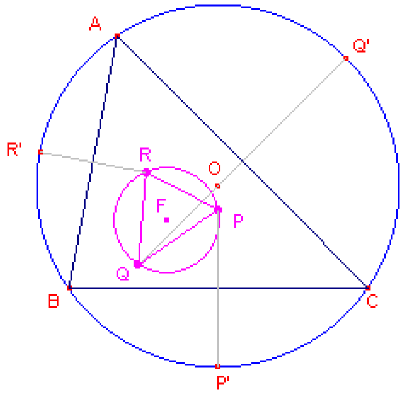
Fuhrmann-cirkel

0. Overzicht

1. Inleiding ■

Een bijzondere cirkel bij een driehoek (vergelijkbaar met de cirkel van Feuerbach of negenpuntscirkel) is de **Fuhrmann-cirkel**, genoemd naar de Duitse wiskundige **Wilhelm Fuhrmann** (1833-1904).

figuur 1



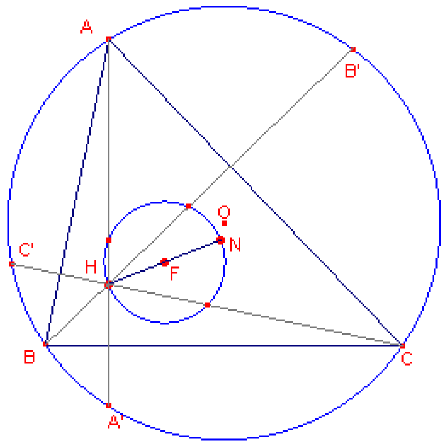
Deze cirkel wordt als volgt gedefinieerd (zie figuur 1):

- driehoek ABC met omcirkel O;
- P', Q', R' zijn de middens van de bogen op de koorden BC, CA, AB;
- P, Q, R zijn de beeldpunten van P', Q', R' bij een puntspiegeling in de bijbehorende koorde.

Driehoek PQR heet **Fuhrmann-driehoek**.
De cirkel door P, Q, R (de omcirkel van driehoek PQR dus) heet **Fuhrmann-cirkel** (hieronder soms aangegeven met F-cirkel) van driehoek ABC.
Het middelpunt F van deze cirkel heet soms wel het **Fuhrmann-punt** van driehoek ABC.

2. Eigenschappen ■

figuur 2



De eigenschappen van de Fuhrmann-cirkel staan in de volgende stelling en zijn geïllustreerd in nevenstaande figuur (figuur 2).

Stelling
[1] - Het hoogtepunt H van driehoek ABC ligt op de F-cirkel.
[2] - Het punt van Nagel (N) van driehoek ABC ligt op de F-cirkel.
[3] - Het middelpunt F van de F-cirkel is het midden van het lijnstuk HN (FH = FN).
[4] - Elke hoogtelijn van driehoek ABC snijdt de F-cirkel in een tweede punt, waarvan de afstand tot het bijbehorende hoekpunt van de driehoek gelijk is aan 2r (waarbij r de straal is van de incirkel van driehoek ABC).

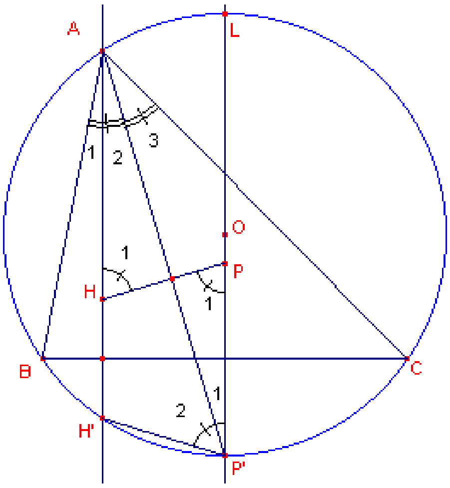
3. Bewijzen ■

[0]

Allereerst bewijzen we de volgende

Hulpstelling
HP staat loodrecht op AP' (en ook HQ loodrecht op BQ', HR loodrecht op CR').

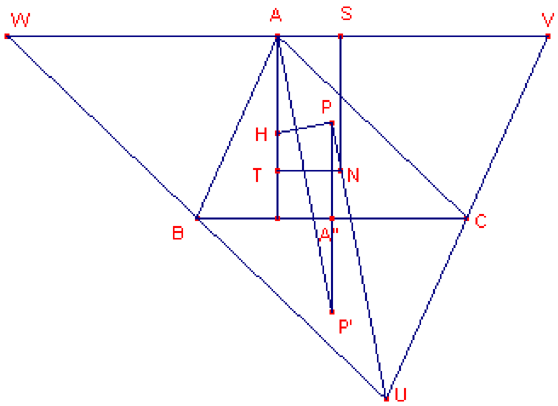
figuur 3



Bewijs:
Volgens een bekend eigenschap ligt het spiegelbeeld van het punt H in elk van de zijden van een driehoek op de omcirkel (zie H en H' in bovenstaande figuur).
Uit de spiegeling in BC volgt dan, dat hoek HPP' = hoek H'P'P, zodat wegens de evenwijdigheid van AH' en OP' geldt:
hoek H1 + hoek A2 = hoek P12 + hoek A2 = ½ bg H'BAL + ½ bg H'P' = ½ bg PH'BAL = 90°.♦

Bewijs van [1], [2] en [3]
We maken hierbij gebruik van een eigenschap van het punt van Nagel.
Voor het punt van Nagel van een driehoek (N) geldt namelijk, dat het incentrum van een driehoek samenvalt met het punt van Nagel van de zwaartepuntsdriehoek van die driehoek.
We construeren daarom een driehoek UVW waarvan ABC de zwaartepuntsdriehoek is.

figuur 4



Het punt N is dus incentrum van driehoek UVW. De lijn NP is dus bissectrice van hoek U in driehoek UVW.
Verder is ABUC een parallellogram, waarvan A" het midden is van BC (op basis van de definitie van P').
Uit de puntspiegeling met centrum A" volgt, dat het beeld van PU (we weten nu nog niet of N daarop ligt), en dat is P'A, ermee evenwijdig is. Dus P'A // PU.

Uit het feit, dat P' het midden is van boog BC volgt dus, dat P'A de bissectrice is van hoek A in driehoek ABC.
Zodat de puntspiegeling deze bissectrice afbeeldt op de bissectrice van hoek U. Maar dat is de lijn NU.
De punten P, N en U zijn dus collineair.
Uit de hulpstelling volgt nu dus, dat hoek HPN = 90°.

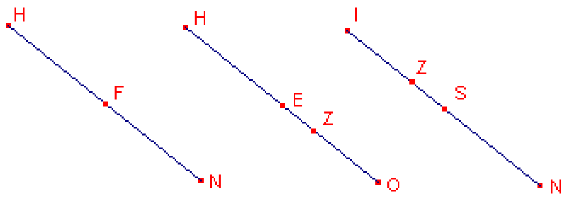
De punten H, P en N liggen dus op een cirkel met middellijn HN.
Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat ook de punten Q en R op deze cirkel liggen.
De cirkel is dus de F-cirkel van driehoek ABC, waarvan we nu weten, dat HN een middellijn is.
Het Fuhrmann-punt van driehoek ABC is het midden F van HN. ♦

Bewijs van [4]
Kijken we nu nog eens naar bovenstaande figuur.
Het voetpunt van N op VW is het punt S.

Omdat N het middelpunt van de incirkel is van driehoek UVW is dus NS gelijk aan de straal van die incirkel. Wegens het feit dat ABC zwaartepuntsdriehoek is van UVW is de straal van de incirkel van UVW 2 maal de straal van de incirkel (grootte is *r*) van ABC. Zodat
NS = 2*r*.
Het voetpunt van N op AH zij nu het punt T. T ligt ook op de F-cirkel van driehoek ABC, immers hoek HTN = 90°.
T is dus het tweede snijpunt van de hoogtelijn uit A met de F-cirkel.
AT = NS = 2*r*. ♦

4. Naschrift ■

figuur 5



Door de F-cirkel (middelpunt F, FH = FN) wordt een verband gelegd tussen het hoogtepunt H en het punt van Nagel N.
Door de negenpuntscirkel (middelpunt E, EH = EO) wordt een verband gelegd tussen H (hoogtepunt), Z (zwaartepunt) en O (middelpunt omcirkel).
Door de Spieker-cirkel (middelpunt S, SI = SN) wordt een verband gelegd tussen I (incentrum), Z (zwaartepunt) en N (het punt van Nagel).

5. Download ■

Via `http://www.pandd.demon.nl/downloads/fuhr.zip` kunnen de op deze pagina gebruikte figuren (elk als een Cabri-figuurbestand) worden gedownload.
In dit bestand zijn ook enkele Cabri-macro's en andere figuren opgenomen.