Cabri-werkblad - versie 2

Koordenvierhoeken en enkele stellingen van Miquel

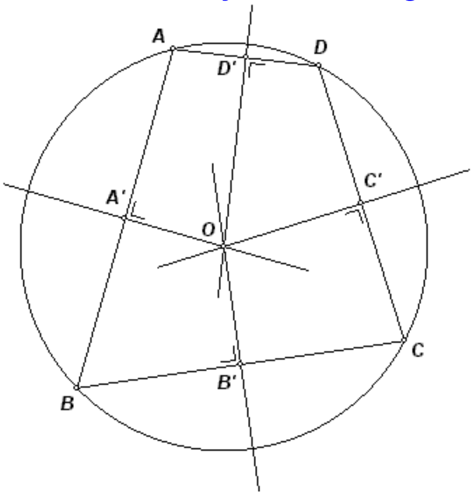
Vooraf

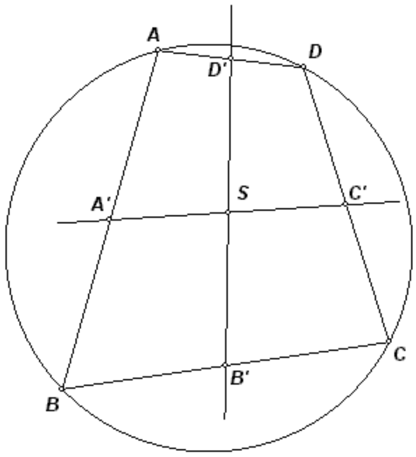
Bekend veronderstelde begrippen zijn: middelloodlijn, stelling van de omtrekshoek (stelling van de constante hoek), definitie van een koordenvierhoek.

Notaties

- (X) is een cirkel met middelpunt X;
- (XYZ) is de omgeschreven cirkel (omcirkel) van driehoek XYZ;
- Met XYZ bedoelen we soms driehoek XYZ, maar ook hoek XYZ (met hoekpunt Y).

OPDRACHT 1 – Gedeeltelijke herhaling





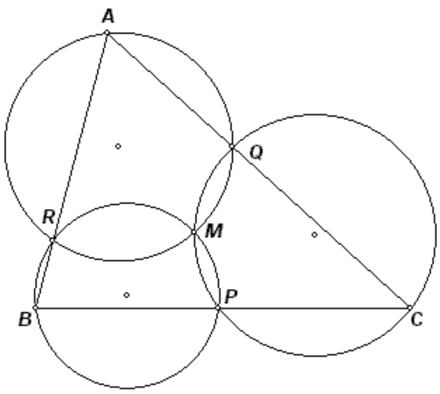
Een belangrijke stelling: *In een koordenvierhoek is de som van twee overstaande hoeken gelijk aan 180°*.

- 🗎 Bewijs die stelling.
- 🗎 Waarom gaan de middelloodlijnen van de zijden van een koordenvierhoek door één punt (het punt O in de linker figuur hierboven)?

En een andere eigenschap van zo'n vierhoek is (zie de rechter figuur hierboven): *In een koordenvierhoek delen de verbindingslijnstukken van de middens van de paren overstaande zijden elkaar middendoor*.

- 🗎 Bewijs deze eigenschap.
  Aanwijzing – Kijk eens naar vierhoek *A'B'C'D'*.
- 🗎 Onder welke voorwaarde vallen de punten O en S samen?

OPDRACHT 2



Teken op een nieuw Cabri-tekenblad drie punten A, B, C en verbind deze punten met lijnstukken. Kies op elk van de zijden van driehoek ABC een punt; in de figuur hierboven zijn dat P, Q, R.

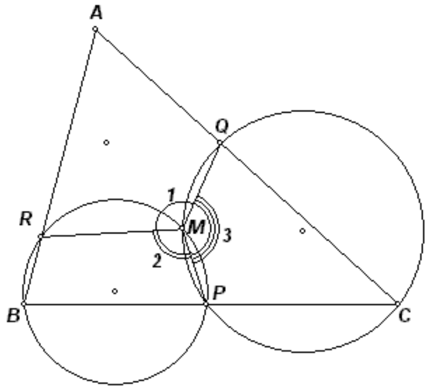
- Construeer ook de cirkels (AQR), (BRP), (CPQ).

Opmerking Bij Cabri is een standaard macro bijgeleverd waarmee de omcirkel van een driehoek snel geconstrueerd kan worden: Circscr.mac.
Is deze macro niet beschikbaar, dan kan eenzelfde macro (Omcirkel3P.mac) worden gedownload via http://www.pandd.nl/downloads/Omcirkel3P.mac

- Verplaats nu de punten P, Q, R over de zijden van de driehoek.
- Wat valt je daarbij op? Formuleer een vermoeden.
- Bewijs (indien mogelijk) je vermoeden.

OPDRACHT 3

Het bewijs van Opdracht 2 kan je baseren op koordenvierhoeken – als je dat al niet gedaan hebt.
Wis in de figuur van Opdracht 2 de cirkel die door het punt A gaat, en bekijk dan nevenstaande figuur. Daarin is het punt M dan het tweede snijpunt van de cirkels door B en C.



In die figuur is $M_2 = PMR$, $M_3 = QMP$ en $M_1 = RMQ$.

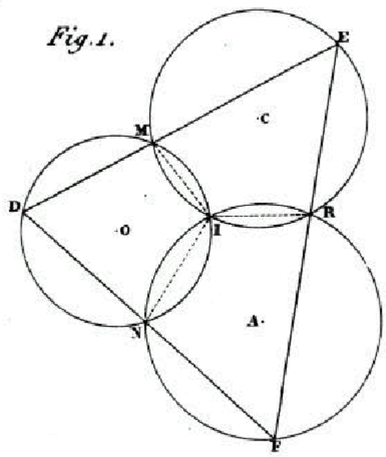
- Bekijk vierhoek $BPMR$. Wat weet je nu van $B + M_2$? Waarom?
  Bekijk vierhoek $CQMP$. Wat weet je nu van $C + M_3$? Waarom?

- Vul nu, uitgaande van wat je zojuist gevonden hebt, aan: $B + C = \ldots\ldots$
  Bewijs dat $B + C = M_1$.
- Wat weet je nu van de hoeken A en M_1? Waarom?
- Welke conclusie kun je nu eenvoudig trekken met betrekking tot vierhoek $ARMQ$?

Het punt M, het gemeenschappelijk snijpunt van de zogenoemde **Miquel-cirkels** (bij de gekozen punten P, Q, R), heet wel het **Miquel-punt** van driehoek ABC (bij PQR). PQR heet wel **Miquel-driehoek**.
Auguste Miquel (Nantes, Frankrijk) ontdekte deze eigenschap in 1832. Hij publiceerde erover in het *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Journal de Liouville, Tome III, Octobre 1838, Paris).

OPDRACHT 4 – Drie cirkels door één punt

Miquel heeft de eigenschap die in Opdracht 3 staat, echter niet op die manier vermeld.
Hij schreef in het genoemde tijdschrift (zie de figuur rechts, die overgenomen is uit dat tijdschrift):



***THÉORÈME I**. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C se coupent en un même point I; si l'on joint un point F de l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où les droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C, seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.*

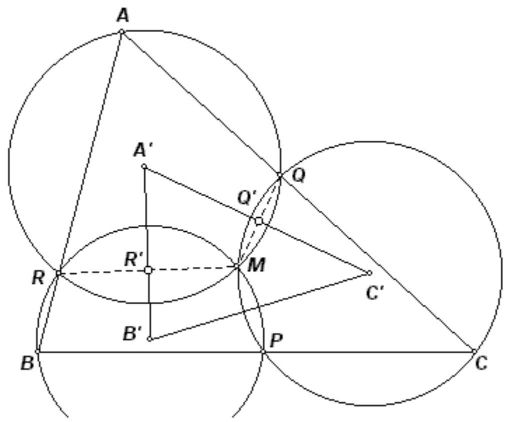
In de figuur is het punt F dus een willekeurig punt op cirkel (A). F wordt verbonden met de van I verschillende snijpunten N en R van (A) met (O) en (C). De snijpunten D en E van de lijnen FN en FR met die cirkels liggen dan met M op dezelfde rechte lijn.

- Ga een en ander zelf na met een Cabri-figuur.

Opmerking Miquel was niet de eerste die melding heeft gemaakt van bovenstaande eigenschap. William Wallace (1768-1843, Schotland) en Jakob Steiner (1798-1863, Zwitserland) maakten er eerder melding van. Het is zo goed als zeker, dat Miquel niet op de hoogte was van hun publicaties.

OPDRACHT 5

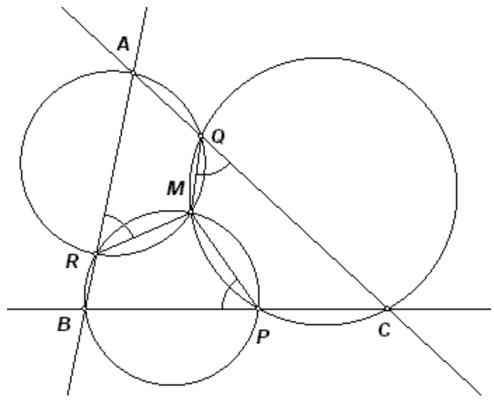
De middelpunten van de drie Miquel-cirkels van *ABC*/*PQR* vormen een driehoek *A'B'C'*.



🗎 Toon aan dat *A'B'C'* gelijkvormig is met *ABC*.
Aanwijzing – De lijnstukken *MQ* en *MR* snijden *A'C'* en *A'B'* opvolgend in de punten *Q'* en *R'*.
Kan je nu aantonen, dat *A'R'MQ'* een koordenvierhoek is?

OPDRACHT 6

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad weer drie punten *A*, *B*, *C*, en hun verbindingslijnen. Kies binnen driehoek *ABC* een (vast) punt *M* en op de lijn *BC* een (willekeurig) punt *P*.



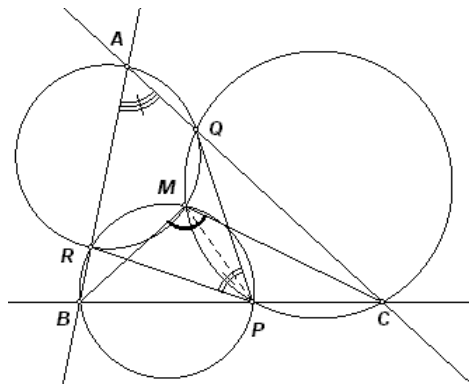
- Construeer nu de bijbehorende Miquel-driehoek *PQR*.
  Aanwijzing – Gebruik daarbij de macro uit Opdracht 2.

In bovenstaande figuur zijn enkele hoeken aangegeven met hetzelfde teken.

🗎 Bewijs dat deze hoeken gelijk zijn.

- Ga met de Cabri-figuur na dat de hoeken van driehoek *PQR* niet veranderen als het punt *P* een andere positie krijgt op de lijn *BC*.

Je moet deze laatste constatering natuurlijk bewijzen (zie onderstaande figuur).



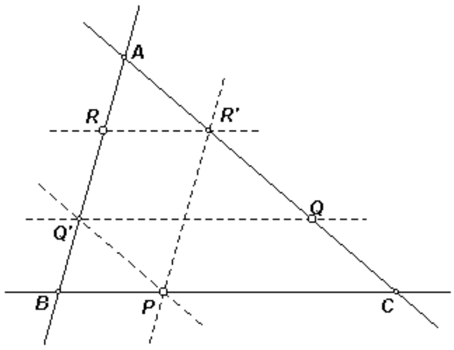
🗎 Waarom is het bedoelde bewijs geleverd als je kunt aantonen, dat *RPQ* = *BMC* – *BAC*?
Aanwijzing – Veranderen de hoeken *BMC* en *BAC* bij het verplaatsen van het punt *P*?

- Bewijs dat *BMC* = *RPQ* + *BAC*.
  Aanwijzing – Er geldt: *BMC* = *BMP* + *PMC*. Gebruik dan de stelling van de omtrekshoek bij (*BPM*) en bij (*CPM*) en kijk vervolgens naar vierhoek *ARPQ*.

Je hebt nu de volgende stelling bewezen:

> *Alle Miquel-driehoeken PQR bij een gegeven driehoek ABC met gegeven Miquel-punt M zijn gelijkvormig.*

OPDRACHT 7a – Drie cirkels bepalen een vierde cirkel



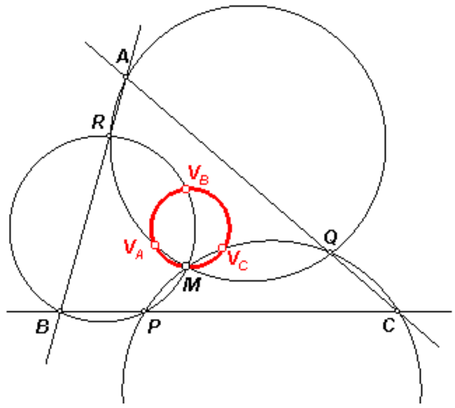
Teken op een nieuw tekenblad weer drie punten A, B, C en verbind deze punten met *lijnen*. Kies op de lijn BC een punt P. Teken door P lijnen evenwijdig met AB en AC. Deze lijnen geven de punten R' en Q'. Teken door Q' en R' lijnen evenwijdig met BC. Deze lijnen geven de punten Q en R.

🗎 Toon aan dat $BP : PC = CQ : QA = AR : RB$.

- Verberg de punten Q' en R' en de hulplijnen (deze zijn in de tekening hiernaast gestippeld).

Gevolg Als P beweegt over de lijn BC, dan bewegen de punten Q en R 'evenredig' mee op CA en AB. P, Q, R hebben op hun 'dragers' een eigen 'snelheid', echter zo, dat Q en R opvolgend het lijnstuk CA en AB 'in dezelfde tijd' afleggen.

- Ga dit na en teken vervolgens cirkel (BPR).



We noemen P, Q, R in dit geval **evenredig delende punten** van de zijden van ABC.

🗎 Ga ook na dat bij verplaatsing van P over de lijn BC de cirkel (BPR) door een vast punt gaat (V_B in de figuur hiernaast). Geef kort aan hoe je dat hebt vastgesteld.

Opmerking Ook de cirkels (CPQ) en (AQR) gaan elk door een vast punt (zie de punten V_C en V_A).

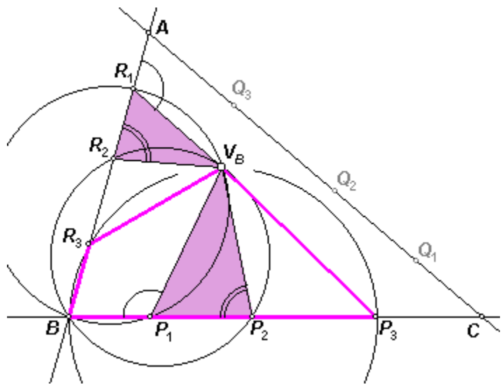
- Construeer nu ook (CPQ) en bepaal het (tweede) snijpunt M van (BPR) en (CPQ).

🗎 Uiteraard gaat ook (AQR) nu door M. Waarom?

- Bepaal de meetkundige plaats van het punt M als P over de lijn BC beweegt.

Die meetkundige plaats is een cirkel, de zogenoemde **Brocard-cirkel** van driehoek ABC, genoemd naar **Henri Brocard** (1845-1922, Frankrijk).
De drie vaste punten V_A, V_B, V_C liggen op deze cirkel.

Opdracht 7b



Het bewijs dat er inderdaad drie van die vaste punten zijn – en het bewijs dat M ligt op de omcirkel van $V_AV_BV_C$ (de Brocard-cirkel dus) – is niet eenvoudig.
In de hiernaast staande figuur vind je mogelijk enkele aanknopingspunten voor een bewijs.
De punten P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3) zijn evenredig delende punten (uitgaande van P_1, P_2, P_3 die willekeurig zijn op BC). Het tweede snijpunt van de cirkels (BP_1R_1) en (BP_2R_2) noemen we V_B.

Je moet nu bewijzen dat ook (BP_3R_3) door het punt V_B gaat. Maar dan moet $BP_3V_BR_3$ een koordenvierhoek zijn!

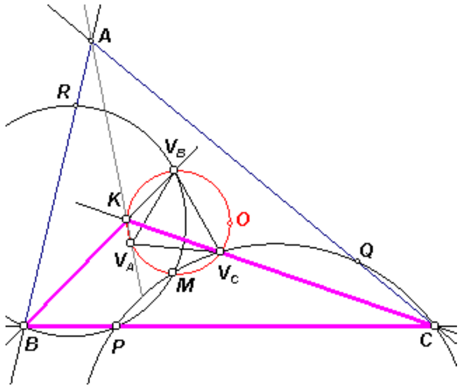
🗎 Bewijs nu dat de driehoeken $V_BP_1P_2$ en $V_BR_1R_2$ gelijkvormig zijn.
Aanwijzing – Bewijs eerst dat de hoeken met hetzelfde hoekteken gelijk zijn.

🗎 Bewijs vervolgens dat de driehoeken $V_BP_1P_3$ en $V_BR_1R_3$ gelijkvormig zijn.
Aanwijzing – Je moet hierbij de evenredigheid van zijden van die driehoeken aantonen!

🗎 Waarom volgt hieruit dan dat $BP_3V_BR_3$ een koordenvierhoek is?

Daarmee is het eerste deel van de vraagstelling van deze opdracht bewezen: de vaste punten V_A, V_B, V_C bestaan inderdaad. De tweede vraag is: Waarom ligt het punt M op ($V_AV_BV_C$)?
Voor het antwoord op die vraag gebruiken we de *Stelling van Miquel* (zie Opdracht 3).

De Miquel-cirkels van ABC/PQR bepalen blijkbaar ($V_AV_BV_C$). Maar de driehoek $V_AV_BV_C$ is onafhankelijk van de keuze van de punten P, Q en R (waarom?) Je kan dus zeggen: bij elke driehoek ABC behoort een driehoek $V_AV_BV_C$.
Deze driehoek heet overigens **tweede Brocard-driehoek** van driehoek ABC.



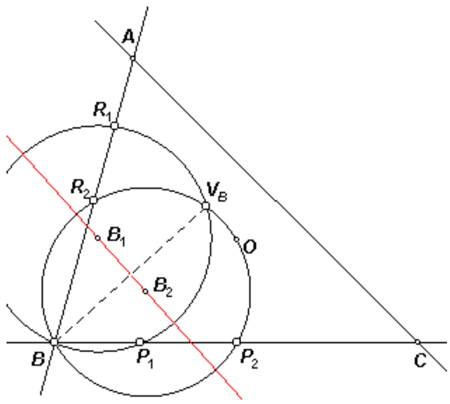
Het blijkt dat de lijnen AV_A, BV_B, CV_C elkaar in één punt K snijden, dat eveneens op de Brocard-cirkel ligt. Het punt K is het zogenoemde **Lemoine-punt** van driehoek ABC (naar **Emile Lemoine**, 1840-1912, Frankrijk).
En als we dit laatste weten (en we geven geen bewijs), dan volgt het feit dat een Miquel-punt M (bij elk drietal evenredig delende punten P, Q, R op de zijden van ABC) op de Brocard-cirkel ligt, direct uit de Stelling van Miquel.

- Geef dat bewijs.
  Aanwijzing – Bekijk driehoek KBC en beschouw de punten V_B, P en V_C op de zijden daarvan.
- Waarom ligt het middelpunt O van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ook op ($V_AV_BV_C$)?

OPDRACHT 7c

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad een driehoek ABC.

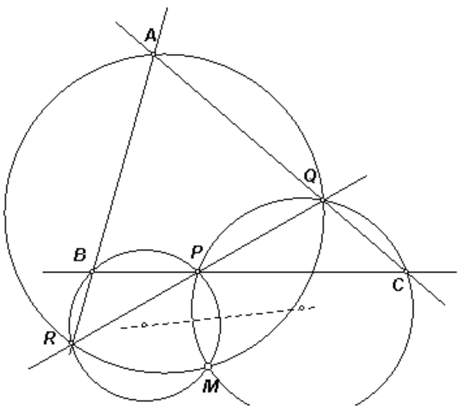
- Construeer met Cabri de tweede Brocard-driehoek bij driehoek ABC.
  Geef de constructiestappen van deze constructie (kort, maar duidelijk).
  Aanwijzing – In de figuur hiernaast zijn twee cirkels (B_1) en (B_2) getekend, de omcirkels van opvolgend BP_1R_1 en BP_2R_2.
- Wat is de meetkundige plaats van het middelpunt van een Miquel-cirkel? Waarom?



OPDRACHT 8 – Bijzonder?

We kunnen de punten P, Q, R (op de zijden van driehoek ABC) blijkbaar willekeurig kiezen (zoals in Opdracht 2) en van elkaar afhankelijk (Q en R zijn beide afhankelijk van de ligging van P; zoals in Opdracht 7).
We kiezen nu P, Q, R op een rechte lijn, waarbij R afhankelijk is van de ligging van P en Q.

- Teken op een nieuw tekenblad drie punten A, B, C en hun verbindings*lijnen*. Kies weer P op BC en Q op CA. Teken dan de lijn PQ en bepaal R op AB.
- Bepaal het punt M als tweede snijpunt van (BPR) en (CPQ).
  Aanwijzing – Spiegel hiertoe het punt P in de verbindingslijn van de middelpunten van die twee cirkels!

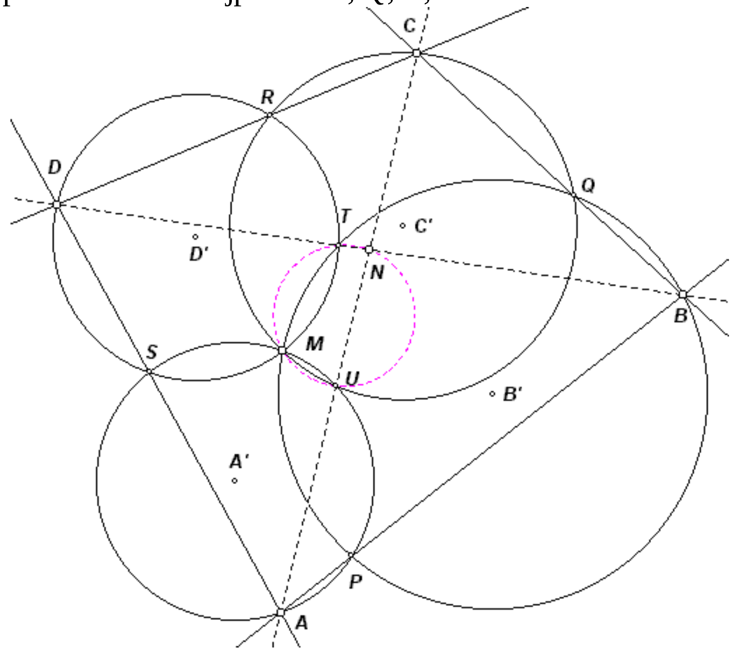


Vanzelfsprekend gaat (ARQ) weer door M.

- Licht het gebruik van het woordje *vanzelfsprekend* in bovenstaande zin toe (waarom is het vanzelfsprekend?).
- Verplaats het punt P over de lijn BC. Wat valt je dan op met betrekking tot het punt M?
  Aanwijzing – Gebruik eventueel de Cabri-functie 'SpoorAan' in het *Extra-menu* (het tweede menu van rechts).
- De meetkundige plaats van M (als P over BC beweegt) is een cirkel. Welke cirkel denk je?
  Krijg je dezelfde cirkel als Q over CA beweegt? Verklaar zo mogelijk je antwoord.
- Bewijs hiertoe dat $ABMC$ een koordenvierhoek is. Wat is je conclusie hieruit?
  Aanwijzing – Teken MP, MB en MC. Bekijk dan de koordenvierhoeken $MPBR$ en $MPQC$.
- In welk deel van het bewijs maak je gebruik van het feit, dat P, Q, R op één lijn liggen?

OPDRACHT 9 – Vier cirkels bepalen een vijfde cirkel

De eigenschap die Miquel formuleerde in zijn Théorème I (zie Opdracht 4), kan gemakkelijk worden uitgebreid naar meerdere cirkels die een gemeenschappelijk snijpunt hebben.
Neem een nieuw Cabri-tekenblad en kies daarop een punt *M*. Teken ook vier cirkels (*A'*), (*B'*), (*C'*), (*D'*) die alle door *M* gaan. Bepaal verder de snijpunten *P*, *Q*, *R*, *S* zoals in onderstaande figuur.



Kies vervolgens een willekeurig punt *A* op (*A'*) en bepaal dan de snijpunten *B*, *C*, *D* via de lijnen *AP*, *BQ*, *CR*.

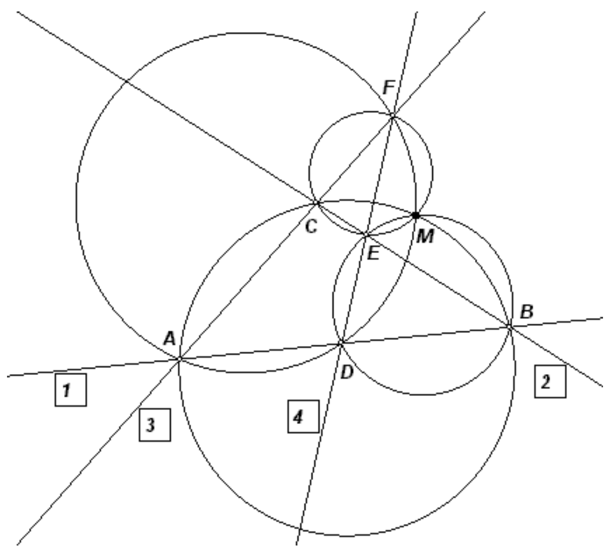
- 🗎 Ga met de Cabri-figuur na dat de lijn *DS* weer door *A* gaat.
  Geef kort aan hoe je dat gedaan hebt.
- 🗎 Geef (zo mogelijk) een bewijs daarvan.

In de figuur zijn ook nog twee andere cirkelsnijpunten, *T* en *U*, getekend, alsmede de diagonalen van *AC* en *BD* van vierhoek *ABCD*.

- 🗎 Waarom gaan die diagonalen opvolgend door de punten *U* en *T*?
- 🗎 Bewijs dat het snijpunt *N* van die diagonalen een cirkel beschrijft, als *A* de cirkel (*A'*) doorloopt.

OPDRACHT 10

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad vier elkaar (niet in één punt) snijdende lijnen. Deze lijnen (in de figuur hiernaast zijn ze genummerd) bepalen vier driehoeken en zes snijpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.



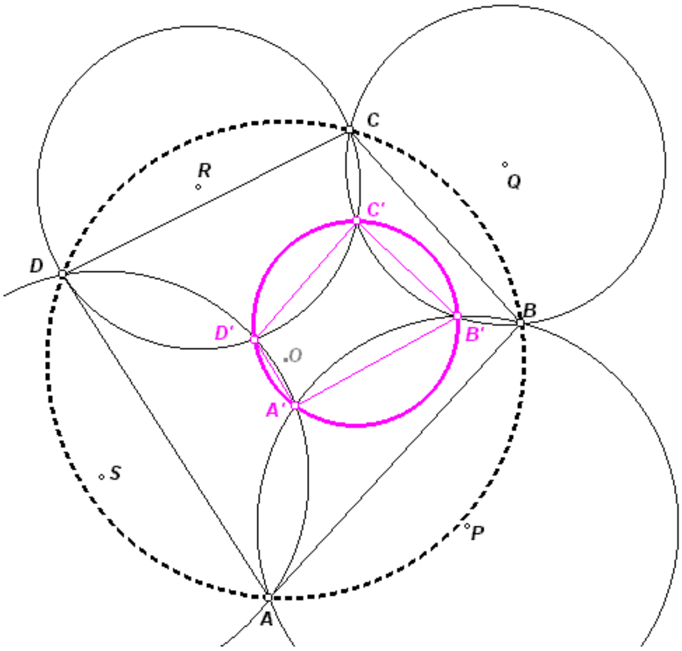
- 🗎 Toon aan dat de omcirkels van die vier driehoeken één gemeenschappelijk snijpunt *M* hebben.
  Aanwijzing – Zie Opdracht 8. Met welke punten in die opdracht komen de punten *D*, *E*, *F* overeen?

Miquel bewees deze eigenschap ook in het genoemde tijdschriftartikel:
THÉORÈME II. *Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux quatre triangles ABC, ADF, BDE, CEF que forment les côtés d'un quadrilatère complet ABCDEF, les quatre circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point M.*
Een figuur bestaande uit vier lijnen en hun zes snijpunten heet *volledige vierzijde*.

OPDRACHT 11 – Vijf cirkels bepalen een zesde cirkel

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad vier punten A, B, C, D.
En teken met behulp van de middelloodlijnen van de lijnstukken *AB*, *BC*, *CD* en *DA* willekeurige cirkels (*P*), (*Q*), (*R*), (*S*) opvolgend door *A* en *B*, door *B* en *C*, door *C* en *D* en door *D* en *A*.
Deze cirkels snijden elkaar verder in de punten *A'*, *B'*, *C'*, *D'* (zie onderstaande figuur).

🖹 Ga met behulp van Cabri na, dat de punten *A'*, *B'*, *C'*, *D'* eveneens op een cirkel liggen. Beschrijf kort hoe je dat gedaan hebt.



We weten dat *ABCD* een koordenvierhoek is. Die eigenschap zullen we dus wel moeten gebruiken…
Maar er zijn meer koordenvierhoeken te herkennen in bovenstaande figuur; bijvoorbeeld *ABB'A'*.

🖹 Welke andere vierhoeken zijn eveneens koordenvierhoeken?

Het ligt natuurlijk voor de hand te bewijzen dat ook *A'B'C'D'* een koordenvierhoek is.

🖹 Doe dat.

Opmerking Miquel publiceerde de *stelling van de zesde cirkel* vermoedelijk rond 1840.

Literatuur

O. Bottema: *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*, Epsilon Uitgaven, Utrecht (1997).
A. Emmerich: *Die Brocardschen Gebilde*, Georg Reimer Verlag, Berlin (1891).
Aad Goddijn: *Tien punten op één cirkel*, in: Euclides 77(4), NVvW (2002); pp. 150-155
Aad Goddijn: *Cabri geeft oude meetkunde tweede jeugd*, in: Experimentele wiskunde, CWI, Amsterdam (2001).
Ross Honsberger: *Episodes in the Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995)
Dick Klingens: De stelling van Miquel, http://www.pandd.demon.nl/miquel.htm
Dick Klingens: Brocard-driehoeken, http://www.pandd.demon.nl/lemoine/brocarddrieh.htm