is weergegeven in de figuren 1 en 2, *met passer en latje* te construeren. ◊

Met het bewijs van eigenschap S4 – d.w.z. van formule (6d) – is ook de tweede vraag die in figuur 1 staat, beantwoord: het antwoord is “ja”. Maar een daadwerkelijke constructie met passer en latje op basis van formule (6d) heeft toch wel ‘wat voeten in de aarde’.
Een eenvoudige, daarvan afwijkende constructie, staat evenwel aan het einde van paragraaf 6.

Nb. Uit relatie (6d) volgen *twee* waarden van t. Op grond van eerdere overwegingen moet de *kleinste* waarde van t gebruikt worden.

4. Voor de lezer

figuur 4



Zie figuur 4. Als de beide kleine cirkels *niet* dezelfde straal hebben, zeg t_1 en t_2, en toch ook raken aan lijnen *BE* en *CF*, dan luidt de met (6c) overeenkomstige relatie:

(7)… $$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{r}{t_1t_2}=\frac{r}{(s-b)(s-c)}$$

Het bewijs van formule (7) laat ik aan de lezer.
Hint. In dit geval is natuurlijk $PH \neq PU$, maar heel eenvoudig kan nu worden bewezen dat:

$$PH : PU = t_1 : t_2$$

waarmee een uitdrukking voor *HU*, overeenkomend met die vermeld is in (4), kan worden gevonden. ◊

5. Anders ernaar kijken

Bij het probleem van paragraaf 1, dus bij een driehoek met twee *gelijke* kleine cirkels, geldt voor het punt *A* (triviaal):

$$AB - AC = c - b$$

en voor het punt *D* (volgens stelling 2):

$$DB - DC = (s - b) - (s - c) = c - b$$

De punten *A* en *D* hebben dus elk gelijke afstanden tot de punten *B* en *C*, zodat *A* en *D per definitie* liggen op een *hyperbool* $\mathcal{K}$, die *B* en *C* als brandpunten heeft. Het punt *D* is een top van $\mathcal{K}$ (het punt *D* ligt immers op het verbindingslijnstuk van de brandpunten van $\mathcal{K}$).

Als *P* op $\mathcal{K}$ ligt, ***dan*** is ook $PB - PC = c - b$ (ook volgens stelling 2 in driehoek *PBC*). Met de raakpunten *A'*, *G*, *H* van de incirkel van driehoek *PBC* aan opvolgend de zijden *BC*, *PB*, *PC* (zie weer figuur 2) is dan:

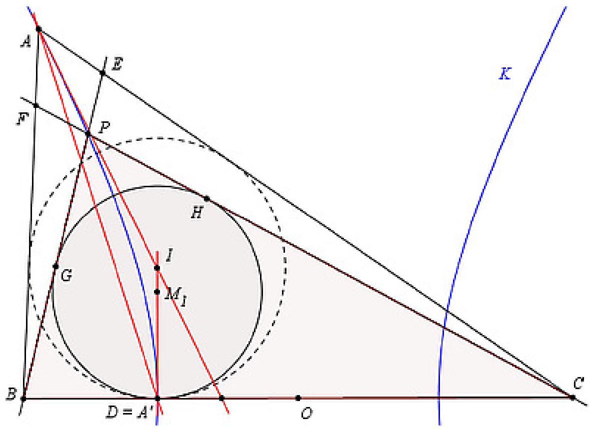
(*) $$PB - PC = (PG + GB) - (PH + HC) = GB - HC = A'B - A'C$$

Het punt *A'* ligt daarmee ook op $\mathcal{K}$, zodat, zoals eerder (zie eigenschap S1) reeds is gevonden, $A' \equiv D$. Het middelpunt M_1 van de incirkel van driehoek *PBC* ligt dan dus op de 'op-*BC*-projecterende' lijn van het punt *I*.
En omgekeerd – lees daarbij de uitdrukking (*) hierboven van rechts naar links:
Als er wordt uitgegaan van dit laatste, ***dan*** is het onmiddellijk duidelijk dat *P* op $\mathcal{K}$ ligt.

De andere kijk op het probleem verloopt daarmee via de hyperbool $\mathcal{K}$ waarvan *B* en *C* de brandpunten zijn en die door de punten *A* en *D* gaat; zie figuur 5. [6]

Mijn doel is nu na te gaan of het punt *P* 'met behulp van de hyperbool' te construeren is met passer en latje.

figuur 5



In nevenstaande figuur is $\mathcal{K}$ de te beschouwen hyperbool.
Het punt *P* is een *willekeurig punt* op de hyperbool $\mathcal{K}$.
Het punt M_1, het middelpunt van de incirkel van driehoek *BCP*, is het snijpunt van de bissectrice van hoek *CPB* (niet getekend) met de lijn *ID*.
O is het midden van het lijnstuk *BC* en dus ook het middelpunt van $\mathcal{K}$.

Bij de hierna volgende beschouwingen zal ik gebruik maken van de volgende eigenschappen van een hyperbool (en van enkele gevolgen daarvan).

Stelling 4. De raaklijn in een punt P van een hyperbool $\mathcal{K}$ is de bissectrice van de hoek tussen de brandpuntvoerstralen (hier zijn dat de lijnen PB en PC) van dat punt. ◊

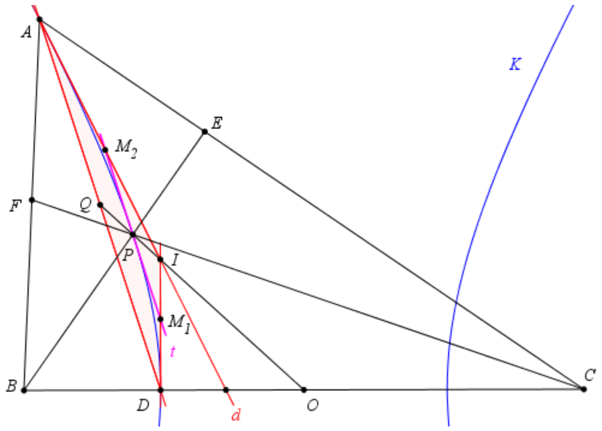
Stelling 5. De middens van een stelsel evenwijdige koorden van een hyperbool liggen op een rechte lijn door het middelpunt van die hyperbool. ◊

Deze stellingen worden in het tweede deel van de appendix (paragraaf 8) bewezen. In die paragraaf staan ook enkele, door mij in paragraaf 6 te gebruiken, gevolgen van die eigenschappen.

6. Beschouwing van de hyperbool

Ik ga er dus van uit dat het gezochte (te construeren) punt P ***op*** de hyperbool $\mathcal{K}$ ligt; zie figuur 6.
De lijn AD is een koorde van $\mathcal{K}$. De richting van de drager van AD bepaalt ook een toegevoegde middellijn die door het midden O van BC én door het midden van AD gaat; zie stelling 5.

figuur 6



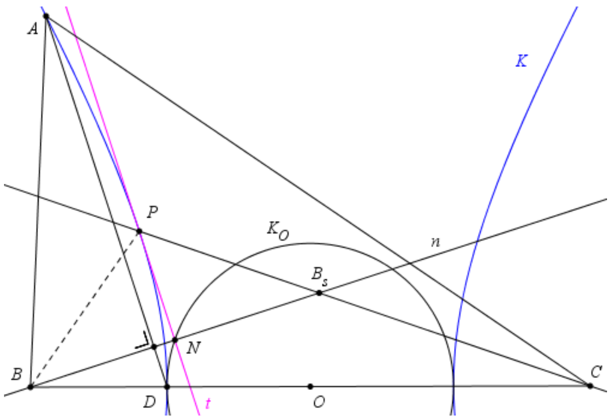
Verder ligt I op de bissectrice d van hoek BAC. De lijn d is daarmee raaklijn in A aan $\mathcal{K}$. En ook ID is een raaklijn aan $\mathcal{K}$ – namelijk in het punt D – omdat DI de bissectrice is van (de gestrekte) hoek BDC; zie stelling 4.
Het punt I is dan de pool van de (pool)lijn AD bij $\mathcal{K}$, zodat I op de lijn ligt die het midden Q van de raakkoorde AD met O verbindt; zie gevolg 4 van stelling 5 (in paragraaf 8.2).

Ik 'kies' nu P als snijpunt van OQ met $\mathcal{K}$. De raaklijn t in P aan $\mathcal{K}$ is dan evenwijdig met AD; zie gevolg 1 van stelling 5 (in paragraaf 8.2).

Verder [7]: t & $ID = M_1$ en t & $IA = M_2$.
M_1 is dan het middelpunt van de incirkel van driehoek PBC, immers t is de bissectrice van hoek BPC (eigenschap H1) én M_1 ligt op ID welke lijn loodrecht staat op BC.
Nu is verder: BP & $CA = E$ en CP & $BA = F$.
Voor het punt M_2 geldt [8]: d(M_2, BE) = d(M_2, BA), want M_2 ligt op de bissectrice van hoek EPF en op die van EAF, zodat BM_2 de bissectrice is van hoek ABP.
Daarmee zijn de afstanden van het punt M_2 tot de zijden van vierhoek $AFPE$ gelijk, zodat M_2 het middelpunt is van de incirkel van vierhoek $AFPE$.
In driehoek ADI blijkt dat $M_1P = M_2P$ (omdat M_1M_2 // DA). De incirkels van de driehoeken PBC en $AFPE$ zijn dus congruent.

Constructie. En dan blijkt *ook* dat het punt P *met passer en latje* als punt van $\mathcal{K}$ te construeren is! Zie daarvoor figuur 7 en de ernaast staande constructiestappen.

figuur 7



Constructiestappen

- $\mathcal{K}_O$ = Cirkel(O, OD)
- n = Loodlijn(B, AD)
- $N = n$ & $\mathcal{K}_O$ \\ N ligt dicht bij AD
- t = EvenwijdigeLijn(N, AD)
- B_s = Puntspiegeling(B, N)
- $P = t$ & CB_s

En dan is P inderdaad het te construeren punt, dat gelegen is op de hyperbool $\mathcal{K}$ en dat de gewenste eigenschappen heeft.
De lezer kan gebruik maken van het gevolg van stelling 4 (zie paragraaf 8.2) om deze laatste bewering te bewijzen.

7. Noten

[1] Link naar de Facebook-groep (alleen indien aangemeld op Facebook):
https://www.facebook.com/groups/Leraarwiskunde/

[2] Link naar het betreffende item (alleen indien aangemeld op Facebook):
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=1340908425977315&set=gm.632447593622466&type=3&theater

[3] Zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Sangaku*

[4] In figuur 1 wordt gesproken van een 'latje'. Hiermee wordt bedoeld: een liniaal *zonder* centimeteraanduiding.

[5] In hetgeen volgt staat na '\\' commentaar bij de op die regel staande tekst.

[6] Een hyperbool is *volledig bepaald* door één (in ligging gegeven) punt ervan én de beide brandpunten. Dit is het gevolg van de definitie van deze figuur: een hyperbool is de verzameling van de punten waarvoor het verschil van de afstanden tot twee gegeven (vaste) punten (de brandpunten) constant is.

[7] Met de notatie X & $Y = Z$ wordt bedoeld: het snijpunt van de meetkundige objecten X en Y is het meetkundige object Z.

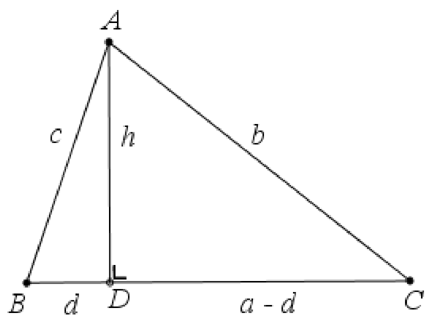
[8] De rekenkundige functie d(X, Y) geeft de afstand aan van het object X tot het object Y.

8. Appendix

8.1. Eerste deel – enkele eigenschappen van een driehoek

***Bewijs van stelling* 1** (Heron)

figuur a1



In figuur a1 is driehoek ABC weergegeven met de gebruikelijke naamgeving van de zijden. AD is de hoogtelijn uit A, waarbij $AD = h$, $BD = d$ en $CD = a - d$.
Volgens de stelling van Pythagoras bestaan nu in de driehoeken DAC en DAB de volgende relaties:

(a1)… $b^2 = h^2 + (a - d)^2$

(a2)… $c^2 = h^2 + d^2$

Aftrekking van (a1) en (a2) geeft dan:

$$b^2 - c^2 = (a - d)^2 - d^2 \quad \text{of} \quad b^2 - c^2 = a^2 - 2ad$$

En hieruit volgt:

(a3)... $d = \frac{-b^2+a^2+c^2}{2a}$

Substitutie van (a3) in (a2) geeft:

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{-b^2+a^2+c^2}{2a}\right)^2 \quad \text{of} \quad h^2 = c^2 - \left(\frac{-b^2+a^2+c^2}{2a}\right)^2$$

Vermenigvuldiging van de laatste uitdrukking met $(2a)^2$ resulteert in:

(a4)... $4a^2h^2 = (2ac)^2 - (-b^2 + a^2 + c^2)^2$

Met de formule voor het verschil van twee kwadraten gaat relatie (a4) over in:

$$4a^2h^2 = (2ac - b^2 + a^2 + c^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2)$$
$$4a^2h^2 = (\ (a + c)^2 - b^2\ )(\ b^2 - (a - c)^2\ )$$

En opnieuw de verschilformule toepassend:

(a5a)... $4a^2h^2 = (a + b + c)(a + c - b)\ (a + b - c)\ (b + c - a)$

Zoals gebruikelijk is $a + b + c = 2s$ (de omtrek van de driehoek). Uit (a5a) volgt daarmee:

(a5b)... $4a^2h^2 = 2s \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - a)$

En dan is:

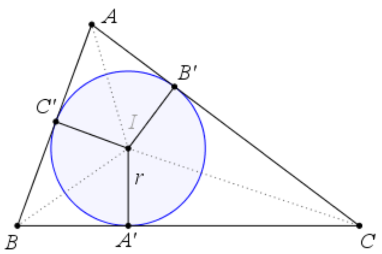
(a6)... $(\frac{1}{2}ah)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Voor de oppervlakte O van driehoek ABC geldt onder andere: $O = \frac{1}{2}ah$.

En daarmee is volgens uitdrukking (a6) bewezen:

(a7)... $O^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ◊

figuur a2



***Bewijs van stelling* 2**

In figuur a2 is I het middelpunt van de incirkel van driehoek ABC en zijn A', B', C' de raakpunten van die cirkel met de zijden. De lengte van de straal van de incirkel is gelijk aan r.

Ik stel $AB' = x$, $BC' = y$, $CA' = z$. Omdat de (lengtes van de) raaklijnstukken twee aan twee gelijk zijn, is:

$$x + y + z = s$$

en $\quad y + z = BC' + CA' = BA' + CA' = a$, zodat $x + a = s$. Dus: $AB' = x = s - a$.

Analoog is $BC' = y = s - b$ en $CA' = z = s - c$. ◊

Gevolg. En formule voor de oppervlakte O van driehoek ABC luidt dan (zie figuur a2):

$$O = O_{ABI} + O_{BCI} + O_{CAI} =$$
$$= \tfrac{1}{2}r \cdot AB + \tfrac{1}{2}r \cdot BC + \tfrac{1}{2}r \cdot CA = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs$$

Of ook, vanwege de symmetrie in AI, BI en CI:

$$O = 2O_{AB'I} + 2O_{AC'I} + 2O_{CA'I} =$$
$$= r(s-a) + r(s-b) + r(s-c) =$$
$$= r(2s - (a+b+c)) = r(2s - s)$$

Zodat opnieuw blijkt dat:

(a8)... $O = rs$ ◊

***Bewijs van stelling* 3**. Uit (a7) en (a8) volgt:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$$

En na deling van het tweede en derde lid door s blijkt de juistheid van relatie (1) direct. ◊

8.2. Tweede deel – twee eigenschappen van een hyperbool

A. ***Bewijs van stelling* 4** (door berekening). Ik ga uit van de hyperbool $\mathcal{K}$ met vergelijking:

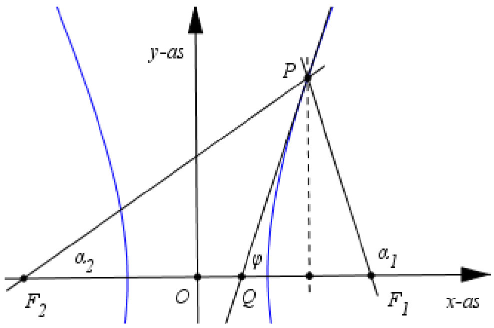
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(waarbij } a^2 + b^2 = c^2\text{)}$$

waarvan de brandpunten $F_1 = (c, 0)$ en $F_2 = (-c, 0)$ zijn. Verder ligt het punt $P = (x_0, y_0)$ op $\mathcal{K}$. En PQ is de raaklijn in P aan $\mathcal{K}$ met vergelijking:

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$$

Zie figuur a3. De hoeken die PF_1, PF_2, PQ maken met de (positieve) x-as, zijn opvolgend α_1, α_2, φ.
De hoeken QPF_1 en QPF_2 – en dat zijn de hoeken die PQ maakt met de brandpuntvoerstralen van het punt P – zijn opvolgend μ_1, μ_2.
Te bewijzen is nu: $\mu_1 = \mu_2$.

figuur a3



Eenvoudig is in te zien dat:

$$\tan\alpha_1 = -\frac{y_0}{x_0 - c},\quad \tan\alpha_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}, \tan\varphi = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Verder is:

$$\mu_1 + \varphi = \alpha_1 \quad \text{en} \quad \mu_2 + \alpha_2 = \varphi$$

zodat te bewijzen is:

$$\alpha_1 - \varphi = \varphi - \alpha_2 \; (= -\alpha_2 + \varphi)$$

Nu is:

$$\tan(\alpha_1 - \varphi) = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0 - c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}} = \frac{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + b^2cx_0}{a^2x_0y_0 - a^2cy_0 + b^2x_0y_0}$$

en omdat P op $\mathcal{K}$ ligt – en daarmee de coördinaten x_0, y_0 voldoen aan de vergelijking van $\mathcal{K}$ – en omdat ook $a^2 + b^2 = c^2$, is:

$$\tan(\alpha_1 - \varphi) = \frac{-a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2(cx_0 - a^2)}{cy_0(cx_0 - a^2)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Met vervanging van $-c$ door c in deze laatste formule blijkt:

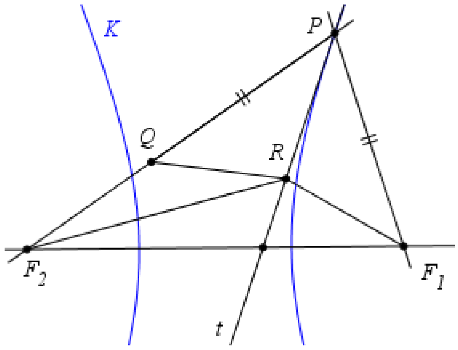
$$\tan(\varphi - \alpha_2) = -\tan(\alpha_2 - \varphi) = -\frac{b^2}{-cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

De tangenten van de beschouwde hoeken zijn dus gelijk. En omdat beide hoeken *scherp* zijn, is inderdaad: $\alpha_1 - \varphi = \varphi - \alpha_2$.

Met andere woorden: de raaklijn in een punt van een hyperbool is de bissectrice van de hoek tussen de brandpuntvoerstralen van dat punt. ◊

B. Er is overigens ook een eenvoudig *synthetisch bewijs* van stelling 4.

figuur a4



In dit geval ga ik uit van de bissectrice t van hoek F_1PF_2; zie figuur a4.
Er geldt dan *per definitie*:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \text{ (= constant)}$$

Zonder de algemene geldigheid van het hierna volgende bewijs geweld aan te doen veronderstel ik:

$$PF_1 < PF_2$$

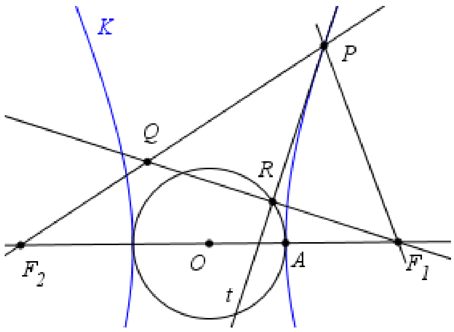
Ik kies op PF_2 het punt Q zó dat $PQ = PF_1$. Daarmee is $QF_2 = 2a$. En voorts zij R ($\neq P$) een *willekeurig* punt op t.
Dan is ook $RF_1 = RQ$, omdat de driehoeken RF_1P en RQP congruent zijn (*ZHZ*).
Nu is:

$$RF_2 - RF_1 = RF_2 - RQ < QF_2 = 2a$$

vanwege de driehoeksongelijkheid in driehoek RQF_2.
Uit $RF_2 - RF_1 < 2a$ volgt dat het punt R *niet* op $\mathcal{K}$ ligt.
Er is dus precies één punt van de lijn t, namelijk het punt P, dat *wél* op $\mathcal{K}$ ligt. De lijn t raakt dus in P aan $\mathcal{K}$. ◊

Gevolg van stelling 4. Op basis van het bovenstaande synthetische bewijs kan elk punt P van een hyperbool $\mathcal{K}$ met passer en latje worden geconstrueerd.

figuur a5



Gegeven zijn de brandpunten F_1, F_2 en een top A van de hyperbool $\mathcal{K}$; zie figuur a5. [

Constructiestappen

- O = Midden(F_1, F_2)
- Cirkel(O, OA)
- Kies het punt R willekeurig op de cirkel
- Q = Puntspiegeling (R, F_1)
- t = Middelloodlijn(F_1, Q)
- $P = t$ & F_2Q

Het bewijs van de juistheid van deze constructie laat ik aan de lezer.

Opmerking. Doorloopt het punt R de cirkel O, dan doorloopt het punt P de door F_1, F_2, A bepaalde hyperbool.

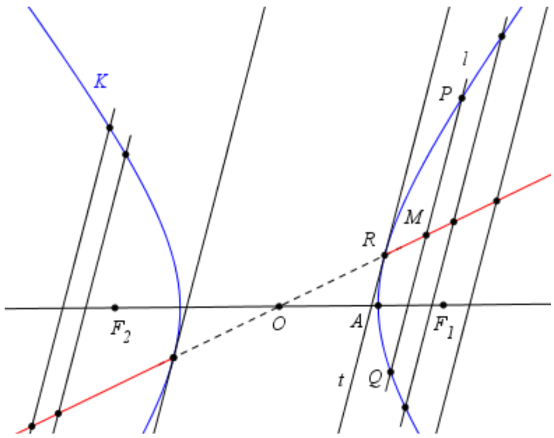
***Bewijs van stelling* 5**. Ik ga weer uit van een hyperbool $\mathcal{K}$ met vergelijking:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Voorts heeft een lijn l die $\mathcal{K}$ snijdt in de punten P en Q, als vergelijking:

$$y = mx + q$$

figuur a6



Zie figuur a6. Voor de x-coördinaten van P en Q geldt nu:

$$b^2x^2 - a^2(mx+q)^2 = a^2b^2 \;\Rightarrow\; (a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2q^2 + a^2b^2 = 0$$

Is nu M het midden van het lijnstuk PQ met x-coördinaat x_M, dan is, volgens de eigenschap van de som van de wortels x_1, x_2 van een vierkantsvergelijking:

(a9)… $$x_M = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{-2a^2mq}{a^2m^2 - b^2} = \frac{-a^2mq}{a^2m^2 - b^2}$$

Voor de bijbehorende y-coördinaat y_M van M is dan:

(a10)… $y_M = mx_M + q$

Eliminatie van q uit de relaties (a9) en (a10) met daarbij gebruik van 'lopende' coördinaten ($x_M \to x$, $y_M \to y$) geeft de *meetkundige plaats* van de punten M als de lijn l, en daarmee dus de koorde PQ, evenwijdig verplaatst wordt. Dan is:

$$x = \frac{-a^2m(y - mx)}{a^2m^2 - b^2} \;\Rightarrow\; (a^2m^2 - b^2)x = -a^2my + a^2m^2x$$

Zodat:

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x$$

En dit is de vergelijking van een rechte lijn die door het middelpunt O van de hyperbool gaat. Een dergelijke lijn is in dit verband een *middellijn* van de hyperbool en wordt ook *middellijn van het stelsel koorden* genoemd.
Waarmee de genoemde eigenschap bewezen is. ◊

Gevolgen

1. Zie figuur a6. De middellijn van een stelsel evenwijdige koorden van een hyperbool gaat ook door het raakpunt van de raaklijn die dezelfde richting heeft als de koorden. Immers, bij het (evenwijdig) opschuiven van de koorde in de richting van het raakpunt valt uiteindelijk het midden van de koorde samen met het raakpunt.

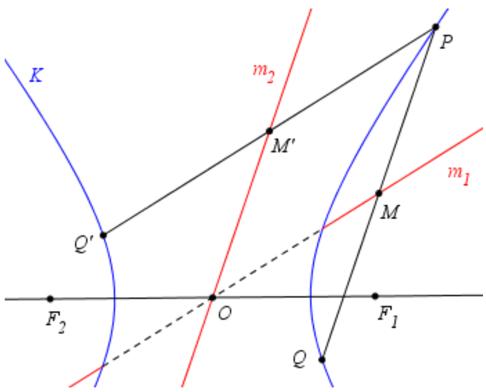
2. De richting van de koorden en de richting van de 'bijbehorende' middellijn zijn zogeheten *toegevoegde richtingen*:

$$m_1 = \text{rico(koorden)} = m \quad \text{en} \quad m_2 = \text{rico(middellijn)} = \tfrac{b^2}{a^2m}$$

Voor het product van twee bij een hyperbool toegevoegde richtingen m_1, m_2 geldt:

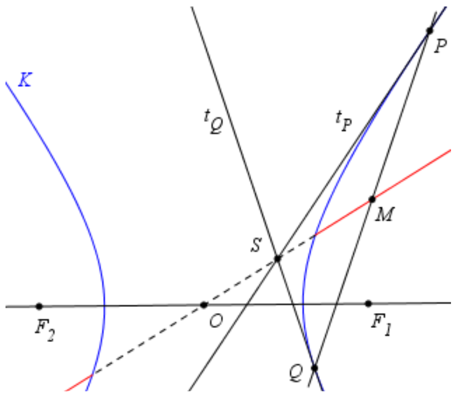
$$m_1 \cdot m_2 = \tfrac{b^2}{a^2}$$

figuur a7



3. Zie figuur a7. Uit de symmetrie van het bovenstaande volgt dat de middens van de koorden die evenwijdig zijn aan een middellijn van een hyperbool, op een middellijn liggen die een richting heeft die toegevoegd is aan de richting van de middellijn.
Er zijn dus telkens twee middellijnen met toegevoegde richtingen. Dit zijn zogeheten *toegevoegde middellijnen*.

figuur a8



4. Zie figuur a8. De door een punt S gaande middellijn van een hyperbool $\mathcal{K}$ gaat door het midden M van de (raak)koorde PQ waarvan de poollijn van S de drager is.
Of ook: de pool van de poollijn bij een hyperbool ligt op de middellijn door het midden van de door de poollijn bepaalde raakkoorde.
Bewijs. Is $S = (x_0, y_0)$ een willekeurig (reëel) punt en $\mathcal{K}$: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ de hyperbool, dan is de vergelijking van de poollijn van S bij $\mathcal{K}$:

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$$

Zodat rico(koorde/poollijn) = $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ en rico(middellijn) = $\frac{y_0}{x_0}$ (conform gevolg 2).
Een vergelijking van de middellijn is dan:

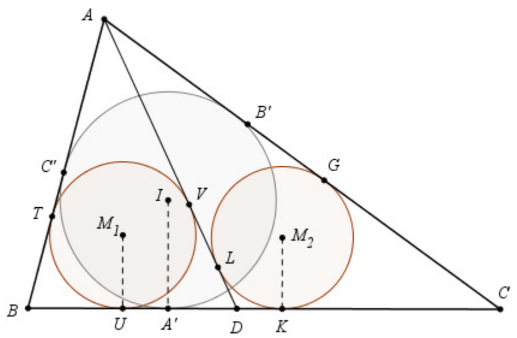
$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

waaruit direct duidelijk is dat het punt S op die middellijn ligt. ◊

9. Een andere Sangaku, min of meer ook als appendix

Een eenvoudigere sangaku, maar enigszins lijkend op de eerder behandelde, staat in figuur 8.

figuur 8

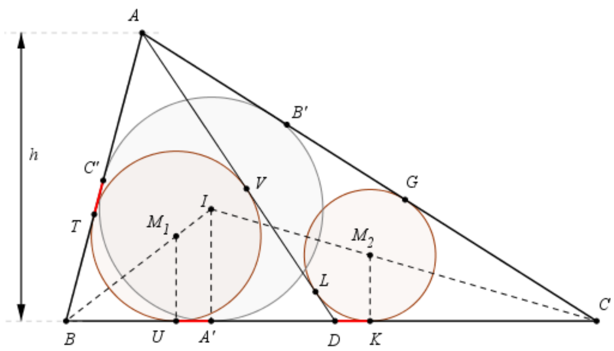


Op de zijde BC van een *willekeurige* driehoek ABC ligt het punt D zó, dat de incirkels M_1, M_2 van de deeldriehoeken ABD en ACD *congruent* zijn.

Cirkel I is weer de incirkel van driehoek ABC.
De raakpunten van de drie cirkels zijn in de figuur van namen voorzien.

Twee vragen die hierbij gesteld kunnen worden zijn:
- Is het mogelijk de lengte van het lijnstuk AD uit te drukken in de lengtes van de zijden van driehoek ABC?
- En (zo ja,) is de ligging van het punt D op BC *met passer en latje* te construeren?

figuur 9



Ik kijk eerst naar het ‘algemene’ geval: *niet-congruente* incirkels van beide deeldriehoeken; zie figuur 9. De constructie van de drie incirkels is hier triviaal. Echter, in deze figuur zitten zeker drie, naar mijn idee, onverwachte eigenschappen.

Eigenschap S4. In de configuratie van figuur 9 is:

(8)… $TC' = UA' = DK$

Bewijs. Voor de lengtes van de raaklijnstukken uit het punt B aan cirkel I en aan cirkel M_1 geldt:

$BA' = BC'$

$BU = BT$

Aftrekking geeft: $UA' = TC'$. Dit is zeker *níet* onverwacht.

Stellen we:

- s = halve omtrek van driehoek ABC;
- s_1 = halve omtrek van driehoek ABD; s_2 = halve omtrek van driehoek ACD, en
- x = lengte van AD,

dan is, zoals eenvoudig is in te zien:

(9)… $s_1 + s_2 = s + x$

Ook is, deels bij de incirkel van driehoek ABD, volgens stelling 2 en met gebruik van (9):

$UA' = BA' - BU = (s - b) - (s_1 - x) = (s - s_1 + x) - b = s_2 - b$

Maar ook geldt voor het raaklijnstuk uit D aan cirkel M_2:

$DK = s_2 - b$

Zodat inderdaad $TC' = UA' = DK$. ◊

Eigenschap S5. In de configuratie van figuur 9 is:

(10)… $1 - \dfrac{2r}{h} = (1 - \dfrac{2r_1}{h})(1 - \dfrac{2r_2}{h})$

waarbij h de lengte is van de hoogtelijn uit A en r, r_1, r_2 opvolgend de lengtes van de stralen van de incirkels van de driehoek ABC, ABD en ACD.

Bewijs. Omdat de cirkels M_2 en I beide raken aan de lijnen CA en CB is (zie weer figuur 9):

(11)… $CK : CA' = r_2 : r \quad \Rightarrow \quad CK = \dfrac{r_2}{r}(s - c)$

Verder is ook [9]:

$$\begin{aligned} O_1 &= \text{oppervlakte}(ABD) = \tfrac{1}{2} r_1 (AB + BD + DA) = \tfrac{1}{2} r_1 (c + a - (CK + \underline{DK}) + \underline{DL} + \underline{\underline{AL}}) \\ &= \tfrac{1}{2} r_1 (c + a - CK + \underline{\underline{AG}}) = \tfrac{1}{2} r_1 (c + a - CK + (b - CK)) \\ &= \tfrac{1}{2} r_1 (a + b + c - 2 \cdot CK) \end{aligned}$$

Daaruit volgt met (11):

$$O_1 = r_1 s - \frac{r_1 r_2}{r}(s - c)$$

Voor O_2 = oppervlakte(ACD) geldt analoog:

$$O_2 = r_2 s - \frac{r_1 r_2}{r}(s - b)$$

Dus:

$$\begin{aligned} O &= \text{oppervlakte}(ABC) = rs \\ &= O_1 + O_2 = (r_1 + r_2)s - \frac{r_1 r_2}{r}(2s - b - c) = (r_1 + r_2)s - \frac{a r_1 r_2}{r} \end{aligned}$$

Na deling door s geldt:

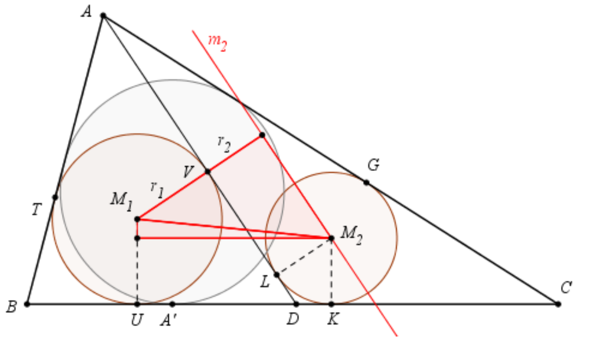
$$r = (r_1 + r_2) - \frac{a r_1 r_2}{rs} \quad \Rightarrow \quad 2r = 2(r_1 + r_2) - \frac{4 a r_1 r_2}{2rs}$$

Met substitutie van $2rs = ah$ (c.q. $rs = \tfrac{1}{2} ah$) geeft dit na deling door h en vervolgens na aftrekking van 1:

$$1 - \frac{2r}{h} = 1 - \frac{2(r_1 + r_2)}{h} + \frac{4 r_1 r_2}{h^2}$$

En daaruit volgt het rechterlid van relatie (10) direct. ◊

figuur 10



Eigenschap S6. In de configuratie van figuur 10 (die hetzelfde is als die van figuur 9) geldt:

$r_1 \cdot r_2 = DL \cdot DV$

Bewijs. De lijn m_2 gaat door het punt M_2 en is evenwijdig met AD. Hiermee ontstaan twee rechthoekige driehoeken, beide met M_1M_2 als grootste zijde. Nu is in die twee driehoeken:
- $(r_1 + r_2)^2 + VL^2 = (M_1M_2)^2$
- $(r_1 - r_2)^2 + UK^2 = (M_1M_2)^2$

Door gelijkstelling en verdere uitwerking is:

$2r_1 \cdot r_2 + (\underline{VD} - \underline{LD})^2 = -2r_1 \cdot r_2 + (\underline{UD} + \underline{DK})^2 \quad \Rightarrow$

$4r_1 \cdot r_2 - 2 \cdot DV \cdot DL = 2 \cdot DV \cdot DL \quad \Rightarrow$

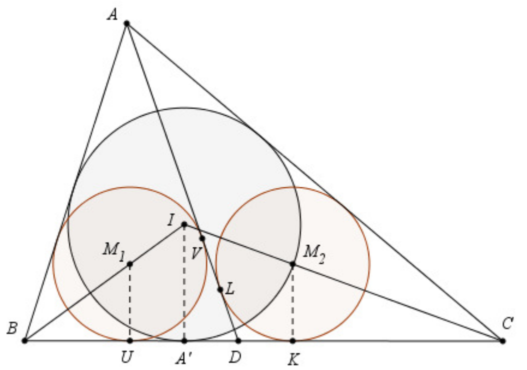
$r_1 \cdot r_2 = DL \cdot DV$ ◊

A. Congruente incirkels. Voor de oplossing van het eerder, in het begin van deze paragraaf (figuur 8), gestelde sangaku-probleem zal ik in *eerste* instantie *geen* gebruik maken van bovenstaande eigenschappen. [10]
Ik zal aantonen:

Eigenschap S7. Ligt in een *willekeurige* driehoek ABC op de zijde BC een punt D zó, dat de incirkels van de driehoeken ABD en ACD *congruent* zijn, dan geldt voor de lengte x van het lijnstuk AD:

(12)… $x = \sqrt{s(s-a)}$

figuur 11



Bewijs. In figuur 11 is de lengte van de straal van de congruente cirkels M_1, M_2 gelijk aan u; de lengte van straal van de incirkel I is gelijk aan r.
Nu is opvolgend in de driehoeken $BA'I$ en $CA'I$:

$$\frac{BA'}{BU} = \frac{IA'}{M_1U} = \frac{r}{u} \quad \text{en} \quad \frac{CA'}{CK} = \frac{IA'}{M_2K} = \frac{r}{u}$$

of ook – weer volgens stelling 2 – met de eerder gegeven definities van s_1 en s_2:

(13)… $\dfrac{s-b}{s_1 - x} = \dfrac{r}{u}$ en $\dfrac{s-c}{s_2 - x} = \dfrac{r}{u}$

Met de oppervlakteformule (a8; in paragraaf 8) en identiteit (9) is:

oppervlakte(ABC) $= rs = u \cdot s_1 + u \cdot s_2 = u\,(s_1 + s_2) = u(s + x)$ zodat $x = \dfrac{r}{u} \cdot s - s$

Met deze laatste identiteit gaan de relaties (13) over in:

$$x = \frac{s(s-b)}{s_1 - x} - s \quad \text{en} \quad x = \frac{s(s-c)}{s_2 - x} - s$$

Uitwerking van hiervan geeft:

$$s_1 \cdot x - x^2 = s(s-b) - s \cdot s_1 + s \cdot x$$
$$s_2 \cdot x - x^2 = s(s-c) - s \cdot s_2 + s \cdot x$$

En na optelling van beide:

$$(s_1 + s_2)x - 2x^2 = s(2s - b - c) - s(s_1 + s_2) + 2s \cdot x$$

en weer met (9):

$$(s + x)x - 2x^2 = s \cdot a - (s + x)s + 2s \cdot x$$

Zodat na ordening van de termen blijkt:

(14)… $x^2 = s^2 - s \cdot a$

En hieruit volgt relatie (12) direct. ◊

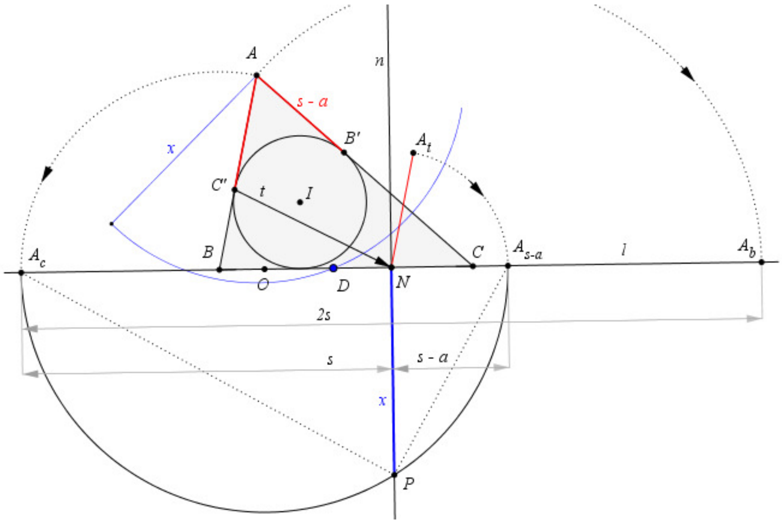
Gevolg. Relatie (14) is niets anders dan:

$$s : x = x : (s - a)$$

Het lijnstuk x ($\equiv AD$) is daarmee middelevenredig tussen de ‘lijnstukken’ s en $(s - a)$.
En daarmee is x te construeren *met passer en latje*. ◊

Constructie. Ik ga uit van een in ligging en grootte gegeven driehoek ABC met de incirkel I; zie figuur 12.
De punten C' en B' zijn de raakpunten van de incirkel I met de zijden AB en AC.
Zoals bekend (zie stelling 2) is dan $AC' = AB' = s - a$.
Verder is de lijn l de drager van de zijde BC van de driehoek.

figuur 12



Constructiestappen [11]

- A_c = Cirkel(B, A) & l
- A_b = Cirkel(C, A) & l
- N = Midden(A_c, A_b)
- t = Vector(C', N)
- A_tN = Translatie(AC', t)
- A_{s-a} = Cirkel(N, A_t) & l
- O = Midden(A_c, A_{s-a})
- n = Loodlijn(N, l)
- P = Cirkel(O, OA_c) & n
- $x = NP$
- D = Cirkel(A, x) & BC

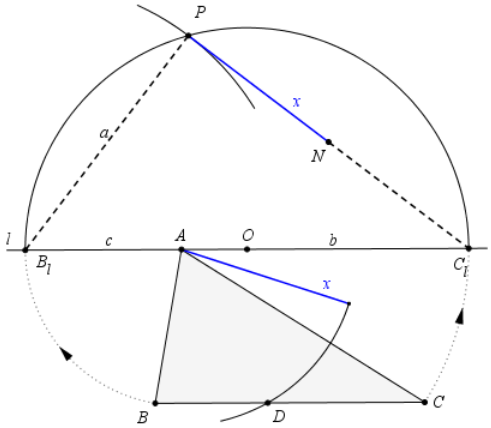
Het punt D is dan het (gezochte) punt op BC waarvoor de incirkels van de driehoeken ABD en ACD congruent zijn; immers, in de in P rechthoekige driehoek A_cPA_{s-a} is $PN^2 = x^2 = A_cN \cdot NA_{s-a} = s(s - a)$; zie relatie (14) en het gevolg daarvan.

En daarmee zijn de beide vragen die geformuleerd zijn aan het begin van deze paragraaf, beantwoord. Immers, uit (12) volgt:

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}(b+c-a)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}$$

Opmerking. Op basis van deze schrijfwijze is een eenvoudiger constructie van het punt D mogelijk dan die welke hierboven gegeven is, namelijk een constructie gebaseerd op de stelling van Pythagoras); zie figuur 13.

figuur 13



Constructiestappen

- l = EvenwijdigeLijn(A, BC)
- B_l = Cirkel(A, B) & l
- C_l = Cirkel(A, C) & l
- O = Midden(B_l, C_l)
- P = Cirkel(O, B_l) & Cirkel(B_l, a) \\ $a \equiv BC$
- N = Midden(P, C_l) \\ $PN \equiv x$
- D = Cirkel(A, x) & BC

Dan is D het te construeren punt, immers in de in P rechthoekige driehoek B_lPC_l is:

$$x = PN = \tfrac{1}{2}PC_l = \tfrac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - a^2} \quad \Diamond$$

B. Congruente incirkels. In *tweede* instantie maak ik om eigenschap S7 te bewijzen gebruik van eigenschap S5; dat wil zeggen ik gebruik formule (10) die voor de congruente incirkels met straal u overgaat in:

(15)… $1 - \dfrac{2r}{h} = (1 - \dfrac{2u}{h})^2$

Nu is $O = rs = \tfrac{1}{2}ah$ en $O = O_1 + O_2 = u \cdot s_1 + u \cdot s_2 = u(s_1 + s_2)$, waaruit met (9) volgt;

(16)… $\dfrac{2r}{h} = \dfrac{a}{s}$ en $\dfrac{2u}{h} = \dfrac{2}{h} \cdot \dfrac{O}{s_1 + s_2} = \dfrac{a}{O} \cdot \dfrac{O}{s+x} = \dfrac{a}{s+x}$

De relaties (15) en (16) leiden nu tot de volgende kwadratische 'vergelijking' in x c.q. in $(s + x)$:

(17)… $1 - \dfrac{a}{s} = (1 - \dfrac{a}{s+x})^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-1}{s} = \dfrac{-2}{s+x} + \dfrac{a}{(s+x)^2} \quad \Rightarrow \quad (s + x)^2 - 2s(s + x) + as = 0$

En uit (17) volgt dan met de *abc-formule*:

$$s + x = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4as}}{2} = s \pm \sqrt{s^2 - as} \quad \Rightarrow \quad x^2 = s(s-a)$$

En de laatste relatie zien we terug in eigenschap S7. ◊

10. Noten bij paragraaf 9

[9] Identieke onderstrepingen staan onder de namen van (niet alle) lijnstukken waarvan de lengtes gelijk zijn.

[10] Uiteraard gelden de eigenschappen S4, S5 en S6 ook in de configuratie van figuur 8.

[11] Met Cirkel (M, P) wordt bedoeld de cirkel met middelpunt M die gaat door het punt P; met Cirkel(M, r), waarin r de naam is van een lijnstuk, wordt bedoeld de cirkel met middelpunt M en straal r.
De notatie Cirkel(M, r) wordt soms in dynamische-meetkundesoftware (zoals in de Nederlandse versies van *GeoGebra* en *Cabri Geometry*) vervangen door Passer(M, r).

==========