Over conflictlijnen

Een synthetische behandeling

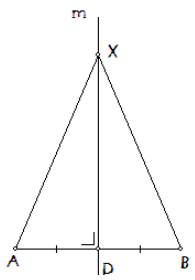
[Dick Klingens]

Definitie. De **afstand** van een punt X tot een gegeven punt A is de lengte van het lijnstuk XA. In plaats van die lengte noemen we ook wel het lijnstuk XA *zelf* de afstand van X tot A.

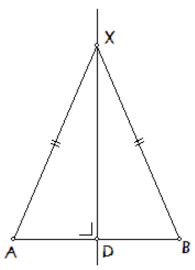
Stelling 1. *De meetkundige plaats van de punten X die gelijke afstanden hebben tot twee gegeven punten A en B, is de* ***middelloodlijn*** *m van het lijnstuk AB.*

Bewijs, 1e deel; ***zie figuur 1a***. Kiezen we op m een (willekeurig) punt X, dan geldt: $XA = XB$.
Immers, is D het midden van AB, dan zijn de driehoeken ADX en BDX congruent (gelijke rechte hoeken bij D, $AD = BD$, zijde XD gemeenschappelijk: *ZHZ*).
Uit die congruentie volgt dan direct dat $XA = XB$.
2e deel; ***zie figuur 1b***. Omgekeerd; weten we dat $XA = XB$, dan moeten we bewijzen dat X op m ligt.
Is D het voetpunt van de *loodlijn* uit X op AB, dan zijn de driehoeken ADX en BDX ook nu congruent (gelijke rechte hoeken bij X, $XA = XB$, zijde XD gemeenschappelijk: *ZZR*). Uit de congruentie volgt nu dat $AD = BD$, zodat D het midden is van het lijnstuk AB. De loodlijn uit X op AB valt dus samen met m. Met andere woorden: het punt X ligt op m. ◊

Gevolg



figuur 1a

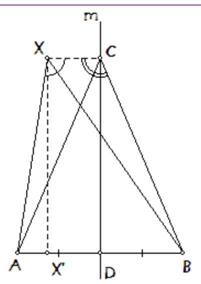


figuur 1b

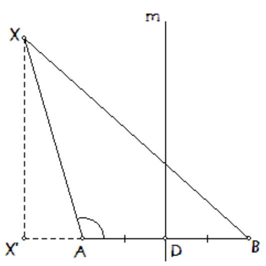
Ligt X *niet* op m, dan geldt $XA \neq XB$.

De lijn m verdeelt het vlak in twee *halfvlakken*. Ligt X in het halfvlak waarin A gelegen is, dan geldt $XA < XB$; ligt X in het halfvlak waarin B gelegen is, dan geldt $XA > XB$.
We tonen dit in hetgeen volgt aan.

Zie figuur 2a. Ligt het voetpunt X' van de loodlijn uit X op het lijnstuk DA en is C de het voetpunt van de loodlijn uit X op m, dan is in driehoek ACX de hoek X stomp, zodat: $CA > XA$.[1]



figuur 2a



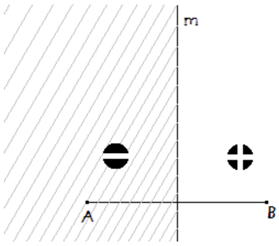
figuur 2b

In driehoek BCX is hoek C stomp, zodat $XB > CB$.
Met $CA = CB$ volgt dan: $XA < CA < XB$.

Ligt X' op het verlengde van DA (***zie figuur 2b***), dan is in driehoek ABX hoek A stomp, zodat eveneens $XA < XB$ is.[1]

Analoog kunnen we bewijzen dat $XA > XB$ als X' ligt op de halve lijn DB (X ligt dan in het halfvlak waarin B ligt). ◊

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur 2c

Op grond van de in het Gevolg staande eigenschap noemt men dit type meetkundige plaats ook wel **conflictlijn**.

Dus: de *conflictlijn* van twee gegevenpunten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB.

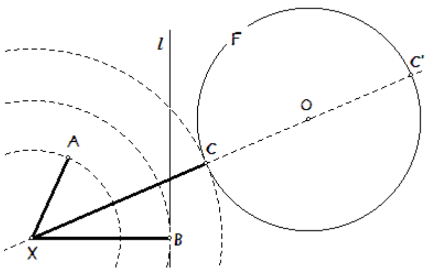
Merk nu nogmaals op dat de conflictlijn van A en B het platte vlak verdeelt in drie delen waarin voor de punten X geldt: $XA < XB$, gearceerd (**-**), $XA = XB$ (de lijn m) en $XA > XB$, niet-gearceerd (**+**); ***zie figuur 2c***.

We spreken af:

Definitie. De **conflictlijn** van twee meetkundige objecten (figuren) $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ is de meetkundige plaats van de punten X waarvoor $d(X, \mathcal{F}_1) = d(X, \mathcal{F}_2)$. Hierin is d de zogenoemde *afstandsfunctie*, de afstand van X tot het object $\mathcal{F}_j$ ($j = 1, 2$).

Om deze definitie te kunnen gebruiken moet dus ook de afstand gedefinieerd worden tussen een punt en een tweede meetkundig object (anders dan een punt), zoals een rechte lijn of een cirkel. In het algemeen kan dat als volgt.

Definitie. De **afstand** van een punt X tot een meetkundig object $\mathcal{F}$ is (de lengte r van) de straal van de *kleinste cirkel* met middelpunt X die *ten minste één punt* met $\mathcal{F}$ gemeenschappelijk heeft. Ligt X op $\mathcal{F}$, dan is $d(X, \mathcal{F}) = 0$.

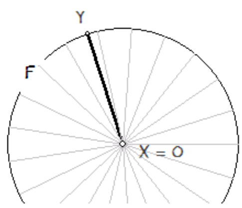


figuur 3a

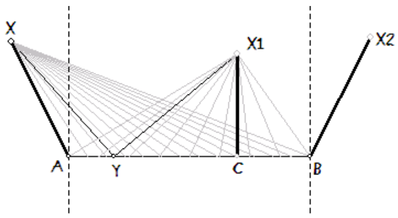
Voorbeelden. Zie figuur 3a, waarin XA de afstand is van X tot het punt A. Inderdaad is XA de straal van de kleinste cirkel (namelijk de enige) met middelpunt X die door A gaat.

XB is de afstand van X tot de rechte lijn l. Het punt B is daarbij het voetpunt van de loodlijn uit X op l. De cirkel (X, XB) raakt aan de lijn l.

XC is de afstand van X tot de cirkel $\mathcal{F}$ met middelpunt O. Het punt C is één van de snijpunten van de middellijn van $\mathcal{F}$ die door X gaat (namelijk het snijpunt dat het dichtst bij X ligt). De cirkel (X, XC) raakt in C – in dit geval *uitwendig* – aan de cirkel $\mathcal{F}$.
De afstand van het middelpunt O van de cirkel $\mathcal{F}$ tot de cirkel zelf is volgens de definitie de straal van de cirkel, immers een kleinere of een grotere cirkel met middelpunt O heeft geen enkel punt met $\mathcal{F}$ gemeenschappelijk.



figuur 3b



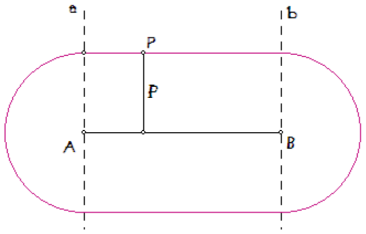
figuur 3c

Een alternatieve manier voor het vinden van $d(X, \mathcal{F})$ is de volgende.
Zie figuur 3b, waarin $\mathcal{F}$ een cirkel is en ***figuur 3c***, waarin $\mathcal{F}$ het lijnstuk AB is).

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Is Y een punt van $\mathcal{F}$, dan is $d(X, \mathcal{F}) = min(XY)$, waarbij *min* de functie is die de *kleinste waarde* van de lengte van het lijnstuk XY geeft, als Y de figuur $\mathcal{F}$ doorloopt.

Uit figuur 3c blijkt nu dat $d(X, AB) = XA$ als X gelegen is in het halfvlak (met als grenslijn de loodlijn in A op AB) waarin B niet ligt. Voorts is $d(X_1, AB) = X_1C$ waarbij C de projectie is van X_1 op AB die ligt tussen A en B, en $d(X_2, AB) = X_2B$ als X_2 gelegen is in het halfvlak (met als grenslijn de loodlijn in B op AB), waarin A niet ligt. ◊



figuur 4

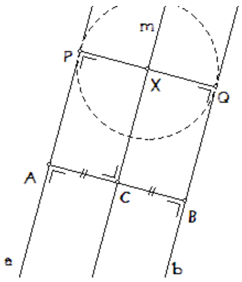
Is de afstand p van een punt P tot een lijnstuk AB gegeven (***zie figuur 4***), dan bestaat de meetkundige plaats van de punten X met $d(X, AB) = p$ dus uit *twee lijnstukken*, elk op een afstand p van AB én *twee halve cirkels* met middelpunten A en B en straal p. ◊

Omdat een conflictlijn een meetkundige plaats is, moet een bewijs daarbij altijd bestaan uit *twee* delen:

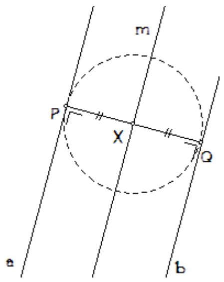
1. elk punt van de conflictlijn moet de genoemde eigenschap hebben, dus gelijke afstanden tot de beide figuren;
2. elk punt dat de genoemde eigenschap heeft, moet op de conflictlijn liggen.

Stelling 2. *De conflictlijn van twee evenwijdige lijnen is de* ***middenparallel*** *van die lijnen.*

Opmerking. De *middenparallel* van twee evenwijdige lijnen is de middelloodlijn van een *gemeenschappelijk loodlijnstuk* [2] van die lijnen.



figuur 5a



figuur 5b

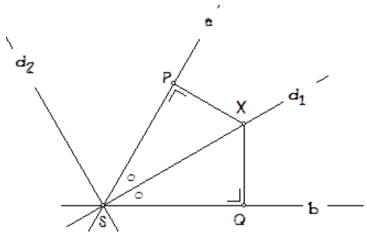
Bewijs, 1e deel. Het lijnstuk AB is een gemeenschappelijk loodlijnstuk van de evenwijdige lijnen a en b; ***zie figuur 5a.***
m is de middenparallel van die lijnen, waarop een willekeurig punt X gekozen is.
We moeten nu aantonen dat $d(X, a) = d(X, b)$.

P en Q zijn opvolgend de projecties van X op de lijnen a en b, zodat $d(X, a) = XP$ en $d(X, b) = XQ$. Dus, te bewijzen: $XP = XQ$.
Nu is vierhoek $ACXP$ een rechthoek, zodat $AC = XP$. Ook vierhoek $BCXQ$ is een rechthoek, zodat $BC = XQ$.
Uit $AC = BC$ volgt dan direct: $XP = XQ$.
2e deel. Is X een (willekeurig) punt waarvoor geldt dat $d(X, a) = XP$ en $d(X, b) = XQ$ én $XP = XQ$, dan moet aangetoond worden dat X op de middenparallel van de lijnen a en b ligt; ***zie figuur 5b.***
Omdat XP in P loodrecht staat op a, is de lijn a raaklijn aan de cirkel (X, XP); en zo is de lijn b raaklijn aan de cirkel (X, XQ). Omdat $XP = XQ$ is, vallen deze cirkels samen, en is PQ een middellijn van die cirkel.
PQ is daarmee een gemeenschappelijk loodlijnstuk van de lijnen a en b, waarvan X het midden is. De loodlijn m in X op PQ is nu de middenparallel van a en b. En het punt X ligt daar dus op.

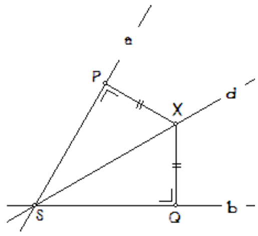
 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Stelling 3. *De conflictlijn van twee elkaar snijdende rechte lijnen is het* ***bissectricepaar*** *van die lijnen.*

Opmerking. Het *bissectricepaar* van twee elkaar in S snijdende rechte lijnen a en b bestaat uit de bissectrices d_1 en d_2 van de hoeken die a en b met elkaar maken. ◊



figuur 6a

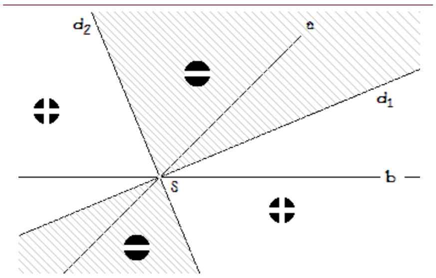


figuur 6b

Bewijs, 1e deel. Het punt X ligt op één van de bissectrices; ***zie figuur 6a***.
Zijn P en Q opvolgend de projecties van X op a en b, dan zijn de driehoeken XPS en XQS congruent (*ZHH*). Daaruit volgt dan: $XP = XQ$.

De afstand van X tot de lijn a is dus gelijk aan de afstand van X tot de lijn b.
2e deel. Is X een punt met $d(X, a) = d(X, b)$, dan zijn ook in dit geval de driehoeken XPS en XQS congruent (*ZZR*); ***zie figuur 6b***. Daaruit volgt dan dat $\angle XSP = \angle XSQ$. De lijn $d \equiv XS$ is dan een bissectrice van hoek S. Met andere woorden: X is een punt van het bissectricepaar. ◊

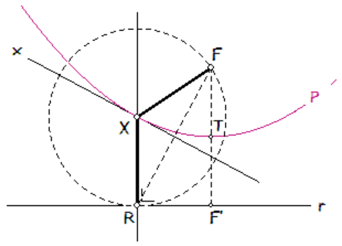
Opmerking. Ook hier, en zie daarvoor ***figuur 6c***, wordt het platte vlak verdeeld in drie delen:



figuur 6c

- het vlakdeel waarin voor de punten X geldt $d(\underline{X}, a) < d(X, b)$: het gearceerde vlakdeel (**-**);
- de punten waarvoor $d(X, a) = d(X, b)$: het bissectricepaar d_1 en d_2;
- het vlakdeel waarin voor de punten X geldt $d(X, a) > d(X, b)$: het niet-gearceerde vlakdeel (**+**).

Punt en rechte lijn | Parabool – Voor de constructie van de conflictlijn van een punt en een rechte lijn geven we een existentie-bewijs door middel van constructie.
Is F het gegeven punt en r de gegeven lijn, dan zoeken we dus de punten X waarvoor:
$XF= d(X, r) = XR$
waarbij R het raakpunt is van de cirkel (X, XF) met de lijn r; ***zie figuur 7a***.



figuur 7a

Omdat $XF = XR$ is, ligt het punt X op de middelloodlijn x van het lijnstuk FR.
Bij gegeven punt R (op r) is het punt X dus te construeren als snijpunt van x met de loodlijn in R op r.
De meetkundige plaats van het punt X wordt dan bepaald door de ligging van R op r (R is het 'sturende' punt van die meetkundige plaats).

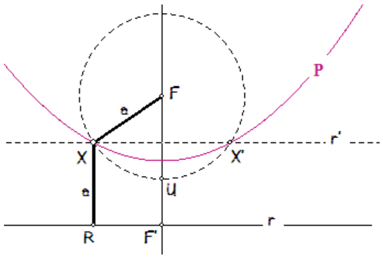
De conflictlijn $\mathcal{P}$ van het punt F en de lijn r heet **parabool**. Dan is – en dat is inderdaad *per definitie*:

Definitie. Een **parabool** is de meetkundige plaats van de punten X die *gelijke* afstand hebben tot een gegeven punt F (het **brandpunt**) en een gegeven rechte lijn r (de **richtlijn**). In formule: $XF = d(X, r)$.

Opmerkingen

I. Het midden T van het lijnstuk FF' waarbij F' de projectie is van F op de lijn r, heet de **top** van de parabool.

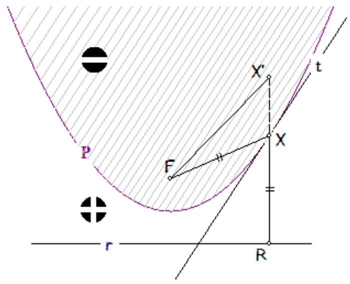
II. Een tweede methode om een parabool voort te brengen op basis van het gegeven punt F en de gegeven lijn r is de volgende; ***zie figuur 7b***.



figuur 7b

Een cirkel met middelpunt F en met *variabele* straal a snijdt de lijn r' die op afstand a evenwijdig is met r, in de punten X en X'. De meetkundige plaats van de punten X (en X') is dan de conflictlijn van F en r.

III. Ook hier wordt het platte vlak door de conflictlijn $\mathcal{P}$ (de parabool) verdeeld in drie delen in elk waarvan de afstandseigenschap een verschillende gedaante heeft.
Per definitie geldt voor een punt X dat op de parabool ligt, dat $XF = d(X, r)$.



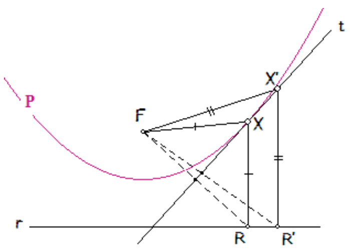
figuur 7c

Voor een punt X' dat 'binnen' de parabool ligt, geldt:
$X'F < d(X', r)$
Zie het gearceerde vlakdeel (**-**) ***in figuur 7c***.
Immers, zij R de projectie van X' op r en is X het snijpunt van $X'R$ met $\mathcal{P}$, dan is inderdaad:
$X'F < X'R$

Dat $X'F < X'R$ is, kunnen we concluderen uit de ligging van het punt X' ten opzichte van de conflictlijn t (de middelloodlijn van FR) van de punten F en R; zie het Gevolg van Stelling 1.

Voor de punten X' die liggen 'buiten' de parabool, dus in het niet-gearceerde vlakdeel (**+**), geldt:
$X'F > d(X', r)$

IV. De lijn t (de middelloodlijn van FR) raakt in het punt X aan $\mathcal{P}$.

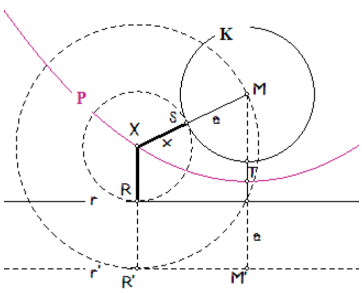


figuur 7d

Immers, stel dat t een *tweede* punt X' met $\mathcal{P}$ gemeenschappelijk heeft; ***zie figuur 7d***.
Met R' als projectie van X' op r geldt dan: $X'F = X'R'$.
De lijn t is dan ook middelloodlijn van het lijnstuk FR' en staat dan loodrecht op twee elkaar in F snijdende lijnen. En dat is onmogelijk!
Dus is X het enige gemeenschappelijke punt van t en $\mathcal{P}$.

Cirkel en rechte lijn | Parabool – De conflictlijn van een cirkel en een rechte lijn kan eenvoudig op basis van het voorgaande worden gevonden.
Is $\mathcal{K}$ de cirkel met middelpunt M en straal a, en is r de gegeven rechte lijn.
We zoeken nu de punten X waarvoor $d(X, \mathcal{K}) = d(X, r) = x$ (x is variabel).
X is dus het middelpunt van de cirkel (met straal x) die raakt aan $\mathcal{K}$ (in het punt S) én aan de lijn r (in het punt R); ***zie figuur 8***.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur 8

De cirkel met middelpunt X en straal $(x + a)$ gaat dan door M en raakt aan de lijn r' die evenwijdig is met r en op een afstand a van r ligt.
Het punt X ligt daarmee op de parabool $\mathcal{P}$ die de conflictlijn is van M en r'.

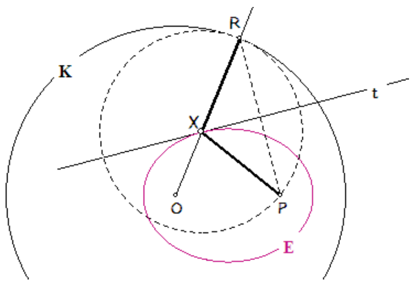
De parabool $\mathcal{P}$ is daarmee ook de conflictlijn van $\mathcal{K}$ en r.

Punt en cirkel | Ellips en hyperbool – Voor het onderzoek naar de conflictlijn van een gegeven punt P en een cirkel $\mathcal{K}$ onderscheiden we twee gevallen:

1. P ligt *binnen* $\mathcal{K}$ en is *niet* samenvallend met het middelpunt van $\mathcal{K}$;
2. P ligt *buiten* $\mathcal{K}$.

In beide gevallen geven we een existentie-bewijs door middel van constructie.

Ad 1. We zoeken de punten X waarvoor $XP = d(X, \mathcal{K})$. Die punten zijn middelpunten van cirkels die door P gaan én raken aan $\mathcal{K}$ (in het punt R). Daaruit volgt dat zo'n punt X gelegen moet zijn *binnen* $\mathcal{K}$; ***zie figuur 9a***. De raking aan $\mathcal{K}$ is dus *inwendig*.



figuur 9a

O is het middelpunt van $\mathcal{K}$; de straal er van is gelijk aan a.
Voor X geldt dus: $XP = XR$, zodat X ligt op de middelloodlijn t van het lijnstuk PR. Maar X ligt ook op de (halve) lijn OR. Dus [3]:
$X = t \,\&\, OR$
De meetkundige plaats $\mathcal{E}$ van de punten X wordt dan gevonden door een willekeurig punt R van $\mathcal{K}$ op te vatten als 'sturend' punt van de meetkundige plaats.

De conflictlijn $\mathcal{E}$ van het punt P en de cirkel $\mathcal{K}$ heet **ellips**.
De punten P en O worden meestal aangegeven met F_1 en F_2; het zijn de **brandpunten** van de ellips.
De cirkel $\mathcal{K}$ is de **richtcirkel** van $\mathcal{E}$.

Stelling 4. *Voor elk punt X van $\mathcal{E}$ geldt:*
$XF_1 + XF_2 = a$
waarbij a de straal is van de richtcirkel van $\mathcal{E}$.

Bewijs. Nu is (***zie figuur 9a***): $XF_1 + XF_2 = XP + XO = XR + XO = a$ ◊

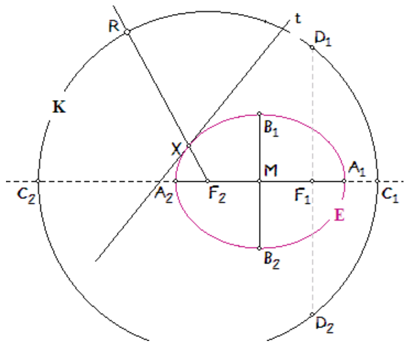
Daarom is – ook hier *per definitie*:

Definitie. Een **ellips** is de meetkundige plaats van de punten X waarvoor geldt dat de *som* van de afstanden van X tot twee vaste punten F_1 en F_2 constant (gelijk aan a) is.
In formule: $XF_1 + XF_2 = a$

Opmerkingen
I. Bijzondere punten van een ellips zijn de zogenoemde **toppen**; ***zie figuur 9b***.

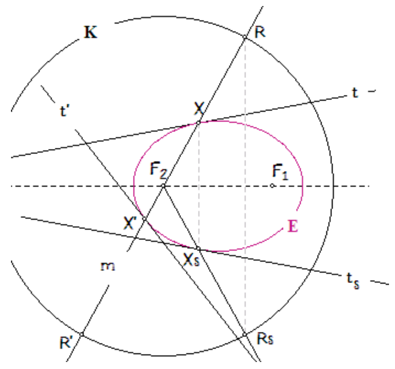
 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Als het punt R samenvalt met één van de eindpunten C_1, C_2 van de middellijn F_1F_2 van $\mathcal{K}$, dan vinden we op $\mathcal{E}$ de punten A_1, A_2 als **toppen**: A_1 is het midden van F_1C_1, A_2 is het midden van F_1C_2.



figuur 9b

Valt R samen met één van de snijpunten D_1, D_2 van de loodlijn in F_1 op F_1F_2, dan is de middelloodlijn van F_1D_j (j = 1, 2) evenwijdig met de lijn F_1F_2. De bijbehorende punten van $\mathcal{E}$ zijn dan de toppen B_1, B_2.
Het lijnstuk A_1A_2 is de **hoofdas** van de ellips; het lijnstuk B_1B_2 is de **nevenas**. De brandpunten van een ellips liggen altijd op de hoofdas.
Het punt $M = A_1A_2$ & B_1B_2 is het **middelpunt** van de ellips.
Omdat B_1B_2 // D_1D_2 staan de hoofdas en de nevenas loodrecht op elkaar.

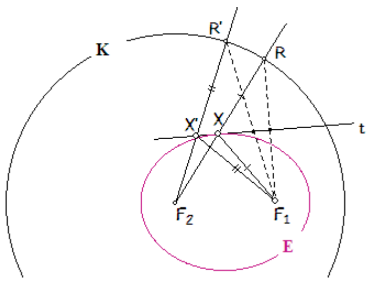


figuur 9c

II. Elke middellijn $m \equiv RR'$ van $\mathcal{K}$ bepaalt twee punten van $\mathcal{E}$: X en X'. ***Zie figuur 9c***, waarin X' het snijpunt is van de halve lijn F_2R' en de middelloodlijn t' van F_1R'.

De symmetrie van de ellips $\mathcal{E}$ in de hoofdas ontstaat door de symmetrie van de cirkel $\mathcal{K}$ in de lijn F_1F_2.
Het punt X_s van $\mathcal{E}$ is het snijpunt van de halve lijn F_2R_s en de middelloodlijn t_s van F_1R_s, waarbij R_s het spiegelbeeld is van R in de lijn F_1F_2.

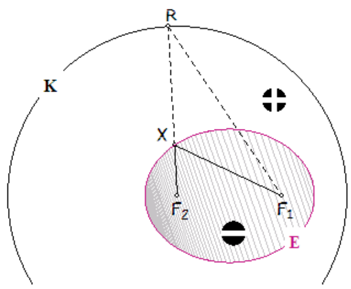
III. De middelloodlijn t van F_1R raakt in X aan $\mathcal{E}$.



figuur 9d

Immers, stel dat t een tweede punt X' met $\mathcal{E}$ gemeenschappelijk heeft, met het daarbij behorende punt R' op $\mathcal{K}$.
t is dan ook middelloodlijn van het lijnstuk F_1R'.
Maar dan staat t loodrecht op de twee elkaar in F_2 snijdende lijnen F_1R en F_1R', hetgeen onmogelijk is.
Het punt X is dus het enige gemeenschappelijk punt van t en $\mathcal{E}$.

IV. Op basis van de definitieformule van de ellips schrijven we $A(X) = XF_1 + XF_2 - a$.
De waarde van de functie A is afhankelijk van de ligging van het punt X in het vlak.

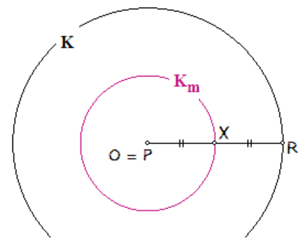


figuur 9e

Ligt X op $\mathcal{E}$ dan is $A(X) = 0$; ligt X binnen de ellips dan is $A(X) < 0$, het gearceerde vlakdeel (**-**), en ligt X buiten de ellips dan is $A(X) > 0$, het niet-gearceerde vlakdeel (**+**).

Ook hier wordt het vlak door de conflictlijn van F_1 en $\mathcal{K}$ verdeeld in drie delen.

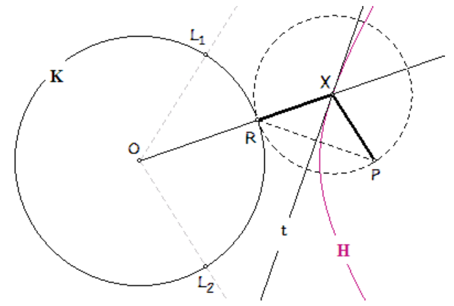
 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur 9f

V. Valt het punt P ($\equiv F_1$) samen met het punt O ($\equiv F_2$), dan 'ontaardt' de ellips in een *cirkel* $\mathcal{K}_m$ met middelpunt O, waarvan de straal gelijk is aan ½*a*.
Ook hier is dan:
$XF_1 + XF_2 = XP + XO = ½a + ½a = a$

Ad 2. In dit geval ligt P dus *buiten* de cirkel $\mathcal{K}$.
We zoeken ook nu de punten X waarvoor $XP = d(X, \mathcal{K})$. Die punten zijn middelpunten van cirkels die door P gaan én raken aan $\mathcal{K}$ (in het punt R).

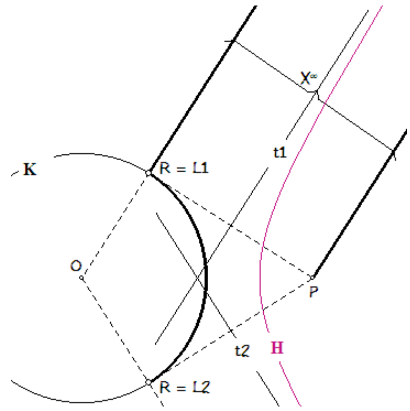


figuur 10a

Hier liggen de punten X dus *buiten* $\mathcal{K}$; de raking in R is *uitwendig*.

In figuur 10a is een en ander in beeld gebracht.
Wegens $XP = XR$ ligt X op de middelloodlijn t van het lijnstuk PR.
X ligt ook op de *halve* lijn OR. En dan is:
$X = t$ & OR

De meetkundige plaats $\mathcal{H}$ van de punten X, de conflictlijn van P en $\mathcal{K}$, wordt dan gevonden door een punt R van $\mathcal{K}$ op te vatten als 'sturend' punt van de meetkundige plaats.



figuur 10b

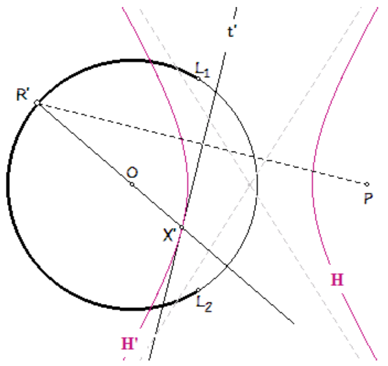
Er zijn twee posities van het punt R op $\mathcal{K}$ waarbij de lijn OR evenwijdig is met de middelloodlijn van PR: de punten L_1 en L_2; ***zie figuur 10b***.
De punten L_1 en L_2 zijn de raakpunten van de raaklijnen uit P aan $\mathcal{K}$.
Voor de conflictlijn $\mathcal{H}$ moeten de punten R liggen op de (kleine) boog L_1L_2 van $\mathcal{K}$.
Valt R samen met L_1 of L_2 dan is het punt X het *oneigenlijk* snijpunt van de bijbehorende lijnen OR en middelloodlijnen t (t_1 en t_2).

De lijnen t_1 en t_2 zijn in dit geval **asymptoten** van de conflictlijn $\mathcal{H}$.

Nb. Ligt R op de 'grote' boog L_1L_2 van $\mathcal{K}$, dan snijdt de halve lijn OR de middelloodlijn t van PR *niet*.

De conflictlijn $\mathcal{H}$ van het punt P en de cirkel $\mathcal{K}$ is een **tak** van een **hyperbool** (hyperbooltak).

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur 10c

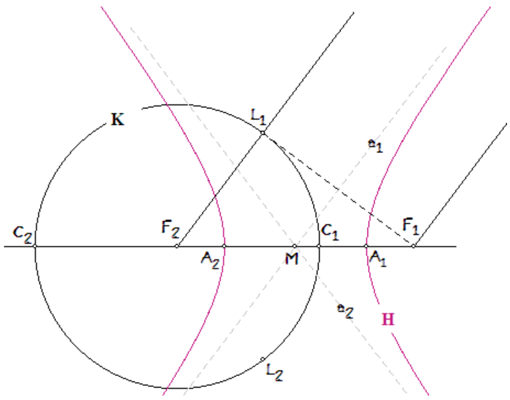
Een hyperbool bestaat uit *twee* takken.
De tweede tak, $\mathcal{H}'$, kan gevonden worden door een punt R' als 'sturend' punt te kiezen op de 'grote' boog L_1L_2 van $\mathcal{K}$ en vervolgens de halve lijn $R'O$ te snijden met de middelloodlijn t' van PR'; ***zie figuur 10c***.

De hyperbool zelf bestaat dan uit de takken $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}'$.

In hetgeen volgt geven we het paar hyperbooltakken ($\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$) meestal aan met $\mathcal{H}$.

De punten P en O worden meestal aangegeven met F_1 en F_2; het zijn de **brandpunten** van $\mathcal{H}$.
De cirkel $\mathcal{K}$ is de **richtcirkel** van $\mathcal{H}$.

Opmerkingen
I. Bijzondere punten van een hyperbool zijn de **toppen**.



figuur 10d

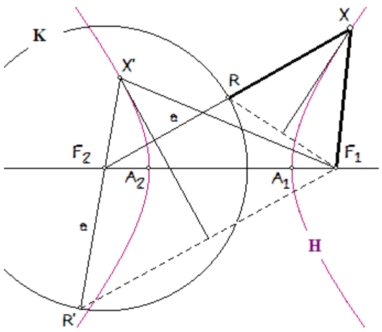
Als het punt R (van $\mathcal{K}$) samenvalt met één van de eindpunten C_1, C_2 van de middellijn F_1F_2 van $\mathcal{K}$, dan vinden we op $\mathcal{H}$ de punten A_1, A_2 als **toppen**: A_1 is het midden van F_1C_1, A_2 is het midden van F_1C_2.

Valt het punt R samen met L_1, dan is de middelloodlijn a_1 van F_1L_1 een asymptoot van $\mathcal{H}$.
De lijn a_1 gaat daarom ook door het midden M van het lijnstuk F_1F_2 (*stelling van de middenparallel* in driehoek $F_1L_1F_2$).
Hetzelfde geldt ook voor de asymptoot a_2.

Het punt M (= a_1 & a_2) is het **middelpunt** van de hyperbool. M is ook het midden van het lijnstuk A_1A_2, de **hoofdas** van $\mathcal{H}$.
Omdat $\mathcal{K}$ lijnsymmetrisch is in de lijn F_1F_2, is ook $\mathcal{H}$ lijnsymmetrisch in die lijn.

II. Analoog aan Opmerking III bij de ellips kan worden bewezen dat de middelloodlijn van F_1R in X raakt aan $\mathcal{H}$. ◊

Stelling 5. *Voor elk punt X van* $\mathcal{H}$ *geldt*:
$|XF_1 - XF_2| = a$
waarbij a de straal is van de richtcirkel van $\mathcal{H}$.



figuur 10e

Bewijs. Ligt X op de rechter tak van $\mathcal{H}$, dan is:
$| XF_1 - XF_2 | = | XR - XF_2 | = | -a | = a$
Zie de constructies hierboven.

Ligt X' op de linker tak van $\mathcal{H}$, dan is:
$| XF_1 - XF_2 | = | XR' - XF_2 | = | a | = a$ ◊

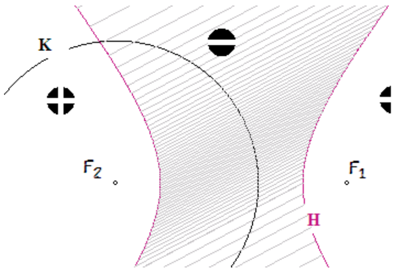
Opmerking. De lengte van de hoofdas, A_1A_2, is dus eveneens gelijk aan a. Immers, wegens $A_1F_1 = A_2F_2$, is:

$$A_1A_2 = A_1F_2 - A_2F_2 = (A_1F_2 - A_1F_1) + A_1F_1 - A_2F_2 = a \lozenge$$

Vanwege de eigenschap in Stelling 4 wordt een hyperbool als volgt gedefinieerd:

Definitie. Een **hyperbool** is de meetkundige plaats van de punten X waarvan voor het *verschil* van de afstanden van X tot twee vaste punten F_1 en F_2 geldt:
$| XF_1 - XF_2 | = a$
waarbij a een constante is.

Opmerking. Op basis van de definitieformule van de hyperbool schrijven we de functie A als:
$A(X) = | XF_1 - XF_2 | - a$
De functiewaarden van A zijn afhankelijk van de ligging van het punt X in het vlak.



figuur 10f

Ligt X op $\mathcal{H}$ dan is $A(X) = 0$; ligt X binnen de hyperbool dan is $A(X) > 0$, het niet-gearceerde vlakdeel (**+**), en ligt X buiten de hyperbool dan is $A(X) > 0$, het gearceerde vlakdeel (**-**).

Het wordt vlak door de hyperbool die bepaald is door F_1 en $\mathcal{K}$, dus verdeeld in drie delen.

Cirkel en cirkel | Hyperbool en ellips – We gaan uit van de in ligging gegeven cirkels $\mathcal{K}_a \equiv (A, a)$ en $\mathcal{K}_b \equiv (B, b)$ waarbij we veronderstellen dat $b > a$. Daarbij doen we de algemene geldigheid in hetgeen volgt geen geweld aan (behoudens enkele hierna, onder punt D, te behandelen bijzondere gevallen).

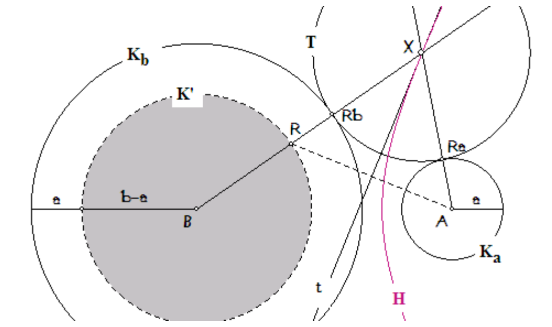
Een punt X van de conflictlijn van die cirkels moet voldoen aan $d(X, \mathcal{K}_a) = d(X, \mathcal{K}_b)$. Zo'n punt X is dan het middelpunt van een cirkel $\mathcal{T}$ die aan de gegeven cirkels raakt.

We bekijken nu verschillende posities van $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ ten opzichte van elkaar (zie de hierna volgende gevallen A, B, C en D).

A.

Ligt $\mathcal{K}_a$ geheel *buiten* $\mathcal{K}_b$, dan kan er alleen sprake zijn van een cirkel $\mathcal{T}$ die *uitwendig* raakt aan $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$; *zie figuur 11a.*

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur 11a

Is nu $\mathcal{K}'$ de cirkel $(B,\ b - a)$. Voor het punt X geldt dan ook:

$XA = d(X,\ \mathcal{K}') = XR$

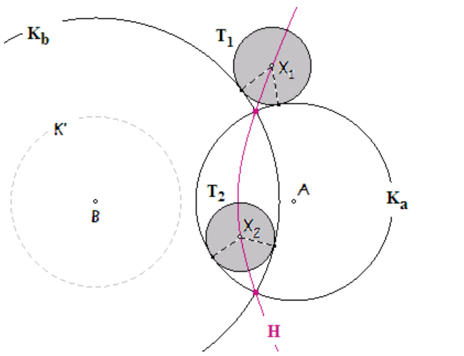
met R op $\mathcal{K}'$ en $X = t$ & BR.

X ligt dus op de conflictlijn van A en $\mathcal{K}'$.

Dus, volgens het bovenstaande (*Punt en cirkel*, 2): de conflictlijn van de cirkels $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ is de conflictlijn $\mathcal{H}$ van A en $\mathcal{K}'$.

$\mathcal{H}$ is dus een tak van de hyperbool die bepaald wordt door het punt A en de richtcirkel $\mathcal{K}'$ (A en B zijn de brandpunten van die hyperbool).

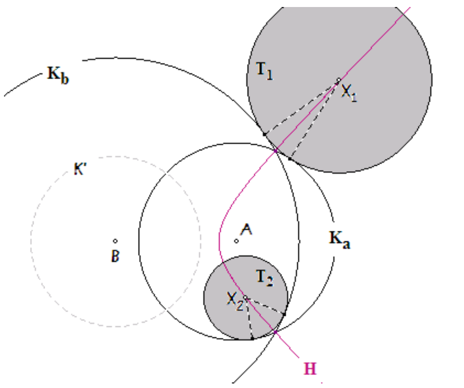
B.



figuur 11b

Ligt een deel van $\mathcal{H}$ binnen $\mathcal{K}_b$ (en dus ook binnen $\mathcal{K}_a$), dan kan er ook *inwendige raking* zijn van $\mathcal{T}$ aan beide cirkels; zie de cirkel $\mathcal{T}_2$ (middelpunt X_2) ***in figuur 11b***.

Merk tevens op dat de snijpunten van $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ dan (natuurlijk) op $\mathcal{H}$ liggen.

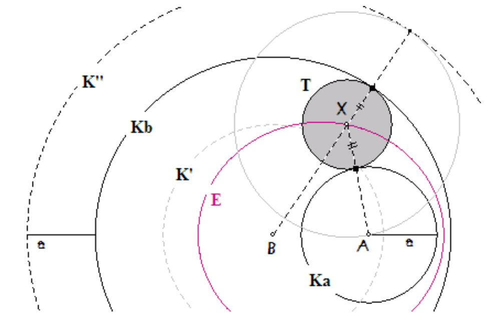


figuur 11c

Dit laatste geldt ook als de cirkel $\mathcal{K}_a$ zo gelegen is dat het middelpunt A daarvan *buiten* de cirkel $\mathcal{K}'$ en *binnen* $\mathcal{K}_b$ gelegen is (de lezer ga dit ***via figuur 11c*** na!).

C.

Ligt de cirkel $\mathcal{K}_a$ geheel *binnen* de cirkel $\mathcal{K}_b$ (het punt A ligt in dit geval binnen de cirkel $\mathcal{K}'$), dan kan de cirkel $\mathcal{T}$ die het punt X als middelpunt heeft en een straal gelijk aan $d(X,\ \mathcal{K}_a) = d(X,\ \mathcal{K}_b)$ alleen *uitwendig* raken aan $\mathcal{K}_a$ en *inwendig* aan $\mathcal{K}_b$; ***zie figuur 11d***.



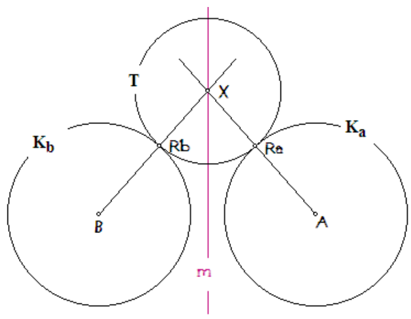
figuur 11d

Hebben $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ opvolgend weer de stralen a en b, dan volgt uit:
$d(X, \mathcal{K}_a) = d(X, \mathcal{K}_b) = x$
dat:
$XA = x + a$ en $XB = b - x$
Zodat:
$XA + XB = a + b$

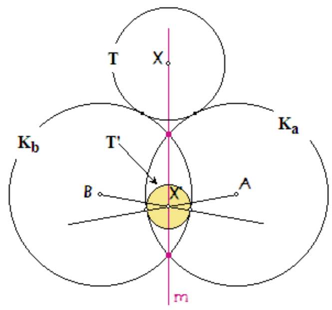
De conflictlijn van de cirkels $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ is dan in dit geval de ellips $\mathcal{E}$ (met brandpunten A en B) waarvan de richtcirkel de cirkel $\mathcal{K}''$ is met middelpunt B en straal $(a + b)$.

D.

Bijzondere gevallen – Geldt voor $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ dat $a = b$, en is daarbij $A \neq B$, dan ontaardt de conflictlijn van beide cirkels (het was een hyperbooltak; zie B hierboven) in een rechte lijn, de *middelloodlijn* van het lijnstuk AB; ***zie figuur 12a*** en ***figuur 12b***.

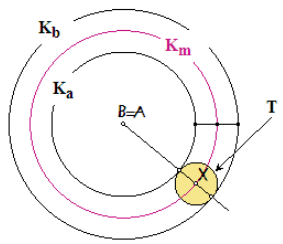


figuur 12a



figuur 12b

Zoals ***in figuur 12b*** blijkt, is er sprake van uitwendige óf inwendige raking van de cirkel $\mathcal{T}$ (met middelpunt X) indien $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ elkaar snijden.



figuur 12c

Hebben $\mathcal{K}_a$ en $\mathcal{K}_b$ hetzelfde middelpunt, en is ook nu $b > a$, dan 'ontaardt' de conflictlijn (het was een ellips; zie C hierboven) in een met beide cirkels *concentrische cirkel* $\mathcal{K}_m$ waarvan de straal gelijk is aan ½$(b - a)$; ***zie figuur 12c***.

Gebieden

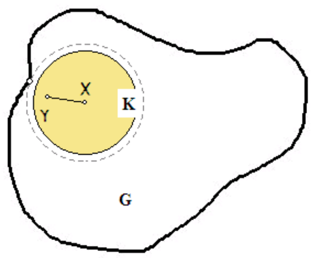
Definitie. Een punt Y ligt **binnen** een cirkel $\mathcal{K} \equiv (X, r)$ indien $XY < r$.

We zullen met behulp van deze (gebruikelijke) definitie afspreken wat we verstaan onder een *gebied*.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

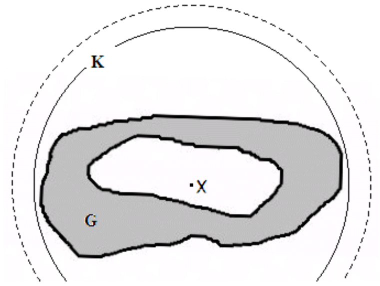
Definitie. Een **gebied** $\mathcal{G}$ is een verzameling punten X in het euclidische vlak waarvoor geldt dat er een cirkel $\mathcal{K} \equiv (X, \varepsilon)$ bestaat waarvan voor *alle* punten Y *binnen die cirkel* geldt dat Y ook tot $\mathcal{G}$ behoort.

In figuur 13a is deze definitie in beeld gebracht. De straal ε van $\mathcal{K}$ is *maximaal* gelijk aan de afstand van X tot de 'grenslijn' van $\mathcal{G}$.
We zeggen ook wel dat het punt X daarmee *binnen* $\mathcal{G}$ ligt.



figuur 13a

Opmerking. Een punt X ligt dus (volgens bovenstaande definitie) *buiten* een gebied $\mathcal{G}$, als er *geen* cirkel bestaat met X als middelpunt waarvan alle punten binnen die cirkel ook binnen $\mathcal{G}$ liggen.



figuur 13b

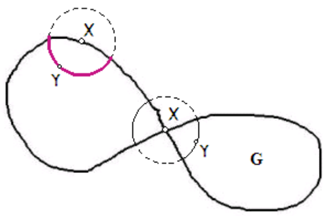
Evenwel, bekijken we een gebied met daarin een 'gat', zoals ***in figuur 13b***, dan moet er een kanttekening bij deze opmerking worden gemaakt.
Immers, alle punten van $\mathcal{G}$ (het grijze vlakdeel) liggen binnen de cirkel $\mathcal{K}$ (middelpunt X), maar het punt X (en alle punten van het door $\mathcal{G}$ ingesloten gebied) behoren *niet* tot $\mathcal{G}$.

We geven voor dit type gebieden geen aanvullende definitie. We laten het feit of een punt X binnen of buiten zo'n gebied ligt, afhangen van de context van het probleem ('we kijken dus "gewoon" naar het plaatje').

Maar uiteraard moet wel het begrip *grenslijn* worden gedefinieerd; ***zie figuur 13c***.

Definitie. De **grenslijn** van een gebied $\mathcal{G}$ is de verzameling van de punten X waarvoor van *elke* cirkel $\mathcal{K} \equiv (X, \varepsilon)$ die door een punt Y binnen $\mathcal{G}$ gaat, ook punten *buiten* $\mathcal{G}$ liggen.

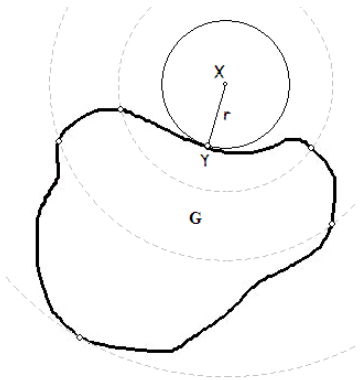
In plaats van grenslijn/grens wordt ook wel gesproken van de *rand* van een gebied.



figuur 13c

Conflictlijnen bij gebieden

Conflictlijnen bij gebieden – Met het bovenstaande hebben we nu voldoende begrippen om ook de *afstand van een punt tot een gebied* te kunnen vastleggen; ***zie figuur 14***.



figuur 14

Definitie. De **afstand** $d(X, \mathcal{G})$ tot een gebied $\mathcal{G}$ van een punt X dat *niet binnen* $\mathcal{G}$ ligt, is de (lengte van de) straal r van de kleinste cirkel die ten minste één punt met de grenslijn van $\mathcal{G}$ gemeenschappelijk heeft.

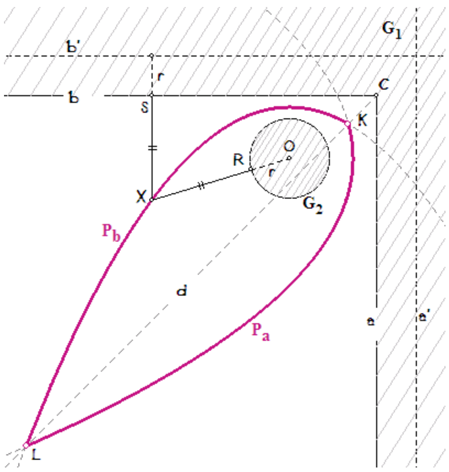
Opmerking. Uit deze definitie volgt (als we ook *puntcirkels* toelaten; dus cirkels met $r = 0$) dat voor een punt X dat op de rand van $\mathcal{G}$ ligt, geldt: $d(X, \mathcal{G}) = 0$.

Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Nu kan op basis van de laatste definitie ook de conflictlijn van twee gebieden $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ worden vastgelegd. We definiëren:

Definitie. De **conflictlijn** van twee gebieden $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ is de meetkundige plaats van de punten X waarvoor geldt: $d(X, \mathcal{G}_1) = d(X, \mathcal{G}_2)$.

Gevolg. Omdat de afstand van een punt tot een gebied gedefinieerd is als afstand van dat punt tot de grenslijn van het gebied, kunnen we voor gebieden waarvan de rand een rechte lijn of een cirkel is, de hierboven behandelde conflictlijnen (zoals middelloodlijn, ellips, hyperbool) gebruiken om de conflictlijn tussen die gebieden te vinden.



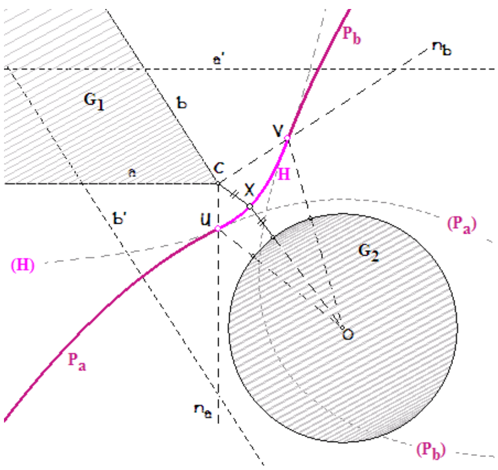
figuur 15a

Voorbeeld. ***Zie figuur 15a.***
De randen van het gebied $\mathcal{G}_1$ zijn de elkaar in het punt C loodrecht snijdende halve lijnen a en b.
Het gebied $\mathcal{G}_2$ is een *cirkelschijf*[4] met straal r en middelpunt O.
Beide gebieden zijn in de figuur gearceerd.

De conflictlijn van $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ bestaat nu uit twee *paraboolbogen* $\mathcal{P}_a$ en $\mathcal{P}_b$ van parabolen die beide O als brandpunt en opvolgend de lijnen a' en b' als richtlijn hebben (a' en b' liggen op afstand r van a cq. b).
Die parabolen snijden elkaar in de punten K en L die liggen op de bissectrice d van de hoek C.

Is X een punt van bedoelde conflictlijn, dan is $d(X, \mathcal{G}_1) = d(X, \mathcal{G}_2)$: zie de punten R (op de rand van $\mathcal{G}_2$) en S (op de rand b van $\mathcal{G}_1$).

Als de hoek C tussen de halve lijnen a en b, *binnen* het gebied $\mathcal{G}_1$, scherp is, zoals ***in figuur 15b***, dan wordt de conflictlijn van $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ mede bepaald door het punt C.



figuur 15b

De randen a en b van $\mathcal{G}_1$ bepalen (via de lijnen a' en b') weer *paraboolbogen* $\mathcal{P}_a$ en $\mathcal{P}_b$, echter nu begrensd door de loodlijnen n_a en n_b in C op resp. a en b: zie de punten U en V. Voor deze punten geldt:
$UC = d(U, a) = d(U, \mathcal{G}_1) = d(U, \mathcal{G}_2)$
$VC = d(V, b) = d(V, \mathcal{G}_1) = d(V, \mathcal{G}_2)$

De conflictlijn van $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ *tussen* U en V is de *hyperboolboog* $\mathcal{H}$ – een deel van de *hyperbooltak* ($\mathcal{H}$) die de conflictlijn is van het punt C en de cirkel die de rand is van het gebied $\mathcal{G}_2$.

Voor elk punt X van de hyperboolboog $\mathcal{H}$ geldt $XC = d(X, \mathcal{G}_1) = d(X, \mathcal{G}_2)$.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Noten

[1] Hier is gebruik gemaakt van de stelling: *In een driehoek ligt de grootste hoek tegenover de grootste zijde* (*Elementen* van Euclides, I-19). Zie voor een bewijs:
Dick Klingens (1999): *Proposities I-16, I-18, I-19, I-32*. Op:
www.pandd.demon.nl/propI16.htm#I-18 (website van de auteur).

[2] Snijdt een rechte lijn twee evenwijdige rechte lijnen in de punten A en B loodrecht, dan is het lijnstuk AB een *gemeenschappelijk loodlijnstuk* van die evenwijdige lijnen.

[3] Met $X = l$ & m wordt in hetgeen volgt bedoeld: X is het snijpunt van de meetkundige objecten (lijnen) l en m.

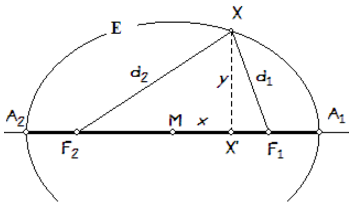
[4] Een *cirkelschijf* is de verzameling punten die liggen *binnen* een cirkel. De *rand* van die schijf is dus een cirkel. De schijf wordt dan ook bepaald door het middelpunt van die cirkel en de straal ervan.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Appendix A

A1. Voerstralen en een eigenschap

Het is gebruikelijk, ter vereenvoudiging van sommige formules, de lengte van de straal van de richtcirkel van een ellips (of een hyperbool) gelijk te stellen aan $2a$. In hetgeen volgt zullen we dat dan ook doen.



figuur a1

Uit de definitieformule van de ellips $\mathcal{E}$ volgt voor de top A_1 (dit is immers een punt van de ellips):

$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$

Wegens de symmetrie in het midden M van het lijnstuk F_1F_2 is dan (***zie figuur a1***):

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= AF_1 + F_1F_2 + \underline{F_2A_2} = AF_1 + (F_1F_2 + \underline{A_1F_1}) \\ &= AF_1 + A_1F_2 = 2a \end{aligned}$$

De lengte van de hoofdas A_1A_2 van $\mathcal{E}$ is dus ook gelijk aan $2a$.

Is X een willekeurig punt van $\mathcal{E}$ en is X' de projectie van X op de lijn A_1A_2, waarbij $MX' = x$ en $XX' = y$, dan kunnen we de lengtes d_1 en d_2 van de lijnstukken XF_1 en XF_2 – dit zijn de **voerstralen** van het punt X – uitdrukken in x en y, mits we ook aan de lengte van het lijnstuk F_1F_2 een waarde toekennen.

Nu is $\mathcal{E}$ in principe bepaald door het (gegeven) punt F_1 en de richtcirkel met het in ligging gegeven middelpunt F_2 (en straal $2a$). De afstand tussen F_1 en F_2 ligt daarmee dus eveneens vast.

Stellen we $F_1F_2 = 2c$, dan is (***zie figuur a1***):

$d_1^2 = (c-x)^2 + y^2$ en $d_2^2 = (c+x)^2 + y^2$

Gevolg. Volgens de definitieformule van $\mathcal{E}$ geldt dan:

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a$$

Door kwadrateren en herschikken vinden we:

$$\begin{aligned} (c-x)^2 + y^2 &= 4a^2 + (c+x)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Opnieuw kwadrateren leidt tot:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Stellen we $a^2 - c^2 = b^2$ (en dat kan wegens $2c < 2a$), dan is:

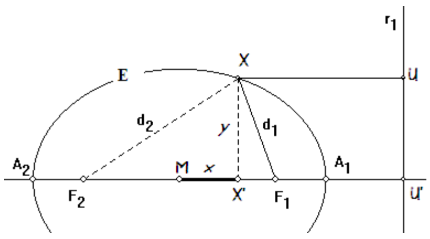
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

waarmee een eenvoudig verband is gevonden tussen de lengtes van de lijnstukken MX' (= x) en XX' (= y).

Opmerking. Brengen we een loodrecht assenstelsel aan met de lijn A_1A_2 als x-as en met de lijn in M loodrecht op A_1A_2 als y-as, dan is $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ een *vergelijking* van $\mathcal{E}$ in dit assenstelsel.

Meestal wordt die vergelijking geschreven als: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ◊

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)



figuur a2

Uit:

$d_1^2 = (c-x)^2 + y^2$ en $d_2^2 = (c+x)^2 + y^2$

volgt:

$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = -4cx$

En samen met $d_1 + d_2 = 2a$ geeft dit:

$d_1 - d_2 = -\frac{2cx}{a}$

Zodat voor de lengte van de voerstraal d_1 geldt:

$d_1 = XF_1 = a - \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}(\frac{a^2}{c} - x)$

Is nu r_1 de rechte lijn die loodrecht staat op A_1A_2 en ligt op een afstand $\frac{a^2}{c}$ van het punt M, met $U' = A_1A_2$ & r_1 (**zie figuur a2**, waarin dan $MU' = \frac{a^2}{c}$ en $d(F_1, r_1) = \frac{a^2}{c} - c$), dan is:

$d(X, r_1) = \frac{a^2}{c} - x$

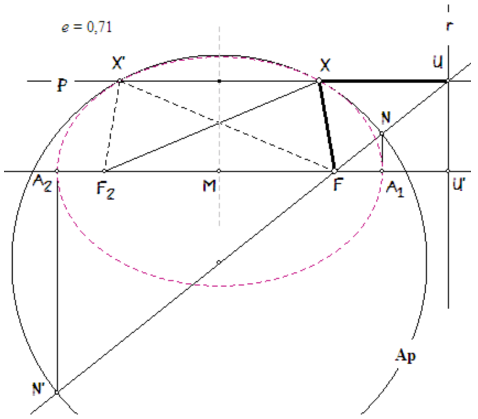
Voor alle punten X van $\mathcal{E}$ geldt dan: $\frac{XF_1}{d(X, r_1)} = \frac{c}{a}$

Met andere woorden:

Stelling A1. *Het quotiënt van de afstanden van een punt van een ellips tot een brandpunt en tot een rechte lijn die op een afstand* $\frac{a^2}{c} - c$ *ligt van dat brandpunt, is constant (en gelijk aan* $\frac{c}{a}$, met $0 < \frac{c}{a} < 1$).
a is daarbij de halve lengte van de hoofdas en c de helft van de afstand tussen de brandpunten.

Opmerking. De eigenschap van Stelling A1 wordt ook wel gebruikt als *definitie* van een ellips.
Het getal $\frac{c}{a}$ is de zogenoemde **excentriciteit** e van de ellips. Zie verder ook *Appendix C*. ◊

De in Stelling A1 genoemde eigenschap kunnen we ook wat meer meetkundig bekijken. We gaan daartoe uit van een punt F, een lijn r en een getal e (**zie figuur a3**, waarin $e = 0{,}71$).



figuur a3

We ‘zoeken’ nu de meetkundige plaats van de punten X waarvoor geldt dat: $\frac{XF}{d(X, r)} = e$.

Op de lijn door F loodrecht op r liggen in ieder geval twee van die punten: A_1 en A_2. Is (weer) $U' = A_1A_2$ & r, dan is:

$A_1F : A_1U' = e$ en $A_2F : A_2U' = e$

Het punt M is het midden van het lijnstuk A_1A_2 en het punt F_2 is het puntspiegelbeeld van F in M.

Stel nu dat X een punt is van de gezochte meetkundige plaats.

Is U de projectie van X op r (via de projecterende lijn p van X), dan geldt:

$XF : XU = e : 1$

Het punt X ligt daarmee op een cirkel $\mathcal{Ap}$ (dit is een *Apollonius-cirkel* met $k = e$)[n1] met middellijn NN' (de lijn door F en U) waarbij N en N' het lijnstuk FU *in-* en *uitwendig* verdelen in de verhouding $e : 1$.

Voor het tweede snijpunt X' van de lijn p met de cirkel $\mathcal{Ap}$ geldt (analoog; zie weer [n1]):

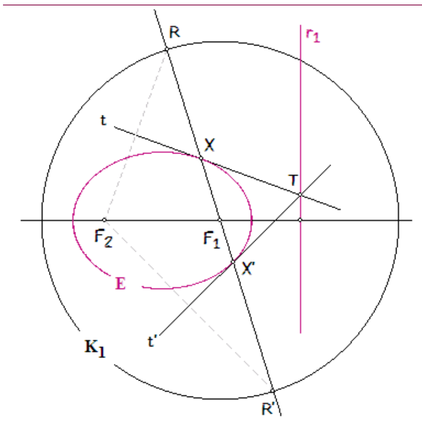
 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

$X'F : X'U = e : 1$
Uit $XF : XU = X'F : X'U = e : 1$ volgt dan ook [n2]:
$(XF + \underline{X'F}) : (XU + X'U) = e : 1$
Wegens de symmetrie in de lijn door M loodrecht op A_1A_2 is dan:
$(XF + \underline{XF_2}) : (2 \cdot MU') = e : 1$
Zodat:
$XF + XF_2 = 2e \cdot MU' =$ constant
Immers, MU' heeft een vaste lengte omdat het punt M is vastgelegd door de ligging van het punt F en de lijn r.
Met andere woorden: het punt X ligt op een ellips waarvan F en F_2 de brandpunten zijn.
En van die ellips zijn A_1 en A_2 de toppen op de hoofdas.

Opmerking. De punten A_1 en A_2 liggen op de Apollonius-cirkel van F en U' met $k = e$. Het middelpunt van die cirkel is het punt M ($\equiv$ middelpunt van de kegelsnede).

A2. Richtlijnen, poollijnen

In figuur a4 zijn X en X' punten van de ellips $\mathcal{E}$, waarvan $\mathcal{K}_1$ de richtcirkel is (middelpunt F_1, straal $2a$). Die punten worden bepaald door de punten R en R' op $\mathcal{K}_1$.
De raaklijnen t en t' in X en X' aan $\mathcal{E}$ (middelloodlijnen van opvolgend RF_2 en $R'F_2$) snijden elkaar in het punt T.
Aangetoond kan worden dat de meetkundige plaats van het punt T een rechte lijn r_1 is die loodrecht staat op de hoofdas F_1F_2 van $\mathcal{E}$; zie voor een bewijs *Appendix B*, Gevolg na Stelling B2.
De lijn r_1 is dezelfde als de lijn r ***in figuur a3*** en als de lijn die genoemd is in Stelling A1.



figuur a4

De rechte lijn r_1 is de **richtlijn** van $\mathcal{E}$ behorend bij het brandpunt F_1.

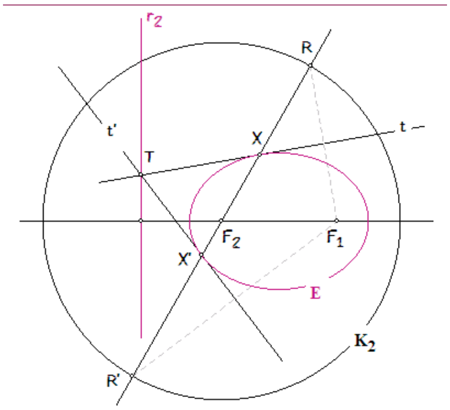
Als R de cirkel $\mathcal{K}_1$ doorloopt, dan doorloopt het punt T dus de rechte lijn r_1.
De verbindingslijn XX' van de raakpunten van de raaklijnen uit T aan $\mathcal{E}$ gaat dus (voor elk punt R van $\mathcal{K}_1$) door het brandpunt F_1 van $\mathcal{E}$.
De lijn XX' is de zogenoemde **poollijn** van het punt T bij de ellips $\mathcal{E}$.

Merk op dat de poollijn van *elk* punt T van r_1 door het punt F_2 gaat.

Op basis van hier niet vermelde overwegingen (uit de zogenoemde *pooltheorie*) is r_1 de *poollijn* van F_2 bij $\mathcal{E}$.

De symmetrie in de relatie $XF_1 + XF_2 = 2a$ (zie de ellipsdefinitie) heeft tot gevolg dat de ellips $\mathcal{E}$ ook bepaald is via het punt F_1 gelegen *binnen* de richtcirkel $\mathcal{K}_2$ met middelpunt F_2 en straal $2a$; ***zie figuur a5***.
Bij een gegeven ellips (met brandpunten F_1 en F_2) zijn er dus *twee* richtcirkels: een cirkel met middelpunt F_1 en een cirkel met middelpunt F_2. Beide cirkels hebben de straal $2a$.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

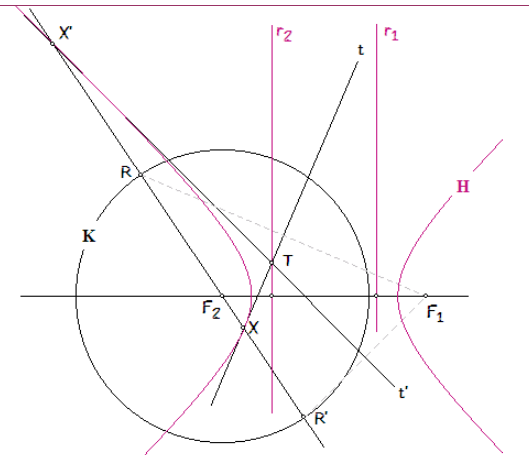


figuur a5

Ook in dit (tweede) geval ligt het snijpunt T van de raaklijnen t en t' in opvolgend X en X' aan $\mathcal{E}$ op een rechte lijn r_2 die loodrecht staat op F_1F_2.
Die lijn r_2 is de **richtlijn** van F_2 bij de ellips $\mathcal{E}$.

De lijn r_2 is de *poollijn* van F_2 bij $\mathcal{E}$; de lijn XX' is ook in dit geval de *poollijn* van het punt T bij $\mathcal{E}$.

Analoog aan hetgeen we gevonden hebben bij de ellips, kunnen we ook bij de *hyperboo*l spreken van **richtlijnen** r_1 en r_2 bij de brandpunten F_1 en F_2 van die hyperbool.
Ook deze lijnen kunnen worden bepaald als meetkundige plaatsen van de snijpunten T van de raaklijnen in X en X' aan de hyperbool $\mathcal{H}$; ***zie figuur a6***.
Ook hier zijn de punten X en X' de snijpunten van de lijn F_2R met opvolgend de middelloodlijnen van de lijnstukken F_1R en F_1R'.



figuur a6

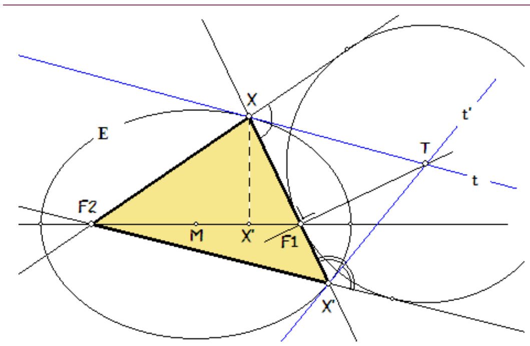
In nevenstaande figuur is $\mathcal{K}$ een richtcirkel van de hyperbool $\mathcal{H}$ (middelpunt F_2, straal a).
De tweede richtcirkel (middelpunt F_1, straal a) is niet getekend.

De richtlijnen r_1 en r_2 staan ook hier loodrecht op de hoofdas F_1F_2 van $\mathcal{H}$.

Ook in dit geval is r_1 de *poollijn* van F_1 bij $\mathcal{H}$ en is r_2 de *poollijn* van F_2 bij $\mathcal{H}$.
De lijn XX' is de *poollijn* van het punt T bij $\mathcal{H}$.

Appendix B

Enkele fraaie eigenschappen van de ellips volgen uit het hierboven behandelde.[n3]



figuur b1

Zijn t en t' de raaklijnen in de snijpunten X en X' van een lijn door F_1 en is t & $t' = T$, dan staat de lijn TF_1 in F_1 loodrecht op XX'.

We bekijken driehoek XF_2X'. Daarin is:
$XF_1 + XF_2 = 2a$ en $X'F_1 + X'F_2 = 2a$
De omtrek van die driehoek is dan $4a$, en F_1 is een punt op die omtrek dat de omtrek (tov. F_2) halveert; d.w.z. dat $[F_1XF_2] = [F_1X'F_2]$.[n4]

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

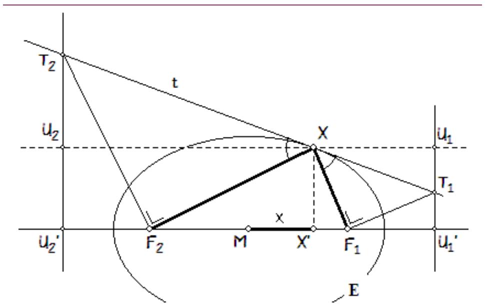
Wegens de raaklijneigenschap bij de ellips zijn t en t' bissectrices van de buitenhoeken van driehoek XF_1X', zodat T het middelpunt is van de *uitcirkel* (aangeschreven cirkel) behorend bij F_2. Deze cirkel raakt dus aan de lijn XX'.
Stel het raakpunt is G. Dan geldt, als eigenschap van dat raakpunt [n5]:
$[GXF_2] = [GX'F_2] = 2a$
Maar ook is (volgens de ellipsdefinitie):
$[F_1XF_2] = [F_1X'F_2] = 2a$
De punten F_1 en G vallen dus samen, waarmee TF_1 loodrecht staat op XX'. ◊

We hebben dus bewezen:

Stelling B1. *De verbindingslijn van een brandpunt van een ellips met het snijpunt van de raaklijnen in de eindpunten van een koorde die door dat brandpunt gaat, staat loodrecht op die koorde.*

Er geldt ook:

Stelling B2. *De loodlijnen in F_1 en F_2 op de voerstralen van een punt X van een ellips snijden de raaklijn in X in punten van de richtlijnen.*

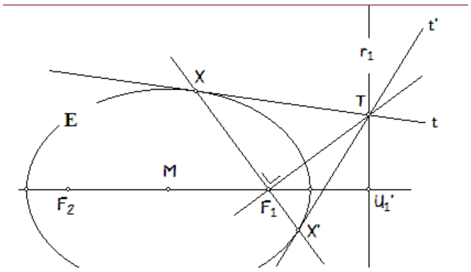


figuur b2

Bewijs. De loodlijnen op de hoofdas uit T_1 en T_2 (dat zijn de snijpunten van de raaklijn in X met de loodlijnen op de voerstralen) snijden die hoofdas in de punten U_1' en U_2'.
De raaklijneigenschap van de ellips zegt dat:
$\angle T_1XF_1 = \angle T_2XF_2$
zodat de driehoeken XF_1T_1 en XF_2T_2 gelijkvormig (*hh*) zijn. Daaruit volgt dat:

$XF_1 : XF_2 = XT_1 : XT_2$
Ook de driehoeken XT_1U_1 en XT_2U_2 zijn gelijkvormig (*hh*), waaruit volgt dat:
$XT_1 : XT_2 = XU_1 : XU_2$
Met $x = MX'$ is dan $XF_1 : XF_2 = XU_1 : XU_2 = (\frac{a^2}{c} - x) : (\frac{a^2}{c} + x)$.

Vanwege de symmetrie in M is daarmee $MU_1' = MU_2' = \frac{a^2}{c}$. De loodlijnen uit T_1 en T_2 op de hoofdas zijn dus de richtlijnen van de ellips (zie het bewijs van Stelling A1). ◊



figuur b3

Gevolg
Zie figuur b3. Doorloopt het punt X de ellips, en zijn t en t' de raaklijnen aan de ellips in X en in het tweede snijpunt X' van de lijn XF_1 (XX' is een koorde door F_1), dan ligt het snijpunt T van t en t' dus steeds op de richtlijn r_1 die behoort bij F_1.
De lijn r_1 is dus de meetkundige plaats van het punt T. ◊

Opmerking. Voor een *hyperbool* gelden overeenkomstige eigenschappen als staan in de Stellingen A1 (dan is $\frac{c}{a} > 1$), B1 en B2. Zie verder ook *Appendix C*.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

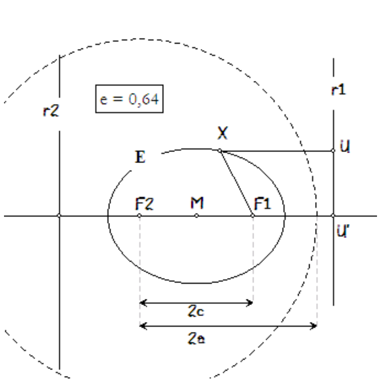
Appendix C

We hebben gezien dat de conflictlijn van een cirkel $\mathcal{K}$ (middelpunt F_2, straal $2a$) en een punt F_1 (binnen of buiten $\mathcal{K}$) een *ellips* of een *hyperbool* is.
Ook bleek dat de conflictlijn van een rechte lijn r en een punt F (niet op r) een *parabool* is. Voor alle punten X van een parabool geldt dan: $\dfrac{XF}{d(X,r)}=1$.

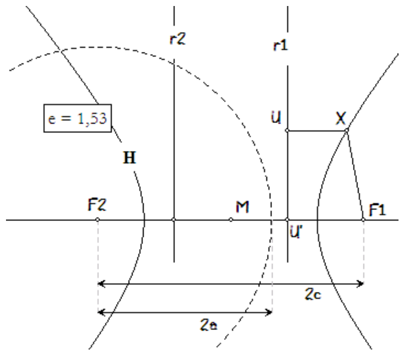
Uit Stelling A1 blijkt dat een ellips bepaald kan worden door r_1 (een richtlijn) en F_1 (een brandpunt); dus, evenals de parabool, óók door een rechte lijn en een punt. En analoog is dat het geval met een hyperbool.

Voor alle punten X van een ellips of een hyperbool geldt dan $\dfrac{XF_1}{d(X,r_1)}=\frac{c}{a}=e$, met:

bij een **ellips**: $0 < e < 1$,
bij een **hyperbool**: $e > 1$.
Het getal c is de *helft* van de afstand tussen de beide brandpunten.

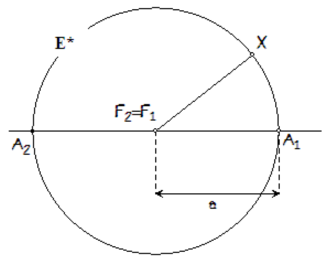


figuur c1



figuur c2

Conform het bovenstaande is dan:
bij een **parabool**: $e = 1$.



figuur c3

Uit continuïteitsoverwegingen kunnen we een cirkel $\mathcal{E}^*$ met straal a opvatten als een ellips waarvan de brandpunten samenvallen.[n6]

Omdat dán $F_1F_2 = 2c = 0$ (dus $c = 0$), geldt:
bij een **cirkel**: $e = 0$.

Opmerking. Overigens geldt ook in dit geval voor een willekeurig punt X van $\mathcal{E}^*$:
$XF_1 + XF_2 = 2a$
De rechte lijn ('richtlijn') die bij de cirkel een rol zou kunnen spelen, is de zogenoemde *oneigenlijke rechte* (de lijn 'op oneindig').
Is in het geval van een ellips het punt M het midden van F_1F_2, en is $MU'=\frac{a^2}{c}$ (zie het bewijs van Stelling 1), waarbij U' het snijpunt met de hoofdas is van een richtlijn bij een van de brandpunten, dan is inderdaad (bij vaste a): $\lim\limits_{c\downarrow 0} MU'=\lim\limits_{c\downarrow 0}\frac{a^2}{c}=\infty$. ◊

In de theorie van de kegelsneden wordt daarom een kegelsnede ook wel als volgt gedefinieerd.[n7]

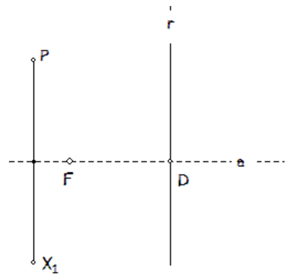
Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Definitie. Een **kegelsnede** is de meetkundige plaats van de punten X waarvan het quotiënt e van de afstanden van X tot een vast punt F en tot een gegeven rechte lijn r (daaronder ook de oneigenlijke rechte begrepen) constant is.
In formule (met X *niet* op r): $\dfrac{XF}{d(X,r)} = e$ (dus $e \geq 0$).
Is $e = 0$ dan is de kegelsnede een **cirkel**; is $0 < e < 1$ dan is de kegelsnede een **ellips**.
Als $e = 1$ spreekt men van een **parabool** en als $e > 1$ van een **hyperbool**.

Appendix D

Een constructie – Van een kegelsnede $\mathcal{K}$ zijn (in ligging) gegeven: een punt P, een brandpunt F en de bij dat brandpunt behorende richtlijn r.
Nb. Met deze gegevens ligt de excentriciteit e van $\mathcal{K}$ vast. ◊

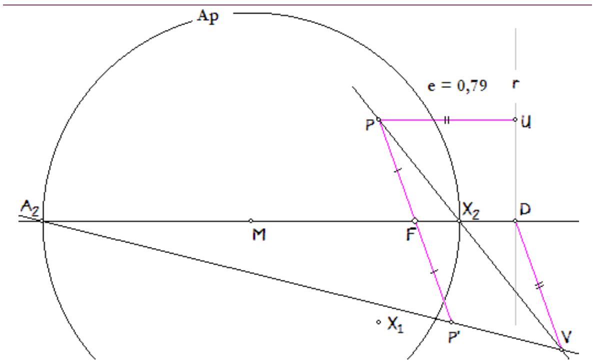
Te construeren: vier andere punten die op $\mathcal{K}$ liggen.



figuur d1

Oplossing. In nevenstaande figuur zijn bovenstaande gegevens in beeld gebracht.
De hoofdas a van de kegelsnede is de lijn door F loodrecht op r. Daarbij is $D = r \,\&\, a$.

En het *eerste* van de gezochte vier punten is dan gemakkelijk te vinden:
X_1 = (spiegelbeeld van P in a)



figuur d2

Met PU loodrecht op r en PF is de excentriciteit e van $\mathcal{K}$ bepaald:

$$e = \frac{PF}{d(P,r)} = \frac{PF}{PU}$$

Op de hoofdas van $\mathcal{K}$ liggen (algemeen bekeken) twee punten, X_2 tussen F en D, en A_2 op het verlengde van DF, waarvoor geldt dat:
$X_2F : X_2D = e : 1$ en $A_2F : A_2D = e : 1$

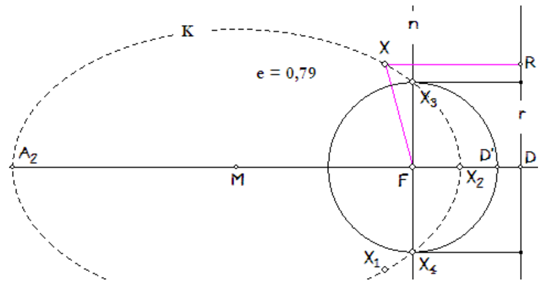
X_2 en A_2 verdelen het lijnstuk FD *in- en uitwendig* in stukken die zich verhouden als $e : 1$. Het zijn daarmee dus eveneens punten van $\mathcal{K}$. Nu is het natuurlijk *niet* de bedoeling de lengtes van PF en PU te *meten*. We moeten die punten *construeren*.
Een dergelijke constructie is gebaseerd op de zogenoemde Apollonius-crkel $\mathcal{A}_P$ van FD bij de verhouding $e : 1$ (zie n[1]). Deze cirkel is ***in figuur d2*** weergegeven.
Op de lijn PF ligt het punt P' met $PF = P'F$. Op de lijn evenwijdig met PP' door D ligt het punt V met $DV = PU$. Dan is $X_2 = FD \,\&\, VP$ en $A_2 = FD \,\&\, VP'$ (de cirkel $\mathcal{A}_P$ heeft dan het lijnstuk X_2A_2 als middellijn).

Het punt X_2 is het *tweede* van de vier te construeren punten van $\mathcal{K}$ (X_2 is een cq. de top van de kegelsnede).

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

Opmerking. Het punt A_2 kan *niet* als zodanig worden gebruikt, omdat dat punt bij een parabool 'ontaardt' in een oneigenlijk (snij)punt: de lijn VP' loopt dan evenwijdig met de as van de parabool; immers, wegens $e = 1$, is dan $DV = FP'$.
Bij een parabool ontaardt de Apollonius-cirkel in de middelloodlijn van het lijnstuk FD (immers, dan is, wegens $e = 1$, $X_2F = X_2D$). Die middelloodlijn is dus tevens de *topraaklijn* van de parabool.

Een bijkomend voordeel van deze constructie is dat daarmee, althans bij een ellips en een hyperbool, ook het middelpunt M van $\mathcal{K}$ ($\equiv$ middelpunt van $\mathcal{A}_P$) wordt gevonden. ◊



figuur d3

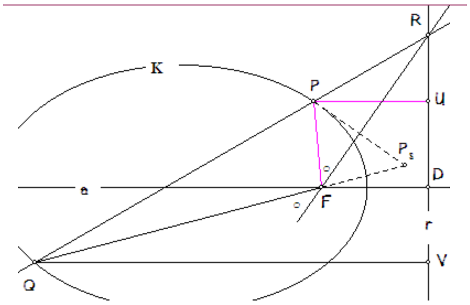
Voor de beide laatste te construeren punten kiezen we het punt F als centrum van een vermenigvuldiging met factor e.
Is hierbij D' het beeld van D, dan is (***zie figuur d3***):
$FD' : FD = e : 1$
De cirkel met middelpunt F en straal FD' snijdt de loodlijn n die in F loodrecht staat op de hoofdas van $\mathcal{K}$, in de punten X_3 en X_4.

X_3 en X_4 zijn inderdaad punten van $\mathcal{K}$ omdat $X_3F : FD = X_4F : FD = e : 1$; immers $FD = d(X_j, r)$, voor $j = 3, 4$.

De kegelsnede $\mathcal{K}$ wordt dus (ook) bepaald door de 5 punten P, X_1, X_2, X_3 en X_4.

Een *andere* constructie van punten van de kegelsnede die met P, F en r is vastgelegd, volgt uit:

Stelling D1. *Is PQ een koorde van een kegelsnede $\mathcal{K}$ waarvan F en de bijbehorende richtlijn r gegeven zijn, dan maakt de lijn RF, met R = r & PQ, gelijke hoeken met de voerstralen PF en QF.*



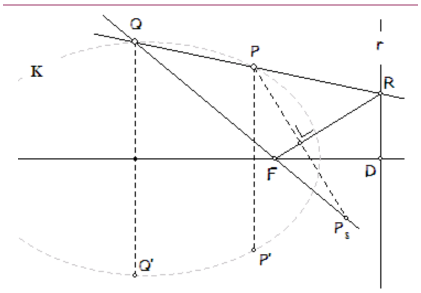
figuur d4

Bewijs. Zijn U en V de projecties van P en Q op r, dan geldt:
$\dfrac{PU}{QV} = \dfrac{PR}{QR}$ (in driehoek RQV met $PU \,//\, QV$)
en ook (*per definitie*):
$\dfrac{PF}{PU} = \dfrac{QF}{QV} = e$, zodat: $\dfrac{PU}{QV} = \dfrac{PF}{QF}$
En dus is: $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{PF}{QF}$

Volgens de (omgekeerde) *bissectricestelling* [n8] is dan RF een bissectrice van de hoek F in driehoek PQF (***in figuur d4*** is RF de *buiten*bissectrice).
De lijn RF maakt inderdaad gelijke hoeken met PF en QF. ◊

Gevolg. Het spiegelbeeld P_s van het punt P in de lijn RF ligt op de lijn QF. ◊

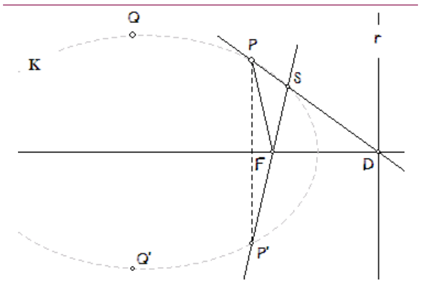
De constructie van een punt (***in figuur d5*** is dat het punt Q) van de kegelsnede $\mathcal{K}$ verloopt dan, bij in ligging gegeven P, F en r, op basis hiervan als onderstaand.



figuur d5

Constructie. Met R als *willekeurig* punt op r zoeken we het tweede snijpunt Q van de lijn RP met $\mathcal{K}$.
Het Gevolg van Stelling D1 zegt dat het spiegelbeeld P_s van P in RF op de lijn FQ ligt.
Het punt Q, het gezochte punt van $\mathcal{K}$, kan dus gevonden worden als snijpunt van de lijnen RP en FP_s .

Uiteraard liggen ook de spiegelbeelden P' en Q' van de punten P en Q in de hoofdas FD van $\mathcal{K}$ op $\mathcal{K}$ (*zie figuur d5*).



figuur d6

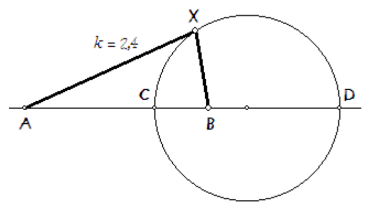
Analoog aan de constructie van het punt Q kunnen we ook uitgaan van het op r gelegen punt D; ***zie figuur d6***.
Het punt $S = DP$ & $P'F$ ligt dan, conform het Gevolg van Stelling D1, op $\mathcal{K}$.

En ook nu is $\mathcal{K}$ vastgelegd door 5 punten: P, P', Q, Q' en S.

Merk hierbij op dat bij de constructies van de punten Q en S de (waarde van de) excentriciteit van de kegelsnede *niet* wordt gebruikt (deze is *alleen* gebruikt in het bewijs van Stelling D1).

Noten bij de Appendices

[n1] Hierbij wordt gebruik gemaakt van de volgende eigenschap:



figuur n1

De meetkundige plaats van de punten X waarvoor de afstanden tot twee gegeven punten A en B zich verhouden als k : 1 (met $k \neq 1$) is een cirkel met middellijn CD, waarbij C en D de punten zijn die het lijnstuk AB ***in- en uitwendig*** *verdelen in de verhouding k : 1.*

In figuur n1 is $AC : BC = k : 1$ (inwendig) en $AD : BD = k : 1$ (uitwendig).

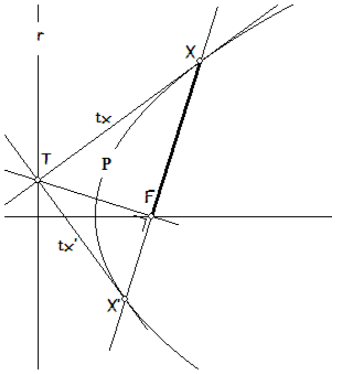
Zie voor een bewijs (het is Stelling 1 op onderstaande webpagina):
www.pandd.demon.nl/apolcirk.htm (website van de auteur).

De bedoelde cirkel heet **Apollonius-cirkel** bij A en B met verhouding k. Zie verder ook *Appendix D*.

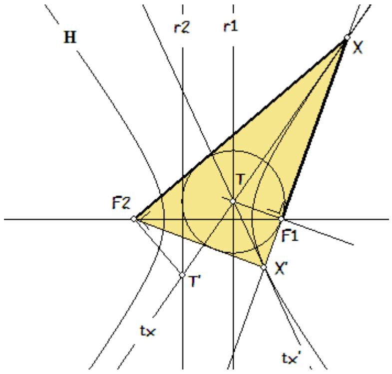
[n2] Hier wordt gebruikt: ALS $a : b = p : q$ DAN $(a + p) : (b + q) = p : q$.

 Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

[n3] Overeenkomstige eigenschappen gelden ook voor een parabool (***zie figuur n3a***) en een hyperbool (***zie figuur n3b***).



figuur n3a

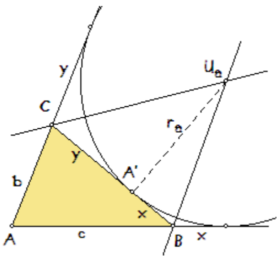


figuur n3b

Merk op dat ***in figuur n3b*** de cirkel (T, TF_1) de *incirkel* (ingeschreven cirkel) is van de driehoek XF_2X'.

[n4] Met [XYZ] bedoelen we de lengte van het 'gebroken' lijnstuk XYZ, de som van de lengtes van de lijnstukken XY en YZ. Deze lijnstukken hebben dus het punt Y als gemeenschappelijk eindpunt; Y is een 'tussenpunt' van het gebroken lijnstuk.

[n5] Er geldt namelijk:



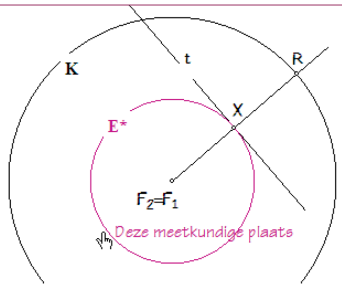
figuur n5

De raaklijnstukken uit B, C aan de uitcirkel behorend bij A (rakend aan de zijde BC) van een driehoek ABC zijn gelijk aan s – c, s – b; daarbij is s de ***halve*** *omtrek van driehoek ABC.*

Zie voor een bewijs (het is Stelling 2 op onderstaande webpagina):
www.pandd.demon.nl/lemoine/uitcirkels.htm (website van de auteur).

In figuur n5 is dus $x = A'B = s - c$ en $y = A'C = s - b$, zodat inderdaad:
$[A'CA] = [A'BA] = s$

[n6] Maar het kan ook als volgt.



figuur n6

Wanneer we uitgaan van een cirkel $\mathcal{K}$ met middelpunt F_2 en straal $2a$ én van een punt F_1 dat samenvalt met F_2, dan kan de conflictlijn $\mathcal{E}^*$ van F_1 en $\mathcal{K}$ op dezelfde manier geconstrueerd worden als bij een ellips.

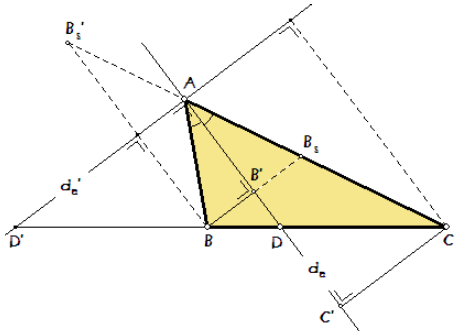
Ligt R op $\mathcal{K}$, dan ligt het punt X met $d(X, \mathcal{K}) = XR = XF_1$ op de halve lijn F_2R én op de middelloodlijn t van het lijnstuk F_1R.

Direct is dan duidelijk dat $\mathcal{E}^*$ de cirkel is met middelpunt F_2 en straal $\frac{1}{2} \cdot 2a = a$.

[n7] Zie ook:
Dick Klingens (2003): *Kegelsneden en hun vergelijkingen*. Op:
www.pandd.demon.nl/kever.htm (website van de auteur).

Copyright © 2011 PandD Software Krimpen ad IJssel (NL)

[n8] De **bissectricestelling** voor een driehoek *ABC* luidt: *Is D het snijpunt van een bissectrice van hoek A met* (*het verlengde van*) *de zijde BC, dan is BD* : *CD* = *BA* : *CA*.



figuur n8

Bewijs. Nu is, met *B'* en *C'* als projecties van *B* en *C* op de (binnen)bissectrice *AD* van hoek *A*, driehoek *BDB'* gelijkvormig met driehoek *CDC'* (*hh*). Dus:
BD : *CD* = *BB'* : *CC'*
Ook zijn de driehoeken *BB'A* en *CC'A* gelijkvormig (*hh*). Daaruit volgt:
BB' : *CC'* = *BA* : *CA*

Zodat *BD* : *CD* = *BA* : *CA*.
Een overeenkomstig bewijs kan worden geleverd voor de buitenbissectrice *AD'* van hoek *A*. ◊

De *omgekeerde* stelling van de bissectricestelling luidt: *Als voor het punt D op* (*het verlengde van*) *de zijde BC van een driehoek ABC geldt dat BD* : *CD* = *BA* : *CA, dan is de lijn AD een bissectrice van hoek A*.
Het bewijs van de omgekeerde stelling kan uit het ongerijmde worden geleverd, daarbij gebruik makend van de bissectricestelling zelf.

Over de auteur

Dick Klingens is eindredacteur van het wiskundetijdschrift *Euclides*, het verenigingsorgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). Voor zijn pensionering was hij lerarenopleider en als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*
URL van zijn website: *www.pandd.nl*

SOME RIGHTS RESERVED

Copyright © 2011 PandD Software, Krimpen aan den IJssel (NL) / nov. 2009 – vs 1.0
jan. 2011 – vs 1.3 / feb. 2011 – vs 1.5a

Op dit artikel is een 'Creative Commons Naamsvermelding 3.0 Nederland Licentie' van toepassing.
Deze licentie kan worden ingezien op: « *http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/nl/* ».

Dit artikel is een bewerking van een samenvatting van (cq. aanvullende literatuur bij) een lezing van de auteur in november 2009.