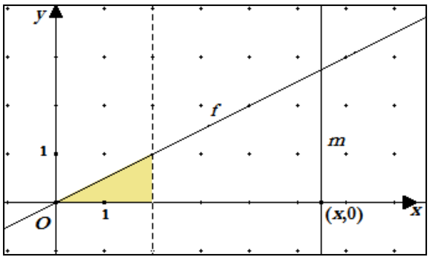
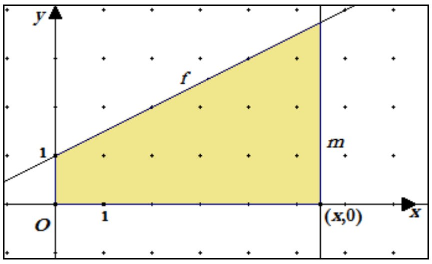
Werkblad TI-83: Over de hoofdstelling van de integraalrekening

1. Inleiding

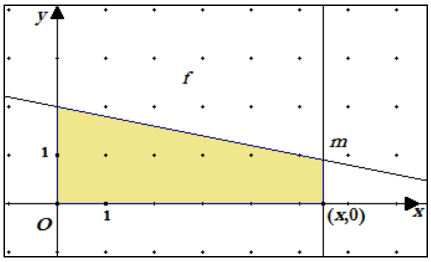
We bekijken achtereenvolgens in onderstaande figuren telkens de grafiek van een functie *f* met *x* in het interval [0; 10].



$f(x)=\frac{1}{2}x$



$f(x)=1+x$



$y=2-\frac{1}{5}x$

In elk van de figuren is ook een verticale lijn *m* getekend.
De oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de *x*-as, de *y*-as, de grafiek van de functie *f* en de lijn *m*, geven we aan met *F*(*x*), waarbij de lijn *m* door het punt (*x*, 0) gaat, waarbij $x \geq 0$ is.
Zo is in de linker figuur *F*(2) gelijk aan de oppervlakte van het gekleurde driehoekje; we denken daarbij de lijn *m* door het punt (2, 0). Zodat in dit geval:

$$F(2)=\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

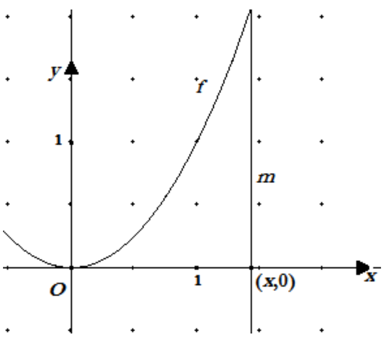
Opgave 1

🗎 Bereken in de drie gevallen de waarde van opvolgend *F*(1), *F*(2), *F*(3), *F*(4), *F*(10).
🗎 Hoe groot is in de drie gevallen *F*(0)?

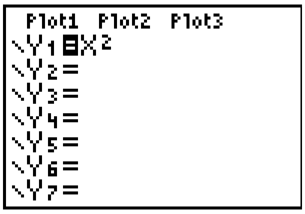
We zien dat de waarde van *F*(*x*) afhankelijk is van *x* (niet zo verwonderlijk overigens).

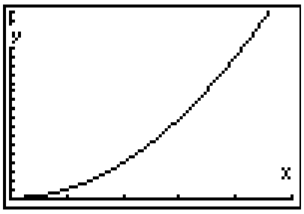
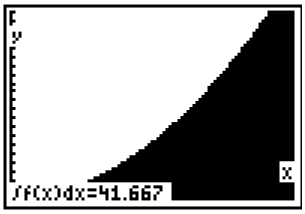
Opgave 2

🗎 Probeer in elk van de drie gevallen een *functievoorschrift* voor *F*(*x*) te vinden; dus iets als *F*(*x*) = 'uitdrukking in *x*'.
🗎 Is er daarbij een verband tussen het functievoorschrift van de functie *F*(*x*) en dat van de functie *f*(*x*)?
Zo ja, welk verband is dat dan?



We doen vervolgens min of meer hetzelfde voor de functie $f(x)=x^2$.
De oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van *f*, de positieve *x*-as en de lijn *m* geven we ook nu aan met *F*(*x*).
De waarden van *F*(1), *F*(2), … kunnen we (nog) niet direct berekenen. We gebruiken daarom de grafische rekenmachine (GR).



In de drie figuren hierboven is GR-berekening van de waarde van $F(5)$ geïllustreerd.
Zo'n berekening kun je pas uitvoeren als de grafiek van de functie *f op het gewenste domein*, en hier is dat [0; 5], op het scherm van de GR staat (instellen met `[WINDOW]`). De berekening zelf doe je met `[CALC]7:Sf(x)dx`, waarbij je eerst de `LowerLimit` (de linker grens van het interval; hier dus 0) invoert, en daarna de `UpperLimit` (de rechter grens van het interval; in dit geval dus 5).
De GR geeft dan een benaderde uitkomst; hier is dat 41,667. De **exacte** waarde is $41\frac{2}{3}$.

Opgave 3

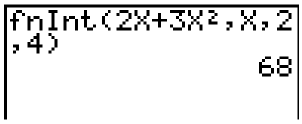
🖹 Neem onderstaande tabel over en vul de ontbrekende waarden in. Zet daarbij alle waarden die je met de GR vindt, om in **exacte** waarden (dat kan in alle gevallen!).

x	$F(x)$	x	$F(x)$
0	…	4	…
1	…	5	$41\frac{2}{3}$
2	…	10	…
3	…	20	…

🖹 Je kan een functievoorschrift voor $F(x)$ vinden. Doe dat!
Is er ook hier een verband tussen de functievoorschriften van $F(x)$ en $f(x)$?
Zo ja, welk verband is dat dan?

2. Tabellen

We kunnen tabellen zoals in Opgave 3 ook direct met de GR maken via Lijsten (`LIST`), mits we op de juiste manier in het `[Y=]` scherm de te gebruiken **oppervlaktefunctie** vastleggen (we zullen later zien hoe dat precies moet).
Deze oppervlaktefunctie vinden we in het `[MATH]` menu als `9:fnInt(`.
Hierin moeten we enkele parameters, gescheiden door komma's, toevoegen:
- de 'formule' van de functie $f(x)$;
- de variabele die bij de functie f hoort; dat is bijna altijd de `X`;
- de ondergrens van de te berekenen integraal, meestal een getal;
- de bovengrens van de te berekenen integraal, eveneens meestal een getal.



Het direct berekenen van bijvoorbeeld van de oppervlakte bij de functie $f(x) = 2x + 3x^2$ op het interval [2; 4] geeft dan met gebruikmaking van `fnInt` *op het rekenscherm* van de GR (>>>):

Opgave 4

Bereken nu, ter oefening, op de manier als hierboven staat, ook de oppervlakte bij de onderstaande functies op het daarbij vermelde interval.
Maak van elke functie ook een schets van de grafiek op het betreffende interval.

a. $f(x) = \sin x$ op $[0;\ \pi]$

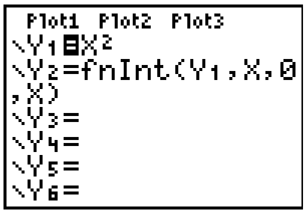
b. $g(x) = 2x - \frac{1}{10}x^2$ op $[1;\ 9]$

c. $h(x) = x \sin x$ op $[0;\ \pi]$

d. $k(x) = \sqrt[3]{x^2}$ op $[-2;\ 2]$

Om gebruik te kunnen maken van de Lijsten van de GR moeten we in het `[Y=]` menu **twee** functies definiëren:

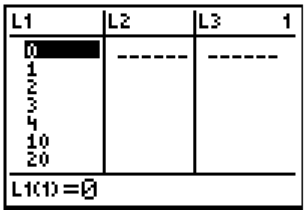
- de functie f; hiervoor gebruiken we meestal `Y1`;
- de oppervlaktefunctie; deze plaatsen we in `Y2`, waarin we de `Y-VAR`iabele `Y1` opnieuw gebruiken.



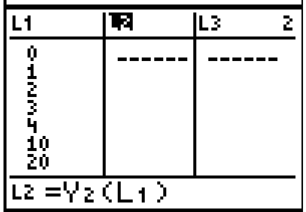
Merk op dat we voor de vierde parameter van `fnInt` (dat is de bovengrens van het interval) hier de `X` gebruiken! Kan je verklaren waarom dit nodig is?

Voorbeeld.
We geven als voorbeeld een toepassing met dezelfde functie f als in Opgave 3, namelijk $f(x) = x^2$ (zie de schermafdruk hierboven)

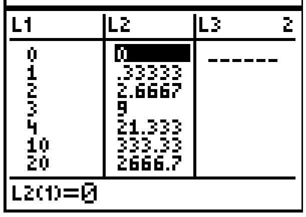
We plaatsen allereerst de te gebruiken x-waarden in lijst `L1` (>>>):



Dan kennen we aan Lijst `L2` de functie `Y2` toe.
Zet, om dat te doen, eerst de cursor *op* de naam `L2` (het bovenste vakje) en typ dan achter '`L2=`' de uitdrukking `Y2(L1)` in het onderste deel van het venster (>>>).



Na het drukken op `[ENTER]` worden de waarden berekend (>>>).



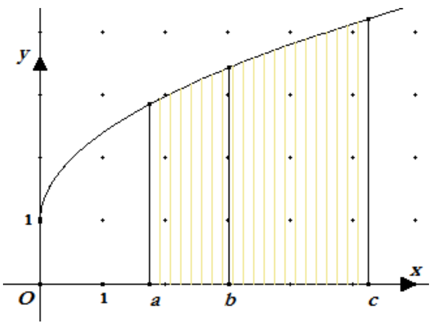
In de lijst `L2` staan dus voor $x = 0, 1, \ldots, 4, 10, 20$ de waarden van $F(x)$ = `fnInt(Y1,X,0,`x`)`.

3. Notatie en eigenschappen

Voor de *werkelijke* oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van een functie f en de x-as op het interval $[a;\ b]$ schrijven we in het vervolg:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(Spreek uit als: 'de integraal van a tot b van "ef-iks" "dee-iks" '.)



Eigenschappen. Uit de figuur hiernaast kunnen we afleiden:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

en

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

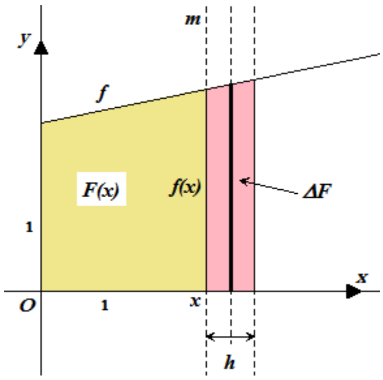
4. Een 'bewijs' van de hoofdstelling

Voor de functie $F(x)$ die als functiewaarden de oppervlakte geeft van het vlakdeel dat begrensd wordt door de grafiek van de functie $f(x)$, de x-as, de y-as en een lijn m door het punt $(x, 0)$ en loodrecht op de x-as, geldt, op basis van wat we gezien hebben in Opgave 1 en Opgave 3:

$$F'(x) = f(x)$$

Dat dit verband bestaat is uiteraard niet toevallig.
Als x een klein beetje aangroeit met $\Delta x = h$ tot $x + h$, dan groeit $F(x)$ een beetje aan met ΔF.
We hebben dan, volgens de definitie van de afgeleide van een functie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x} = F'(x)$$



Bekijk nu nevenstaande figuur.
Daarin is ΔF de oppervlakte van een verticale strook tussen de punten x en $x + h$ op de x-as.
Die oppervlakte is (ongeveer) gelijk aan de breedte ($h = \Delta x$) maal de 'gemiddelde' hoogte van de strook (het dikke lijnstuk in de strook), zodat:

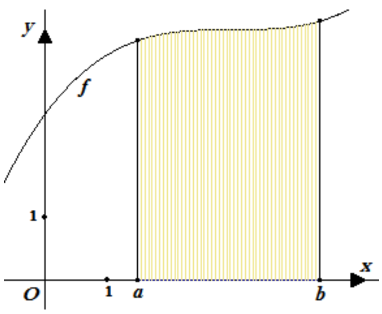
$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \text{lengte van het dikke lijnstuk}$$

Dit is ook het geval als de grafiek van de functie f geen rechte lijn is (ga dat na!).

De lengte van het lijnstuk nadert tot $f(x)$ als h steeds kleiner gekozen wordt. Dus: als Δx nadert tot 0, dan nadert $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ tot $f(x)$.

In formule:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$$

Conclusie: de functie f is de afgeleide van de functie F, of wel: $f(x) = F'(x)$



Hoofdstelling. En hieruit volgt dan de zogenoemde ***hoofdstelling van de integraalrekening***:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)$$

waarbij voor de functie $F(x)$ geldt, dat $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

> De functie F is een zogenoemde **primitieve functie** of kortweg **primitieve** van de functie f.
> Als het functievoorschrift van de functie f gegeven is, dan wordt 'het vinden' van het functievoorschrift van de functie F ook wel **primitiveren** genoemd.

Opgave 5

In Opgave 1 zijn we uitgegaan van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = 1 + x$ en $f(x) = 2 - \frac{1}{5}x$.
Bijbehorende primitieve functies F zijn opvolgend: $F(x) = \frac{1}{4}x^2$, $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ en $F(x) = 2x - \frac{1}{10}x^2$.

🖹 Ga dit na!
Controleer nu met deze functies F de in Opdracht 1 gevonden waarden.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \sin x + x\cos x$.

🖹 Waarom is de functie $F(x) = x\sin x$ een primitieve functie van de functie f?

🖹 Waarom is ook de functie $G(x) = x\sin x + 7$ een primitieve functie van f?

🖹 Geef zelf nog een derde functie die ook een primitieve functie is van de functie f.
Hoeveel primitieve functies heeft de functie f dus?

> ***Afspraak.*** Als we van een functie f (alleen) een primitieve functie F moeten opschrijven, dan noteren we dat als volgt:
> $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$
> We spreken het linker deel van deze formule uit als: 'een primitieve functie van $f(x)$' of ook wel als 'de *onbepaalde integraal* van $f(x)$ "dee-iks" '. Het getal C is hier de zogenoemde **integratieconstante**.
> Een integraal die voorzien is van een onder- én bovengrens, heet wel **bepaalde integraal**.

Opgave 7

🖹 In Opgave 3 gingen we uit van de functie $f(x) = x^2$. Daarbij hoort een primitieve functie $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Ga dit na!

🖹 Vergelijk nu $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(10)$, $F(20)$ met de uitkomsten met die in de tabel van Opgave 3 of die in het voorbeeld na Opgave 4 staan.

> ***Afspraak.*** We schrijven bij het **integreren** – dat is het berekenen van de integraal – vaak:
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$
> $[F(x)]_a^b$ staat daarin dus voor $F(b) - F(a)$.
> De functie f wordt soms **integrand** (wat geïntegreerd moet worden) genoemd.

Voorbeelden

1. Willen we $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ berekenen, dan schrijven we: $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3]_1^2 = (\frac{8}{3}) - (\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}$.
2. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$.
3. $\int_2^4 (2x + 3x^2)\,\mathrm{d}x = [x^2 + x^3]_2^4 = (16 + 64) - (4 + 8) = 80 - 12 = 68$.

5. Integreren

In de volgende opgave moeten de integralen worden berekend *zonder gebruik* te maken van de GR. Indien gewenst mag de GR wel worden gebruikt om het antwoord te controleren.

Opgave 8

Bereken de onderstaande integralen; geef daarbij **exacte** antwoorden. Werk je antwoorden daarbij op dezelfde manier uit als in bovenstaande voorbeelden.

a. $\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{1}^{5}(\tfrac{1}{5}x^2+1)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

d. $\int_{0}^{6}\sqrt{2x+4}\,\mathrm{d}x$

e. $\int_{1}^{4}(x-\tfrac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$

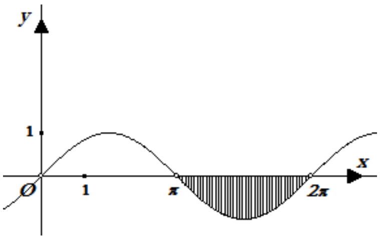
f. $\int_{0}^{3}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

g. $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}2\cos(x-\tfrac{1}{4}\pi)\,\mathrm{d}x$

h. $\int_{0}^{\pi}(\sin x-\sin\tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x$

i. $\int_{1}^{4}\dfrac{2x}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x$

6. Vervolg integreren



We bekijken nu de functie $f(x)=\sin x$ op het interval $[0;\ 2\pi]$.

Berekening van $I_1=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$, $I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ en van $I_{\text{totaal}}=\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ geeft dan:

$$I_1=[-\cos x]_0^{\pi}=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=1+1=2$$

$$I_2=[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}=(-\cos 2\pi)-(-\cos\pi)=(-1)-(1)=-2$$

$$I_{\text{totaal}}=I_1+I_2=2+(-2)=0$$

En dit laatste klopt natuurlijk met:

$$I_{\text{totaal}}=[-\cos x]_0^{2\pi}=(-\cos 2\pi)-(-\cos 0)=(-1)-(-1)=-1+1=0$$

We zien dat de waarde van de integraal I_2 *negatief* is.

Opgave 9

- Verklaar waarom $\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-2$, dus negatief, is.

  Aanwijzing: denk eventueel aan de Riemann-som waarop deze integraal gebaseerd kan worden.
- Verklaar waarom $\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0$.

Uit Opgave 9 blijkt dus dat een integraal van een functie die *geheel* onder de x-as gelegen is, een negatieve waarde heeft.
De waarde van een dergelijke integraal geeft uiteraard *geen* oppervlakte weer!
Om de oppervlakte bij zo'n functie te berekenen moeten we dus de *absolute waarde* van die functie beschouwen.
Ligt de grafiek van een functie boven **én** onder de x-as, dan moeten we het integratie-interval splitsen.
Voor de **oppervlakte** A van het vlakdeel dat op het interval $[0;\ 2\pi]$ gelegen is tussen de grafiek van de functie $f(x)=\sin x$ en de x-as, hebben we:

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=2-(-2)=4\end{aligned}$$

Immers, op het interval $[\pi;\ 2\pi]$ is $|\sin x|=-\sin x$.

Bij de berekening van oppervlaktes bij functies is het dus aan te bevelen een schets van de grafiek van de functie te maken op het beschouwde interval!

Opgave 10

Bereken de onderstaande integralen *zonder gebruik* te maken van de GR (dus via een *primitieve* van de integrand).
Ga daarbij na of de berekende integraal een oppervlakte representeert. Zo niet, bereken dan eveneens de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van de integrand en de *x*-as op het beschouwde integratie-interval.

a. $\int_{-2}^{4} (x-2)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{-2}^{2} (x^2-1)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\frac{1}{2}\pi x)\,\mathrm{d}x$

d. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$

Opgave 11

Van een zekere functie *f* is gegeven dat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = V$. We verwisselen nu in de integraal de onder- en bovengrens.

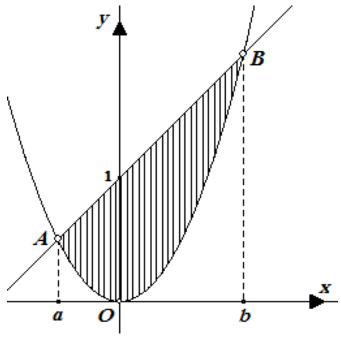
🖹 Bewijs dan dat $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -V$.

7. Oppervlakte tussen twee grafieken

We beschouwen nu de functies:

$$f(x) = x+1$$
$$g(x) = x^2$$

We willen daarbij de oppervlakte *V* berekenen van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van beide functies.
Daartoe is het in de eerste plaats noodzakelijk de *x*-coördinaten (*a* en *b*) van de snijpunten *A* en *B* van de grafieken te kennen.
We lossen dus op:



$$x+1 = x^2$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

zodat $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Opgave 12

In vervolg op het bovenstaande.
V_f is de oppervlakte op het interval [*a*; *b*] van het vlakdeel tussen de grafiek van de functie *f* en de *x*-as.
V_g is de oppervlakte op dat interval tussen de grafiek van *g* en de *x*-as.
In dit geval is dan $V = V_f - V_g$; ga dat na!

Dan is: $$V = \int_a^b \left((x+1)-(x^2)\right)\mathrm{d}x\,.$$

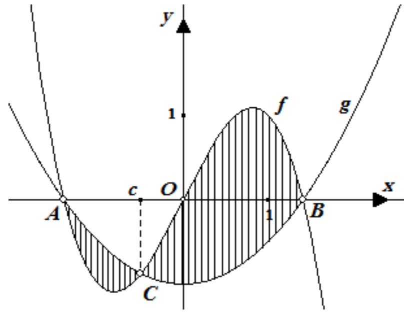
🖹 Verklaar deze uitdrukking.
🖹 Bereken *V* met gebruikmaking van de GR (antwoord: 1,86).

Als de grafieken van de functies *f* en *g* elkaar in *meer dan twee* punten snijden moeten we een-zelfde strategie kiezen: we splitsen het integratie interval, maar nu in meerdere stukken, en op elk van die stukken kijken we of de grafiek van *f* boven die van *g* ligt, of anders om.

Voorbeeld. Uitgaande van de functies

$$f(x) = -x^3 + 2x$$
$$g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 1$$

willen we de oppervlakte V van het vlakdeel berekenen dat door de beide grafieken wordt ingesloten.



Ook nu moeten we eerst de x-coördinaten a, b, c van de snij-punten A, B, C berekenen.

Door de vergelijking:

$$-x^3 + 2x = \tfrac{1}{2}x^2 - 1$$

te schrijven als:

$$-x(x^2 - 2) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 2)$$

'zien' we dat: $a = -\sqrt{2},\ b = \sqrt{2},\ c = -\tfrac{1}{2}$

Opmerking. Uiteraard kunnen we die waarden (weliswaar benaderd) ook berekenen met de GR (via `[intersect]`).

Voor V geldt nu: $V = \int_a^c \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$

Opgave 13

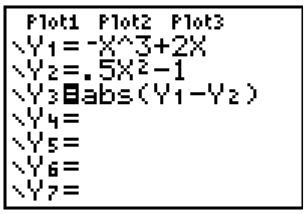
- Geef een verklaring voor de hierboven staande formule van V.
- Bereken V met gebruikmaking van de GR (antwoord: 2,49).

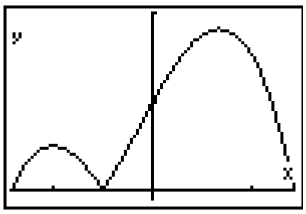
Opgave 14

Iemand teken de grafiek van de functie

$$v(x) = |\, f(x) - g(x)\,|$$

Zie de schermafdrukken hiernaast.

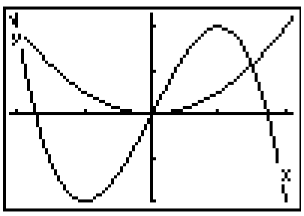




Hij merkt daarbij op dat ook $\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$ de oppervlakte van het bedoelde vlakdeel V oplevert.

- Heeft deze persoon het bij het juiste eind? Verklaar je antwoord.
- Bereken $\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Opgave 15



Bereken door gebruik te maken van primitieve functies (**exact**) de oppervlakte van de beide vlakdelen die worden ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = \tfrac{1}{2}x^2$ en $g(x) = -x^3 + 3x$.
Geef daarbij een volledig overzicht van je berekeningen.
(Antwoord: $3\tfrac{1}{3}$, $1\tfrac{35}{64}$.)

8. Tot slot

Opgave 16

Bereken de onderstaande integralen door gebruik te maken van primitieve functies.

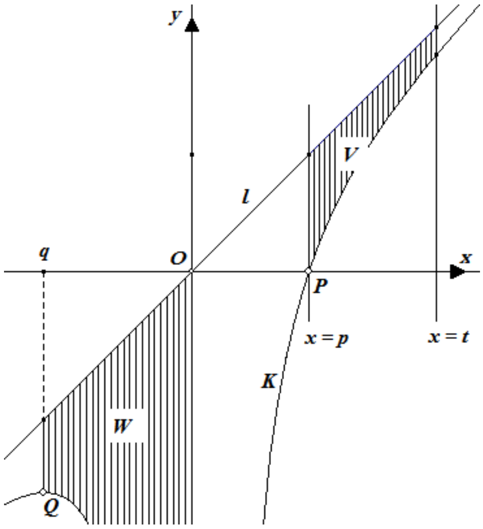
a. $\int_0^{\pi} \cos 2x \, \mathrm{d}x$

b. $\int_0^{4} \sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x$

c. $\int_1^{a} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$

d. $\int_a^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Opgave 17



Hiernaast is de grafiek K getekend van de functie $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ en de lijn l met vergelijking $y = x$.
Het punt P is het snijpunt van K met de x-as. K heeft in het punt Q een top (de functie f heeft daar een maximum).

🗎 Bereken de x-coördinaten p en q van opvolgend P en Q.

Door K, de lijn l en de verticale lijnen $x = p$ (door P) en $x = t$ (rechts van P, dus met $t > p$) wordt een vlakdeel V met oppervlakte $V(t)$ ingesloten.

🗎 Bereken $V(4)$.

🗎 Bereken de waarde(n) van t waarvoor $V(t) = \frac{1}{2}$.

Links van de y-as ligt een gearceerd vlakdeel W met een 'onbegrensde' omtrek.

🗎 Onderzoek of W een begrensde oppervlakte heeft.

