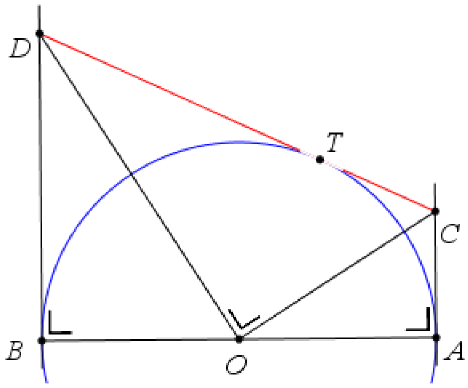
Zomaar een vraagstuk

Dick KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)
oktober 2017

1. Inleiding

Soms loop je tegen een vraagstuk aan waarvan je de oplossing direct ziet, en waarvan tijdens het opschrijven van die oplossing ook blijkt dat (je) er meer mee kan.
Ik had deze ervaring bij het volgende meetkundige probleempje.

figuur 1



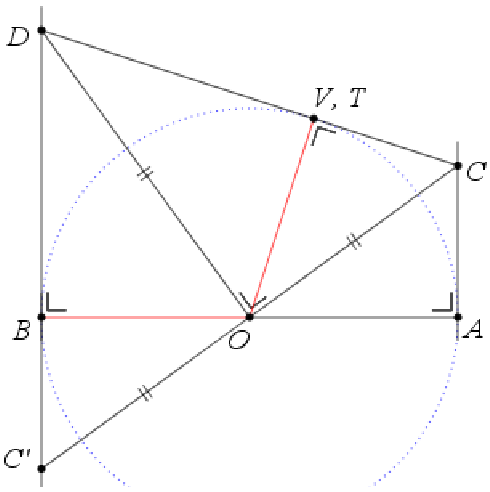
Een middellijn van een cirkel met middelpunt *O* heeft eindpunten *A* en *B*.
Op de raaklijn in *A* aan de cirkel ligt het punt *C* en op de raaklijn in *B* aan de cirkel ligt het punt *D* en wel zo, dat $\angle COD = 90^o$.
≡ Toon aan dat de lijn *CD* raakt aan de cirkel (raakpunt *T*); zie figuur 1.

Ik zal hieronder enkele oplossingen van het probleem geven, synthetisch en analytisch.

2. Oplossing 1

Ik denk de cirkel eerst maar even weg. Vervolgens verleng ik het lijnstuk *CO* met *OC'*, waarbij *OC'* = *CO*; zie figuur 2a.[1]

figuur 2a



Vanwege de puntsymmetrie in *O* ligt het punt *C'* op de lijn *DB*.
Nu is in driehoek *CC'D* de lijn *DO* een hoogtelijn en daarbij ook zwaartelijn. Dus is driehoek *CC'D* gelijkbenig (met top *D*).
DO is dan ook bissectrice van hoek *D*, en daarmee is: [2]

$$d(O, CD) = d(O, C'D)$$

Is *V* het voetpunt van de loodlijn uit *O* op *CD*, dan is:

$$OV = OB \text{ (= straal van de cirkel)}$$

En dan ligt *V* op de cirkel met middellijn *AB*.

Omdat *CD* in *V* loodrecht staat op *OV*, is *CD* raaklijn aan die cirkel. Zodat – en noem *V* maar *T*:

$$V \equiv T$$

Met andere woorden: de lijn *CD* raakt in het punt *T* aan de cirkel. ◊

Opmerkingen

1. En op dit moment vroeg ik me af of het tóch niet eenvoudiger c.q. anders kon. Hoe dat kwam? Daarvoor verwijs ik naar opmerking 2.
2. De lezer heeft wellicht (ook nu pas?) gezien dat *CD* = *C'D* = *AC* + *BD*. ◊

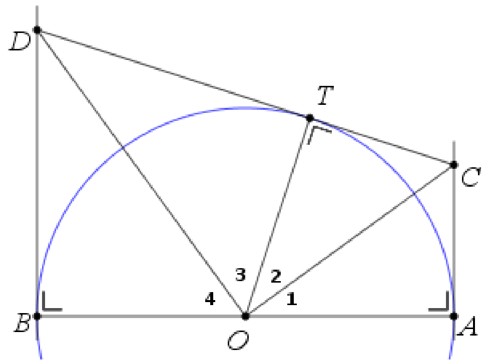
3. Oplossing 2

In oplossing 1 bleek dat *CD* = *AC* + *BD*; driehoek *CC'D* is immers een gelijkbenige driehoek.
Er is dus op het lijnstuk *CD* een punt *T* te vinden dat zó gelegen is dat *CT* = *CA* en *DT* = *DB*.
En daarmee zijn *CT* en *DT* raaklijnstukken uit opvolgend *C* en *D* aan de cirkel met middellijn *AB*.
Of anders gezegd: *CD* raakt aan die cirkel. ◊

4. Omgekeerd

Overigens, de ‘omgekeerde eigenschap’ is iets eenvoudiger te bewijzen:
≡ *«als»* CD raakt in T aan de cirkel, *«dan»* $\angle COD = 90^\circ$.

figuur 2b



Bewijs. Omdat $CA = CT$ en $DB = DT$ (het zijn raaklijnstukken), is direct duidelijk dat:

$\Delta\ OAC \cong \Delta\ OTC$ (ZZZ) $\Rightarrow \angle O_1 = \angle O_2$
$\Delta\ OBD \cong \Delta\ OTD$ (ZZZ) $\Rightarrow \angle O_3 = \angle O_4$

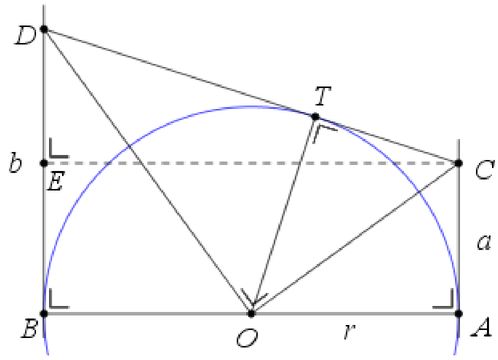
En dan blijkt:

$\angle O_{1234} = 180^\circ \Rightarrow \angle O_{23} = \angle COD = 90^\circ$ ◊

5. Oplossing 3

Met ‘een aantal keer’ de stelling van Pythagoras kan ook een bewijs van de eigenschap geleverd worden.

figuur 3



Bewijs. Ik stel $AC = a$, $BD = b$ en $OA = r$.[3]
Het punt E is de loodrechte projectie van C op de lijn BD; daardoor is $DE = b - a$, en $CE = 2r$.
En in driehoek CDE is:

$CD^2 = (2r)^2 + (b-a)^2$ of:
$CD^2 = 4r^2 + a^2 + b^2 - 2ab$

Maar óók:

$CD^2 = CO^2 + DO^2$ of:
$CD^2 = (a^2 + r^2) + (b^2 + r^2) = a^2 + b^2 + 2r^2$

Conclusie – en die is *onafhankelijk* van de ligging van het punt T (het al of niet raken):

$r^2 = ab$

(Zie ook de opmerking aan het eind van paragraaf 6.)
Substitutie van deze relatie in de gevonden uitdrukking voor CD^2 geeft dan:

$CD^2 = a^2 + b^2 + 2r^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ of te wel:
$CD = a + b$

Op CD ligt dan een punt T waarvoor $CT = a$ én $DT = b$. Met andere woorden: in dat punt T raakt de cirkel aan de lijn CD.
(Deze twee zinnen schreef ik, in iets andere bewoordingen, al eerder.) ◊

6. Oplossing 4

Als de oplossing analytisch gevonden moet worden, ligt het voor de hand een rechthoekig assenstelsel xOy te gebruiken waarvan de x-as valt langs de lijn AB.
Daarin is:

$O = (0, 0)$, $A = (r, 0)$, $B = (-r, 0)$, $C = (r, a)$ en $D = (-r, b) = (-r, r^2/a)$

Wat punt D betreft: zoals reeds is opgemerkt, is de eigenschap $r^2 = ab$ onafhankelijk van het al of niet raken van de cirkel aan CD.
Ik stel nu een vergelijking op van de lijn CD:

$$CD :: \quad y = \frac{a-b}{2r}(x-r) + a$$
$$(a-b)x - 2ry + ar + br = 0$$

En de zogeheten normaalvergelijking van de lijn CD is dan:

$$CD_n :: \quad \frac{(a-b)x - 2ry + r(a+b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4r^2}} = 0$$

Uit de normaalvergelijking volgt door substitutie van $x = 0$, $y = 0$, $r^2 = ab$:

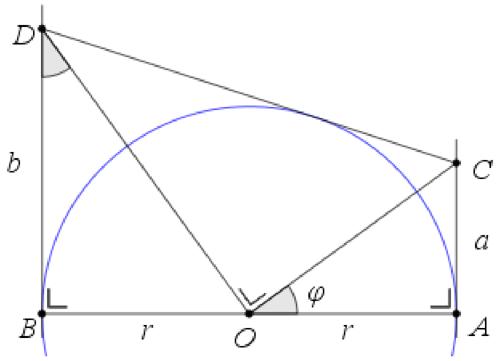
$$\mathrm{d}(O,CD) = \frac{r(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab+4ab}} = \frac{r(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2}} = r$$

En daarmee raakt CD aan de beschouwde cirkel, die immers O als middelpunt heeft en r als straal. ◊

Opmerking

3. In paragraaf 5 (met oplossing 3) werd de relatie $r^2 = ab$ afgeleid via 'een aantal keer' de stelling van Pythagoras. Met wat goniometrie kan dit korter.

figuur 4



In de configuratie van figuur 4 is onmiddellijk duidelijk dat:

$$\angle COA = \angle ODB = \varphi$$

In de rechthoekige driehoeken OAC en OBD is:

$$\tan\varphi = \frac{a}{r} = \frac{r}{b}$$

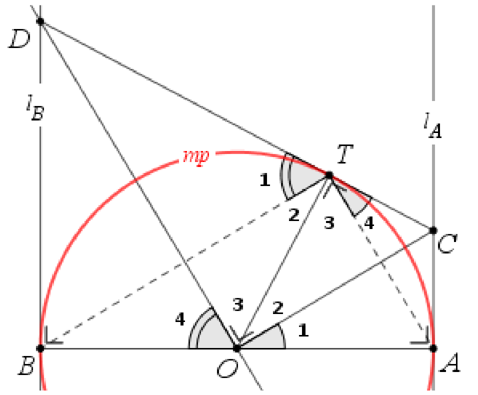
Zodat inderdaad:

$$r^2 = ab \quad ◊$$

7. Oplossing 5

Het ligt bij het bewijzen van meetkundige eigenschappen, in het algemeen, *niet* direct voor de hand gebruik te maken van *meetkundige plaatsen*. Hier doe ik dat wel.

figuur 5



Ik herschrijf het probleem enigszins.

Op de loodlijn l_A in A op het lijnstuk AB ligt het *willekeurige* punt C.

Met O als midden van AB ligt D zó op de loodlijn l_B in B op AB dat de hoek COD gelijk is aan 90°.

Het voetpunt van de loodlijn uit O op CD is T.

Het ligt, gezien de context, nu wél voor de hand te vragen naar de meetkundige plaats (*mp*) van het punt T als het punt C de lijn l_A doorloopt.

Antwoord. Zie figuur 5, waarin de hulplijnstukken TA en TB zijn getekend. Ik wil aantonen dat $\angle T_{23} = 90°$. De vierhoeken $OACT$ en $OBDT$ zijn koordenvierhoeken. De diagonalen AT en BT verdelen met OT de gestrekte hoek CTD in vier delen T_i, die elk aangegeven zijn met een index i = 1, 2, 3, 4. Van de vier hoeken O_i rond het punt O, ook geïndiceerd met i = 1, 2, 3, 4, is bekend:

$$\angle O_1 + \angle O_4 = 90°$$

In de genoemde koordenvierhoeken is opvolgend:

$$\angle O_1 = \angle T_4 \quad \text{en:}$$
$$\angle O_4 = \angle T_1$$

Daaruit blijk dat $\angle T_1 + \angle T_4 = 90°$. Dus is, wat ik wilde aantonen: $\angle T_{23} = 90°$.

Het punt T ligt daardoor bij elke positie van C op de *Thales-cirkel* met middellijn AB – dit is de meetkundige plaats van het punt T. En omdat CD loodrecht staat op OT is CD een raaklijn aan die cirkel. ◊

8. Oplossing 6

Een vraagstuk waarin naar een meetkundige plaats wordt gevraagd – zie paragraaf 7 – kan meestal ook worden opgelost met analytische methoden.

Ik zal dat hier *niet* doen via de richtingscoëfficiënten van de lijnen AT en BT (zie figuur 5), omdat dan toch eerst de coördinaten van het punt T moeten worden berekend. Hebben we die eenmaal, dan is daarmee, naar verwacht, de meetkundige plaats van het punt T wel af te leiden.

Welnu, in het rechthoekige assenstelsel van oplossing 4 heeft de lijn *CD* de vergelijking:

CD :: $(a-b)x - 2ry + r(a+b) = 0$ **…(1)**

De lijn door *O* die loodrecht staat op *CD*, heeft dan als vergelijking:

OT :: $2rx + (a-b)y = 0$ **…(2)**

De coördinaten (x_T, y_T) van het snijpunt *T* van deze lijnen voldoen aan de lineaire vergelijkingen (1) en (2), en daarmee ook aan een combinatie van die vergelijkingen waarin *a* – en ook *b*, die van *a* afhangt – niet voorkomt.
De parameters *a* en *b* moeten dus uit (1) en (2) worden geëlimineerd. Directe eliminatie ligt hier *niet* voor de hand. Daarom is het verstandig x_T en y_T uit te drukken in *a* en *b* om daarna te trachten een relatie tussen beide te vinden *zonder a* en *b*.
Na enig (gebruikelijk) rekenwerk blijkt:

$$x_T = \frac{-r(a^2-b^2)}{(a-b)^2+4r^2} \quad \text{en} \quad y_T = \frac{2r^2(a+b)}{(a-b)^2+4r^2}$$

Met de relatie $r^2 = ab$ (zie bijvoorbeeld opmerking 3 in paragraaf 6) is:

$$x_T = \frac{-r(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} = \frac{-r(a-b)}{a+b} \quad \text{en} \quad y_T = \frac{2r^2(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{2r^2}{a+b}$$

En met gebruik van ‘lopende’ coördinaten blijkt via kwadrateren en optellen van beide laatste uitdrukkingen en opnieuw met gebruik van $r^2 = ab$:

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2(a-b)^2+4r^4}{(a+b)^2} = \frac{r^2\cdot(\,(a-b)^2+4r^2\,)}{(a+b)^2} = \frac{r^2\cdot(a+b)^2}{(a+b)^2}$$
$$= r^2$$

En ook nu vind ik (natuurlijk): de meetkundige plaats van het punt *T* is de cirkel met middelpunt *O* en straal *r*. ◊

9. Noten

[1] Het kan (vanzelfsprekend) ook door het lijnstuk *DO* te verlengen met een lijnstuk *OD′* dat dezelfde lengte heeft als *DO*.

[2] De rekenkundige functie die de afstand ‘vastlegt’ tussen de meetkundige objecten *X* en *Y*, wordt aangegeven met d(*X*, *Y*).

[3] Hier is $a < b$. Het bewijs ondervindt nagenoeg geen verandering als $a > b$. Als $a = b$ (= *r*) is, dan is het bewijs triviaal.

versie 1.0 – september 2017

versie 2.0 – oktober 2017 // versie 2.1 – oktober 2017