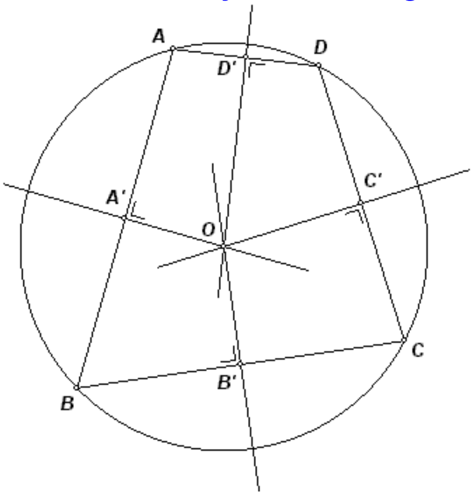
Cabri-werkblad

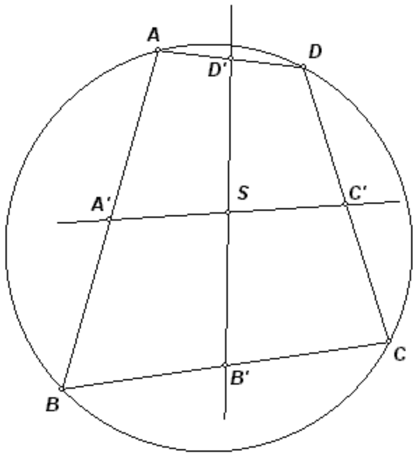
Koordenvierhoeken en enkele stellingen van Miquel

Vooraf
Bekend veronderstelde begrippen zijn: middelloodlijnen, stelling van de omtrekshoek (stelling van de constante hoek), definitie van een koordenvierhoek.

Notaties
- (X) is de cirkel met middelpunt X;
- (XYZ) is de omgeschreven cirkel (omcirkel) van driehoek XYZ;
- Met XYZ bedoelen we soms driehoek XYZ, maar ook hoek XYZ (met hoekpunt Y).

OPDRACHT 1 – Gedeeltelijke herhaling





Een belangrijke stelling: *In een koordenvierhoek is de som van twee overstaande hoeken gelijk aan 180°*.

- Bewijs die stelling.

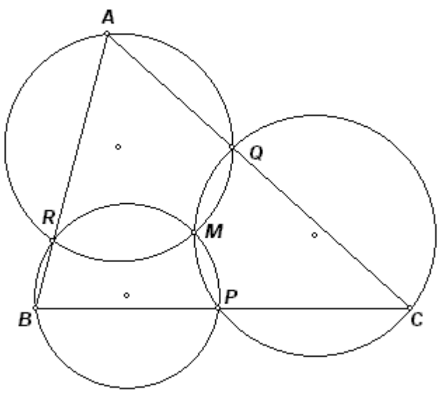
- Waarom gaan de middelloodlijnen van de zijden van een koordenvierhoek door één punt (het punt O in de linker figuur hierboven)?

En een andere eigenschap van zo'n vierhoek is (zie de rechter figuur hierboven): *In een koordenvierhoek delen de verbindingslijnstukken van de middens van de paren overstaande zijden elkaar middendoor*.

- Bewijs deze eigenschap.
  Aanwijzing – Kijk eens naar vierhoek *A'B'C'D'*.

- Onder welke voorwaarde vallen de punten O en S samen?

OPDRACHT 2



Teken op een nieuw Cabri-tekenblad drie punten A, B, C en verbind deze punten met lijnstukken. Kies op elk van de zijden van driehoek ABC een punt; in de figuur hierboven zijn dat P, Q, R.

Construeer ook de cirkels (AQR), (BRP), (CPQ).

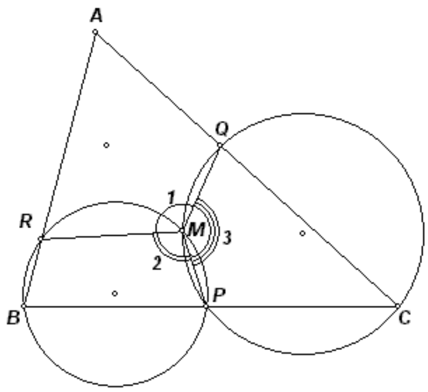
Opmerking Bij Cabri is een standaard macro bijgeleverd waarmee de omcirkel van een driehoek snel geconstrueerd kan worden: Circscr.mac.
Is deze macro niet beschikbaar, dan kan eenzelfde macro (Omcirkel3P.mac) worden gedownload via http://www.pandd.nl/downloads/Omcirkel3P.mac

- Verplaats nu de punten P, Q, R over de zijden van de driehoek.
- 🗎 Wat valt je daarbij op? Formuleer een vermoeden.
- 🗎 Bewijs (indien mogelijk) je vermoeden.

OPDRACHT 3

Het bewijs van Opdracht 2 kan je baseren op koordenvierhoeken – als je dat al niet gedaan hebt.
Wis in de figuur van Opdracht 2 de cirkel die door het punt A gaat, en bekijk dan nevenstaande figuur. Daarin is het punt M dan het tweede snijpunt van de cirkels door B en C.

In die figuur is $M_2 = PMR$, $M_3 = QMP$ en $M_1 = RMQ$.

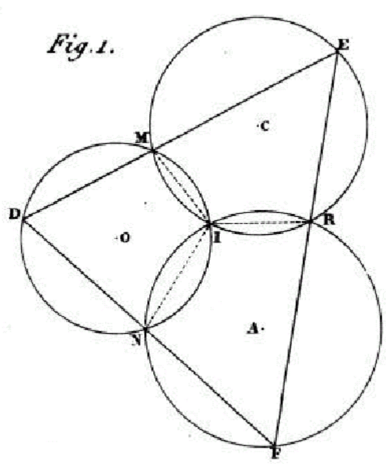


- 🗎 Bekijk vierhoek $BPMR$. Wat weet je nu van $B + M_2$? Waarom?
  Bekijk vierhoek $CQMP$. Wat weet je nu van $C + M_3$? Waarom?
- 🗎 Vul nu, uitgaande van wat je zojuist gevonden hebt, aan: $B + C =$ ……
  Bewijs dat $B + C = M_1$.
- 🗎 Wat weet je nu van de hoeken A en M_1? Waarom?
- 🗎 Welke conclusie kun je nu eenvoudig trekken met betrekking tot vierhoek $ARMQ$?

Het punt M, het gemeenschappelijk snijpunt van de zogenoemde **Miquel-cirkels** (bij de gekozen punten P, Q, R), heet wel het **Miquel-punt** van driehoek ABC (bij PQR). PQR heet wel **Miquel-driehoek**.
Auguste Miquel (Nantes, Frankrijk) ontdekte deze eigenschap in 1832. Hij publiceerde erover in het *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Journal de Liouville, Tome III, Octobre 1838, Paris).

OPDRACHT 4 – Drie cirkels door één punt

Miquel heeft de eigenschap die in Opdracht 3 staat, echter niet op die manier vermeld.
Hij schreef in het genoemde tijdschrift (zie de figuur rechts, die overgenomen is uit het tijdschrift):
***THÉORÈME I**. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C se coupent en un même point I; si l'on joint un point F de l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où les droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C, seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.*



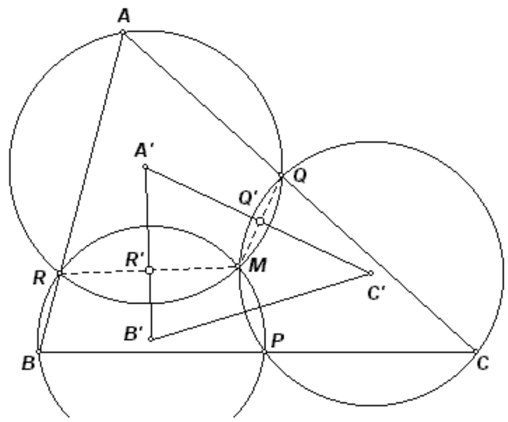
In de figuur is het punt F dus een willekeurig punt op cirkel (A). F wordt verbonden met de van I verschillende snijpunten N en R van (A) met (O) en (C). De snijpunten D en E van de lijnen FN en FR met die cirkels liggen dan met M op dezelfde rechte lijn.

- Ga een en ander zelf na met een Cabri-figuur.

Opmerking Miquel was niet de eerste die melding heeft gemaakt van bovenstaande eigenschap. William Wallace (1768-1843, Schotland) en Jakob Steiner (1798-1863, Zwitserland) maakten er eerder melding van. Het is zo goed als zeker, dat Miquel niet op de hoogte was van hun publicaties.

OPDRACHT 5

De middelpunten van de drie Miquel-cirkels van *ABC*/*PQR* vormen een driehoek *A'B'C'*.

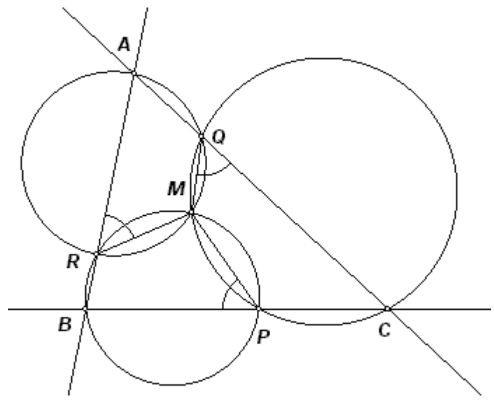


- Toon aan dat *A'B'C'* gelijkvormig is met *ABC*.
  Aanwijzing – De lijnstukken *MQ* en *MR* snijden *A'C'* en *A'B'* opvolgend in de punten *Q'* en *R'*.
  Kan je nu aantonen, dat *A'R'MQ'* een koordenvierhoek is?

OPDRACHT 6

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad weer drie punten *A*, *B*, *C*, en hun verbindingslijnen. Kies binnen driehoek *ABC* een (vast) punt *M* en op de lijn *BC* een (willekeurig) punt *P*.

- Construeer nu de bijbehorende Miquel-driehoek *PQR*.
  Aanwijzing – Gebruik daarbij de macro uit Opdracht 2.

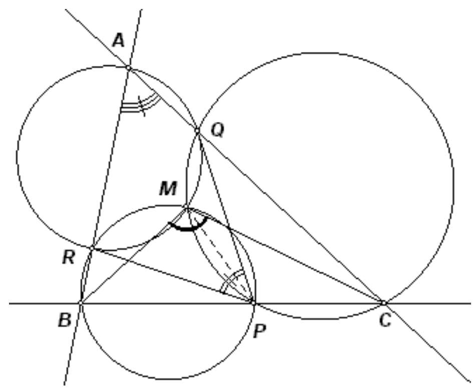


In bovenstaande figuur zijn enkele hoeken aangegeven met hetzelfde teken.

- Bewijs dat deze hoeken gelijk zijn.

- Ga met de Cabri-figuur na dat de hoeken van driehoek *PQR* niet veranderen als het punt *P* een andere positie krijgt op de lijn *BC*.

Je moet deze laatste constatering natuurlijk bewijzen (zie onderstaande figuur).



- Waarom is het bedoelde bewijs geleverd als je kunt aantonen, dat *RPQ* = *BMC* – *BAC*?
  Aanwijzing – Veranderen de hoeken *BMC* en *BAC* bij het verplaatsen van het punt *P*?

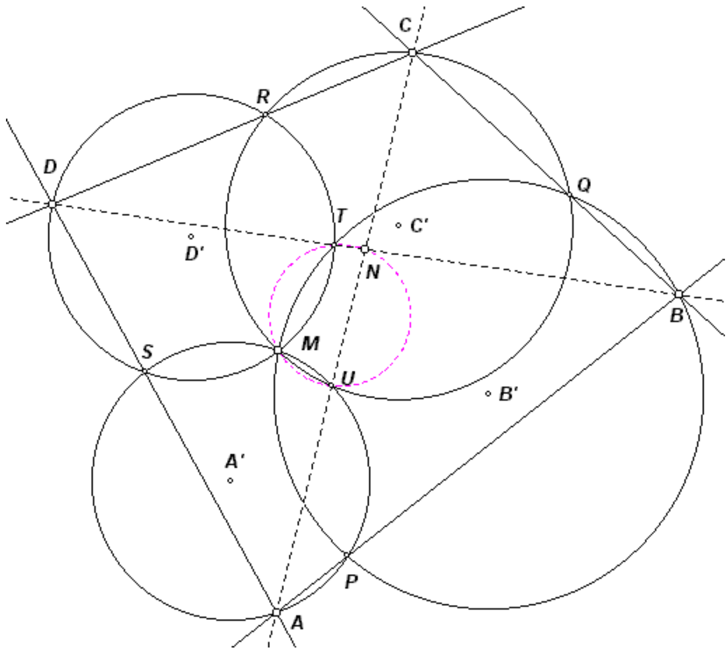
- Bewijs dat *BMC* = *RPQ* + *BAC*.
  Aanwijzing – Er geldt: *BMC* = *BMP* + *PMC*. Gebruik dan de stelling van de omtrekshoek bij (*BPM*) en bij (*CPM*) en kijk vervolgens naar vierhoek *ARPQ*.

Je hebt nu de volgende stelling bewezen:

Alle Miquel-driehoeken PQR bij een gegeven driehoek ABC met gegeven Miquel-punt M zijn gelijkvormig.

OPDRACHT 7 – Vier cirkels bepalen een vijfde cirkel

De eigenschap die Miquel formuleerde in zijn Théorème I (zie Opdracht 4), kan gemakkelijk worden uitgebreid naar meerdere cirkels die een gemeenschappelijk snijpunt hebben.
Neem een nieuw Cabri-tekenblad en kies daarop een punt *M*. Teken ook vier cirkels (*A'*), (*B'*), (*C'*), (*D'*) die alle door *M* gaan. Bepaal verder de snijpunten *P*, *Q*, *R*, *S* zoals in onderstaande figuur.



Kies vervolgens een willekeurig punt *A* op (*A'*) en bepaal dan de snijpunten *B*, *C*, *D* via de lijnen *AP*, *BQ*, *CR*.

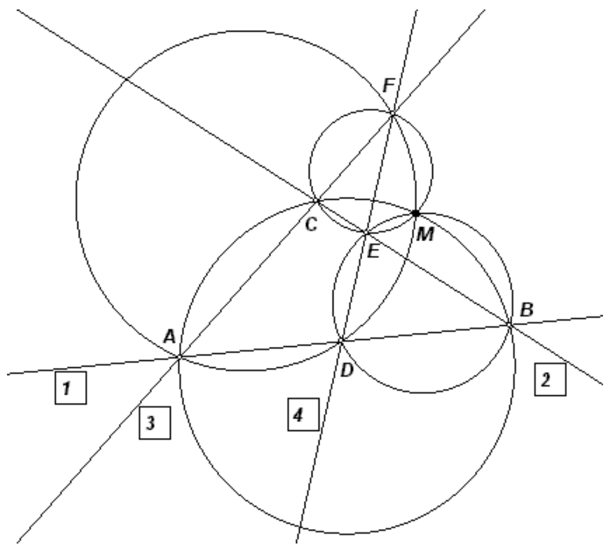
- Ga met de Cabri-figuur na dat de lijn *DS* weer door *A* gaat.
  Geef kort aan hoe je dat gedaan hebt.
- Geef (zo mogelijk) een bewijs daarvan.

In de figuur zijn ook nog twee andere cirkelsnijpunten, *T* en *U*, getekend, alsmede de diagonalen van *AC* en *BD* van vierhoek *ABCD*.

- Waarom gaan die diagonalen opvolgend door de punten *U* en *T*?
- Bewijs dat het snijpunt *N* van die diagonalen een cirkel beschrijft, als *A* de cirkel (*A'*) doorloopt.

OPDRACHT 8

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad vier elkaar (niet in één punt) snijdende lijnen. Deze lijnen (in de figuur hiernaast zijn ze genummerd) bepalen vier driehoeken en zes snijpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.



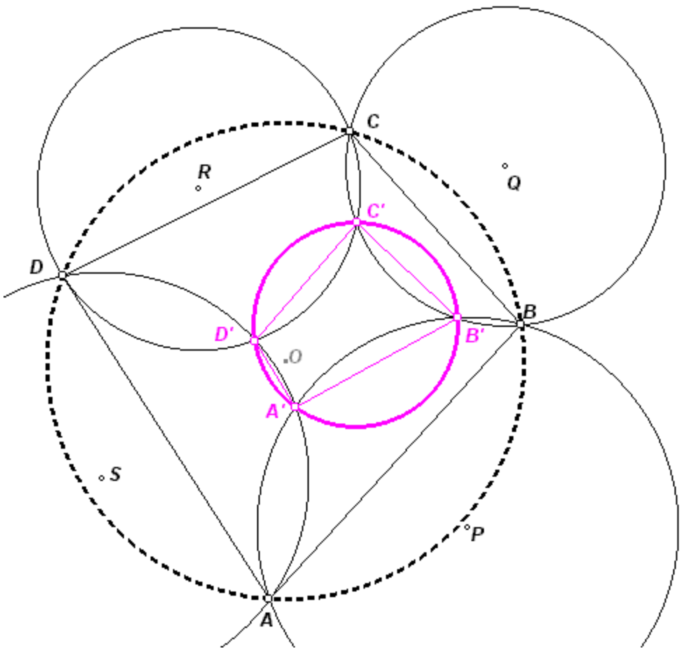
- Toon aan dat de omcirkels van die vier driehoeken één gemeenschappelijk snijpunt *M* hebben.

Miquel bewees deze eigenschap ook in het genoemde tijdschriftartikel:
***THÉORÈME II**. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux quatre triangles ABC, ADF, BDE, CEF que forment les côtés d'un quadrilatère complet ABCDEF, les quatre circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point M.*
Een figuur bestaande uit vier lijnen en zes snijpunten heet *volledige vierzijde*.

OPDRACHT 9 – Vijf cirkels bepalen een zesde cirkel

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad vier punten A, B, C, D.
En teken met behulp van de middelloodlijnen van de lijnstukken *AB*, *BC*, *CD* en *DA* willekeurige cirkels (*P*), (*Q*), (*R*), (*S*) opvolgend door *A* en *B*, door *B* en *C*, door *C* en *D* en door *D* en *A*.
Deze cirkels snijden elkaar verder in de punten *A'*, *B'*, *C'*, *D'* (zie onderstaande figuur).

- Ga met behulp van Cabri na, dat de punten *A'*, *B'*, *C'*, *D'* eveneens op een cirkel liggen.
  Beschrijf kort hoe je dat gedaan hebt.



We weten dat *ABCD* een koordenvierhoek is. Die eigenschap zullen we dus wel moeten gebruiken… Maar er zijn meer koordenvierhoeken te herkennen in bovenstaande figuur; bijvoorbeeld *ABB'A'*.

🗎 Welke andere vierhoeken zijn eveneens koordenvierhoeken?

Het ligt natuurlijk voor de hand om te proberen te bewijzen dat ook *A'B'C'D'* een koordenvierhoek is.

🗎 Doe dat.

Opmerking Miquel publiceerde de 'stelling van de zesde cirkel' vermoedelijk rond 1840.