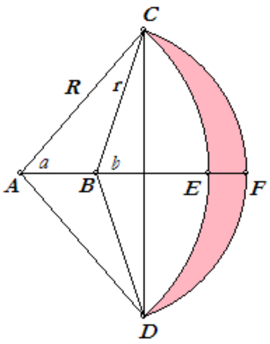
Kwadreerbare maantjes

DICK KLINGENS (*dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel
januari 2008

1. Inleiding

We weten dat het onmogelijk is een cirkel te *kwadreren*, dwz. met passer en liniaal een vierkant (cq. een andere rechtlijnige figuur) te construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van een gegeven cirkel. [a]
Echter, sommige gebieden die begrensd worden door twee cirkelbogen, zijn *wel* kwadreerbaar. **Hippocrates van Chios** (470-410 v. Chr., Griekenland) toonde dit rond 440 v. Chr. als eerste aan voor zogenoemde *maantjes*: de maantjes van Hippocrates.



figuur 1

Een maantje (*cirkeltweehoek* ?) is dan een figuur die begrensd wordt door twee snijdende cirkelbogen op een gemeenschappelijke koorde.

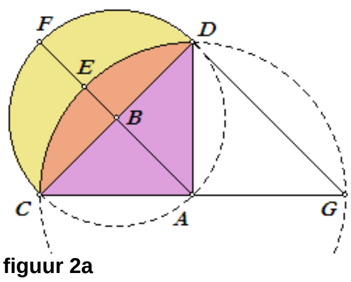
In figuur 1 wordt het maantje *CEDF* begrensd door een cirkelboog van de cirkel (A, R) en een cirkelboog van de cirkel (B, r).

In hetgeen volgt zullen we de *oppervlakte* van een cirkelsegment/cirkelsector aangegeven met '*segment*'/'*sector*' en de *oppervlakte* van een maantje met '*luna*'. De *oppervlakte* van een driehoek, vierhoek, … geven we aan met '*driehoek*', '*vierhoek*', …

We zullen onderzoeken welk soort maantjes *wel* (en welk soort *niet*) kwadreerbaar is.
We moeten daartoe, volgens de (Galois-)theorie, de oppervlakte van kwadreerbare maantjes kunnen uitdrukken met behulp van vergelijkingen van ten hoogste de tweede graad met rationale coëfficiënten en, eventueel, met (een 'ketting' van) vierkantswortels.

2. Hippocrates' overwegingen

In een in D rechthoekige, gelijkbenige driehoek CGD (met zijde $CD = 2$) is A het midden van de grootste zijde CG; A is dan het middelpunt van de omcirkel van die driehoek; ***zie figuur 2a***.
Het punt B is het midden van de zijde CD en is daarmee middelpunt van de cirkel op het lijnstuk CD.



figuur 2a

Nu is:

$$luna(CEDF) = segment(CDF) - sector(ADEC) + driehoek(ADC)$$

Met: $\quad segment(CDF) = \frac{1}{2}\cdot\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi$

en: $\quad sector(ADEC) = \frac{1}{4}\cdot\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi$

vinden we:

$$luna(CEDF) = driehoek(ADC)$$

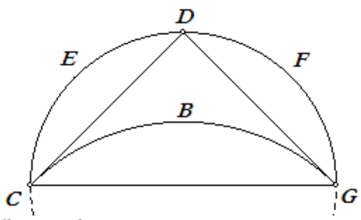
Waarmee we hebben laten zien dat het maantje $CEDF$ kwadreerbaar is:

$$luna(CEDF) = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2 = 1$$

Opmerking. In vergelijking met figuur 1 is in figuur 2a: $a = 45°$, $b = 90°$. ♦

Overigens, de figuur waarvan wordt gezegd dat die door Hippocrates werd gebruikt, ziet er iets anders uit dan die in figuur 2a; zie daarvoor ***figuur 2b***. Ook het aan Hippocrates toegeschreven bewijs is natuurlijk anders dan het bovenstaande; hij kende immers het getal π niet.

Over Hippocrates schrijft **Simplikios** (490-560, Sicilië) – als commentaar op **Eudemos**' (350-290 v. Chr., Rhodos) *Geometrikè Historia*, geschiedenis van de meetkunde – onder meer, in een van toevoegingen door anderen gezuiverde tekst, en vermeld in [13; pp. 146-147]:
"*De kwadraturen van de maantjes, die wegens hun verwantschap met de cirkel als bijzondere figuren werden beschouwd, werden door Hippocrates het eerst geformuleerd en zijn uiteenzetting werd in orde geacht. Laat ons deze zaak aanvatten en doornemen.*
Als begin beschouwde hij en als eerste stelde hij van de daarvoor nuttige stellingen dat gelijkvormige cirkelsegmenten dezelfde verhouding tot elkaar hebben als hun bases in het kwadraat.
Dat bewees hij door eerst aan te tonen dat de middellijnen in het kwadraat dezelfde verhouding hebben als de cirkels.[b]
Nadat hij dit bewezen had, stelde hij vooreerst de vraag, op welke wijze de kwadratuur zou kunnen geschieden van een maantje dat de buitenomtrek had van een halve cirkel."



figuur 2b

Op de schuine zijde *CG* van de driehoek *CGD* is nu een cirkelsegment *CGB* geplaatst dat gelijkvormig is met de (gelijke) segmenten *CDE* en *DGF* op de beide rechthoekszijden.
Nu is volgens de stelling van Pythagoras:

$$CG^2 = CD^2 + DG^2$$

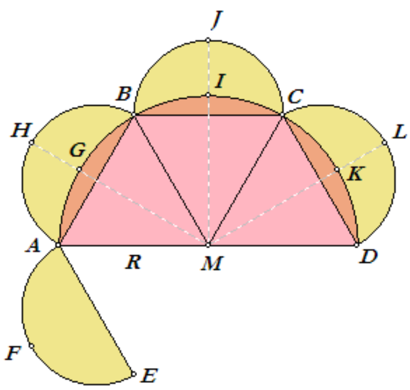
Voorts verhouden de oppervlaktes van de segmenten zich als de kwadraten van de 'onderspannende' koorden (zie het citaat hierboven), zodat:

$$\textit{segment}(\mathrm{CGB}) = \textit{segment}(\mathrm{CDE}) + \textit{segment}(DGF)$$

Tellen we aan beide zijden van deze uitdrukking de oppervlakte van de kromlijnige driehoekige figuur *CBGD* erbij, dan vinden we:

$$\textit{driehoek}(CGD) = \textit{luna}(CBGFDE)$$

Een analoge eigenschap, ook toegeschreven aan Hippocrates, kan worden afgeleid voor een gelijkbenig trapezium *ABCD* gevormd door de middellijn van een cirkel en drie 'daarop volgende' zijden van een in die cirkel beschreven regelmatige zeshoek.
Dan is de oppervlakte van het trapezium gelijk aan de som van de oppervlaktes van de maantjes gevormd door de omcirkel van het trapezium en de op de zijden van de zeshoek beschreven (halve) cirkels, vermeerderd met de oppervlakte van de halve cirkel op een zijde van de zeshoek.



figuur 3

In figuur 3 geldt:

$$AD^2 = (2R)^2 = 4R^2 = (AB^2 + BC^2 + CD^2) + AE^2$$

De oppervlaktes van cirkels (dus ook die van halve cirkels) verhouden zich als de kwadraten van de middellijnen, dus:

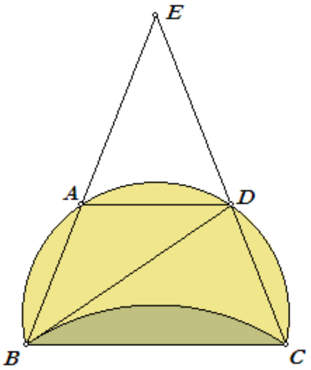
$$\textit{sector}(ADCB) = 3 \times \textit{sector}(ABH) + \textit{sector}(AEF)$$

Trekken we van beide zijden van deze uitdrukking drie keer *segment*(*ABG*) af, dan vinden we:

$$\textit{trapezium}(ADCB) = 3 \times \textit{luna}(AGBH) + \textit{sector}(AEF)$$

Hippocrates bekeek ook (en weer volgens Simplikios en Eudemos) een maantje waarvan de buitenomtrek *groter* is dan een halve cirkelomtrek; zie [5; deel I, pag. 29]. Hij construeert daartoe een gelijkbenig trapezium *ABCD* (***zie figuur 4a***) waarvan voor de grootste zijde *BC* geldt:

$$BC^2 = 3 \cdot AB^2$$



figuur 4a

De kleine cirkelomtrek van het maantje is gelijkvormig met dat van de drie op de gelijke zijden van het trapezium staande cirkelsegmenten.

Dat de 'buitenste' cirkelboog *CDAB* groter is dan een halve cirkelomtrek wordt bewezen door op te merken dat hoek *BAD* stomp is (de verlengden van de lijnen *BA* en *CD* snijden elkaar aan de kant van *AD*). Daaruit volgt dan voor de diagonaal *BD*:

$$BD^2 > 2 \cdot AB^2$$

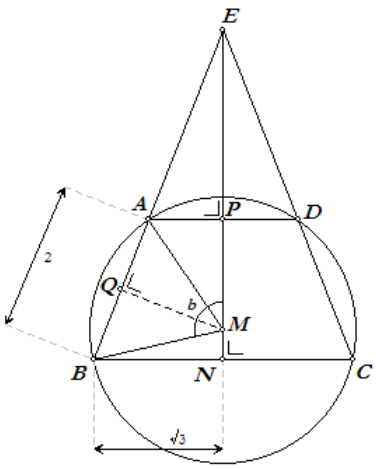
zodat uit: $BC^2 = 3 \cdot AB^2 = 2 \cdot AB^2 + CD^2$

volgt dat: $BC^2 < BD^2 + CD^2$

Hieruit volgt dan weer dat de overstaande hoek *BDC* scherp is, waardoor het segment *CDAB* groter is dan een halve cirkel.

Het bewijs dat *luna*(*BCDA*) = *trapezium*(*ABCD*) verloopt analoog aan het bovenstaande.

Met moderne middelen (zoals de goniometrie) kunnen we redelijk eenvoudig de grootte van de grote (en indien gewenst ook van de kleine) cirkelboog van het maantje *BCDA* berekenen; ***zie figuur 4b***.



figuur 4b

We stellen *AB* = *AD* = 2, zodat *BN* = √3 en we berekenen op basis hiervan sin *BMP* = *BN* / *BM*.

M is het snijpunt van de middelloodlijnen van de lijnstukken *AB* en *AD* en dus het middelpunt van de omcirkel van ABCD.

Nu is: *MEQ* ~ *AEP* (*hh*), zodat:

$$MQ : AP = EQ : EP$$

zodat: $MQ = (AP \cdot EQ) \,/\, EP = EQ \,/\, EP$

Ook hebben we:

$$EA : EB = 1 : \sqrt{3}, \text{ of } EA : (EA + 2) = 1 : \sqrt{3}$$

zodat: $EA = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

En: $EQ = EA + AQ = \frac{2}{\sqrt{3}-1} + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

Verder is ook: $EP = \sqrt{AE^2 - AP^2} = \sqrt{\frac{4}{(\sqrt{3}-1)^2} - 1} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$

Zodat: $MQ = \frac{EQ}{EP} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

En daarmee is: $BM = AM = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}} + 1} = \frac{\sqrt{4+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

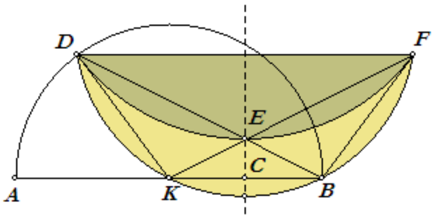
Voor de halve middelpuntshoek $b = \angle BMP$ op boog *CDAB* vinden we dan:

$$\sin b = \frac{BM}{BN} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{4+4\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{2\sqrt{1+\sqrt{3}}}$$

waaruit volgt: $b \approx 102{,}8°$

We zullen deze waarde van *b* terugzien in paragraaf 4.

Om een maantje te krijgen waarvan de grote cirkelboog *kleiner* is dan een halve cirkelomtrek, construeert Hippocrates een cirkel met middellijn AB (middelpunt K), trekt de middelloodlijn van het lijnstuk KB en bepaalt daarop het punt E zó, dat voor het op de cirkel liggende punt D geldt dat $DE^2 = 1\frac{1}{2} \cdot KB^2$, én dat de lijn DE door B gaat [c]; ***zie figuur 5a***.



figuur 5a

De lijn door D evenwijdig met AB snijdt de lijn KE in het punt F.
Het maantje wordt nu begrensd door de omcirkel van het gelijkbenige trapezium $DKBF$ en de omcirkel van driehoek DEF.
Nu geldt:

$$luna(DKBFE) = driehoek(DKE) + driehoek(EKB) + driehoek(BFE)$$

Eenvoudig is in te zien dat bg(DK) = bg(KB) = bg(BF) en dat bg(DE) = bg(EF).

Nu is (volgens het gegeven): $3 \cdot KB^2 = 2 \cdot DE^2$

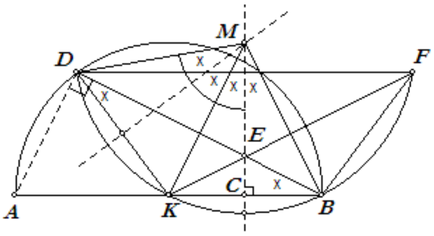
of: $DK^2 + KB^2 + BF^2 = DE^2 + EF^2$

En dan is: $segment(DK) + segment(KB) + segment(BF) = segment(DE) + segment(EF)$

Ook is: $luna(DKBFE) = 3segmenten + vijfhoek(DKBFE) - 2segmenten$

Zodat: $luna(DKBFE) = vijfhoek(DKBFE)$

Zij nu M het middelpunt van de omcirkel van trapezium $DKBF$.



figuur 5b

We stellen verder $KB = 1$. Dan is $DE = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.
Vierhoek $CEDA$ is een koordenvierhoek, immers

$$\angle C = \angle D = 90°$$

Voor het punt B buiten de omcirkel van $CEDA$ geldt dan:

$$BE \cdot BD = BC \cdot BA$$

Of: $$BE \cdot (BE + \sqrt{1\tfrac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Zodat: $$BE^2 + \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot BE - 1 = 0$$

En dan is: $$BE = \frac{-\sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{1\frac{1}{2} + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{5\frac{1}{2}}}{2}$$

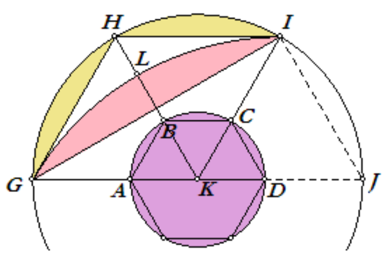
Zodat: $$BD = BE + ED = \frac{-\sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{5\frac{1}{2}}}{2} + \sqrt{1\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5\tfrac{1}{2}} + \sqrt{1\tfrac{1}{2}}) = \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{4}$$

Voor de halve middelpuntshoek $b = \angle CMD$ op de boog $DKBF$ geldt dan in driehoek ABD:

$$\cos \tfrac{1}{3} b = \frac{BD}{BA} = \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{8}$$

Zodat: $$b \approx 80{,}4°$$

Ook deze waarde van b zullen we terugzien in paragraaf 4.



figuur 6

Hippocrates kwadreerde ook een maantje samen met een cirkel.
In figuur 6 zien we twee cirkels met middelpunt K met ingeschreven zeshoeken $ABC\ldots$ en $GHI\ldots$
De boog GLI is gelijkvormig met de boog op GH.
Voor de stralen GK (= GH), AK (= AB) geldt verder:

$$GH^2 = 6 \cdot AB^2$$

En dan is ook: $GI^2 + (IJ)^2 = (GJ)^2 = (2 \cdot GK)^2 = 4 \cdot GH^2$

Zodat, met $GH = IJ$: $GI^2 = 3 \cdot GH^2 = 2 \cdot GH^2 + GH^2$
En daarmee: $segment(GIL) = 2 \cdot segment(GH) + 6 \cdot segment(AB)$
Of: $segment(GIL) = segment(GH, HI) + segment(AB, BC, \ldots)$
Tellen we aan beide zijden van deze identiteit de oppervlakte van de kromlijnige figuur *GLIH* erbij, dan vinden we:

$$driehoek(GIH) = luna(GLIH) + segment(AB, BC, \ldots)$$

En tellen we tenslotte *zeshoek*(*ABC…*) er aan beide kanten bij, dan is:

$$driehoek(GIH) + zeshoek(ABC\ldots) = luna(GLIH) + cirkel(AD)$$

3. Algemene behandeling

De oppervlakte van een maantje kan in het algemeen worden opgevat als het *verschil* van de oppervlaktes van de twee cirkelsegmenten die behoren bij de begrenzende cirkelbogen (een dergelijk maantje heet wel *concaaf*; zie de Opmerking aan het einde van deze paragraaf voor *convexe* maantjes).
Zo is ***in figuur 1***:

$$A = luna(CEDF) = segment(CDF) - segment(CDE) \qquad (1a)$$

Nu geldt voor het segment *CDF*:

$$segment(CDF) = sector(BDFC) - driehoek(BDC)$$

Omdat de oppervlakte van een cirkel met straal r gelijk is aan πr^2, is:

$$segment(BDFC) = \tfrac{2b}{2\pi} \cdot \pi r^2 = br^2$$

waarbij b de grootte is van de halve middelpuntshoek van sector *BDFC* (op boog *DFC*).
Voor de oppervlakte van driehoek *BDC* hebben we:

$$driehoek(BDC) = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \sin(2b)$$

Zodat: $$segment(CDF) = br^2 - \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \sin(2b)$$

Op dezelfde manier vinden we, met a als grootte van de halve middelpuntshoek op boog *CED*:

$$segment(CDE) = aR^2 - \tfrac{1}{2} R^2 \cdot \sin(2a)$$

Zodat: $$A = (br^2 - aR^2) + (\tfrac{1}{2} R^2 \sin 2a - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2b) \qquad (1b)$$

Bekijken we Hippocrates' methode, dan zien we dat we onze berekeningen kunnen vereenvoudigen door ons te beperken tot die gevallen waarin het 'trancendente deel' in (1b) wegvalt; dus:

$$aR^2 = br^2 \qquad (2)$$

Met deze beperking gaat (1b) over in:

$$A = \tfrac{1}{2} R^2 \sin(2a) - \tfrac{1}{2} r^2 \sin(2b) \qquad (3)$$

Zonder de algemeenheid geweld aan te doen kunnen we nu bijvoorbeeld stellen dat $r = 1$.
Omdat we R met passer en liniaal willen kunnen construeren uit r, moet voor zekere *rationale* getalwaarde t gelden:

$$R^2 = t \cdot r^2 = t \qquad (4a)$$

zodat: $$R = \sqrt{t} \qquad (4b)$$

Met (4a) en $r = 1$ gaat uitdrukking (2) over in:

$$b = t \cdot a \qquad (5)$$

Uitdrukking (3) geeft dan met (4a) en (5):

$$A = \tfrac{1}{2} t \cdot \sin(2a) - \tfrac{1}{2} \sin(2ta) \qquad (6)$$

In figuur 1 geldt verder: $\sin a = \frac{\frac{1}{2}CD}{R}$, $\sin b = \frac{\frac{1}{2}CD}{r}$, zodat: $r \sin b = R \sin a$
En weer met $r = 1$ en volgens (4b) en (5) geeft dit de belangrijke betrekking:

$$\boxed{\sin(t\cdot a)=\sqrt{t}\cdot\sin a} \tag{7}$$

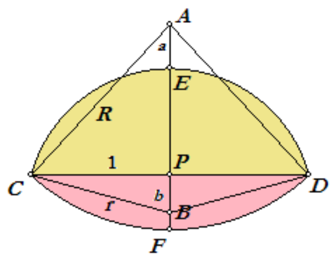
Met (7) volgt uit (6) voor de oppervlakte van het maantje ***in figuur 1***:

$$A=t\cdot\sin a\sqrt{1-\sin^2 a}-\sqrt{t}\cdot\sin a\sqrt{1-t\cdot\sin^2 a}$$

of:
$$\boxed{A=\sqrt{t}\cdot\sin a\cdot\left(\sqrt{t-t\cdot\sin^2 a}-\sqrt{1-t\cdot\sin^2 a}\right)} \tag{8}$$

Het gaat er nu om vergelijking (7) op te lossen naar $\sin a$ (waarbij $0<a<\pi$) voor mogelijke *rationale* waarden van *t*, en daarna, met de gevonden waarde van $\sin a$, via uitdrukking (8) de oppervlakte A te berekenen.

Opmerking



figuur 7

Als het maantje *convex* is (***zie figuur 7***), dwz. als de bogen aan *verschillende* kanten van de gemeenschappelijke koorde *CD* (met hier *CD* = 2) liggen, dan is:

$$A=br^2+aR^2-\tfrac{1}{2}r^2\sin 2b-\tfrac{1}{2}R^2\sin 2a$$

Met $R=\frac{1}{\sin a}$, $r=\frac{1}{\sin b}$ gaat deze relatie over in:

$$A+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2a}{\sin^2 a}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2b}{\sin^2 b}=\frac{b}{\sin^2 b}+\frac{a}{\sin^2 a}$$

of:
$$a\sin^2 b+b\sin^2 a=(A+\cot a+\cot b)\cdot\sin^2 a\cdot\sin^2 b$$

Stellen we nu verder, voor 'eenvoudige' construeerbaarheid, $a = m\theta$, $b = n\theta$ (voor zekere gehele getallen m, $n\geq 1$ en $\theta\neq 0$), dan is:

$$\theta=\frac{(A+\cot m\theta+\cot n\theta)\cdot\sin^2 m\theta\cdot\sin^2 n\theta}{m\sin^2 n\theta+n\sin^2 m\theta}$$

Als er inderdaad sprake is van een kwadreerbaar maantje, dan zijn alle termen in het rechter lid van deze uitdrukking met passer en liniaal te construeren, en daarmee *algebraïsch*.
Immers, de afstanden van *A*, *B* tot *CD* zijn opvolgend gelijk aan:

$$AP=\cot a=\cot m\theta,\quad BP=\cot b=\cot n\theta$$

en dus algebraïsch. Maar dan geldt dat ook voor $\sin a=\sin m\theta$ en $\sin b=\sin n\theta$.
En dan is θ (in het linker lid van de bedoelde uitdrukking) ook algebraïsch.
Evenwel, er geldt de volgende stelling (voor het bewijs zie [d]):

*Als $\theta\neq 0$ is, dan kunnen θ en $\sin\theta$ **niet beide** algebraïsch zijn.*

Hieruit volgt dat *convexe* maantjes *niet kwadreerbaar* zijn! ♦

4. Berekeningen voor vijf rationale waarden van *t*

➢ Met ***t*** = 2 geeft (7): $\sin 2a=\sqrt{2}\cdot\sin a$

Zodat $2\sin a\cos a=\sqrt{2}\cdot\sin a\ \Rightarrow\ \cos a=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

waaruit volgt dat: $\sin a=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Zodat uit (8) volgt:

$$A=\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-2\cdot\tfrac{1}{2}}-\sqrt{1-2\cdot\tfrac{1}{2}}=1$$

En dit komt overeen met het eerder hierboven gevonden resultaat van Hippocrates:

a = 45°; $b = 2a$ = 90°; A = 1 ♦

➤ Met t = 3 geeft (7): $$\sin 3a = \sqrt{3} \cdot \sin a \qquad (9)$$

Nu is $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$, waardoor (9) overgaat in:

$$3\sin a - 4\sin^3 a = \sqrt{3} \cdot \sin a$$
$$3 - 4\sin^2 a = \sqrt{3}$$
$$4\sin^2 a = 3 - \sqrt{3}$$

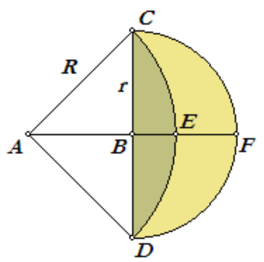
en dus: $$\sin a = \tfrac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

De oppervlakte van het maantje, zie uitdrukking (8), is met deze waarde van $\sin a$ gelijk aan:

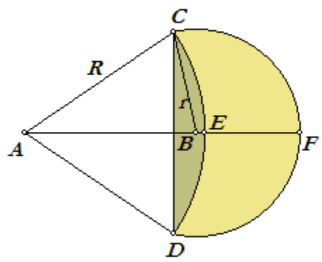
$$A = \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{3 - 3 \cdot \tfrac{3-\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{1 - 3 \cdot \tfrac{3-\sqrt{3}}{4}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{9 - 3\sqrt{3}} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-5 + 3\sqrt{3}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{18\sqrt{3}} - \sqrt{42\sqrt{3} - 72}\right)$$

Hierbij is: $a \approx 34{,}3°;\ b = 3a \approx 102{,}8°;\ A \approx 1{,}18$ ♦

In ***figuur 8a*** en ***figuur 8b*** zijn de maantjes voor t = 1 en t = 2 weergegeven. Daarbij is $BC = r = 1$.



figuur 8a (*t* = 1)



figuur 8b (*t* = 2)

➤ Voor $t = 1\tfrac{1}{2}$ hebben we: $$\sin 1\tfrac{1}{2}a = \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot \sin a \qquad (10)$$

We stellen nu $c = \frac{a}{2}$, zodat $a = 2c$ en $ta = 1\tfrac{1}{2}a = 3c$. Dan vinden we voor uitdrukking (10):

$$\sin 3c = \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot \sin 2c$$

Of:

$$3\sin c - 4\sin^3 c = \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot 2\sin c\cos c$$
$$3 - 4\sin^2 c = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 c}$$

Kwadrateren van deze laatste vergelijking geeft, onder voorwaarde dat $3 - 4\sin^2 c \geq 0$:

$$9 - 24\sin^2 c + 16\sin^4 c = 6 - 6\sin^2 c$$
$$16\sin^4 c - 18\sin^2 c + 3 = 0 \qquad (11)$$

Dit is een vierkantsvergelijking in $\sin^2 c$, zodat:

$$\sin^2 c = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 64 \cdot 3}}{32} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{16}$$

Alleen $\sin^2 c = \frac{9-\sqrt{33}}{16}$ voldoet aan (11), vanwege de daarbij geformuleerde voorwaarde. We vinden aldus: $$2 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - \cos a = \frac{9 - \sqrt{33}}{8}$$

En dan is: $$\cos a = \frac{8 - 9 + \sqrt{33}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$

zodat: $$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{(-1+\sqrt{33})^2}{64}} = \tfrac{1}{8}\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}$$

Uitdrukking (8) geeft op basis hiervan:

$$A = \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{8}\sqrt{30+2\sqrt{33}}\left(\sqrt{1\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{33}}{8} - \sqrt{1-1\tfrac{1}{2} \cdot \frac{30+2\sqrt{33}}{64}}\right)$$

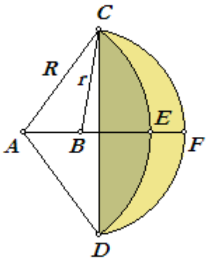
$$A = \tfrac{1}{8}\sqrt{30+2\sqrt{33}}\left(\tfrac{-3+3\sqrt{33}}{16} - \tfrac{1}{16}\sqrt{6} \cdot \sqrt{64-45-3\sqrt{33}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}\sqrt{30+2\sqrt{33}}\left(\tfrac{3}{16}(-1+\sqrt{33}) - \tfrac{1}{16}\sqrt{6} \cdot \sqrt{19-3\sqrt{33}}\right)$$

of ook: $$A = \tfrac{1}{32}(-3+\sqrt{33})\sqrt{30+2\sqrt{33}}$$

Hierbij is: $$a \approx 53{,}6°;\ b = 1\tfrac{1}{2}a \approx 80{,}4°;\ A \approx 0{,}55$$ ♦

In figuur 9 is het maantje voor $t = 1\tfrac{1}{2}$ weergegeven, met $BC = r = 1$.



figuur 9 (*t* = 1½)

Zoals we in paragraaf 2 gezien hebben, waren de hierboven behandelde gevallen met $t = 2$, $t = 3$ en $t = 1\tfrac{1}{2}$ (althans voor wat hun constructie betreft) ook aan Hippocrates en zijn opvolgers bekend.
Maar er zijn nóg twee waarden van t waarvoor het bijbehorende maantje kwadreerbaar is.

➢ Met $t = 5$ gaat uitdrukking (7) over in:

$$\sin 5a = \sqrt{5} \cdot \sin a \qquad (12)$$

Nu is $\sin 5a = 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a$ en daarmee vinden we uit (12), na deling door $\sin a$:

$$16\sin^4 a - 20\sin^2 a + 5 - \sqrt{5} = 0$$

Dit is een vierkantsvergelijking in $\sin^2 a$, zodat:

$$\sin^2 a = \frac{20 \pm \sqrt{400-320+64\sqrt{5}}}{32} = \frac{20 \pm \sqrt{16 \cdot (5+4\sqrt{5})}}{32} = \tfrac{1}{8}\left(5 \pm \sqrt{5+4\sqrt{5}}\right)$$

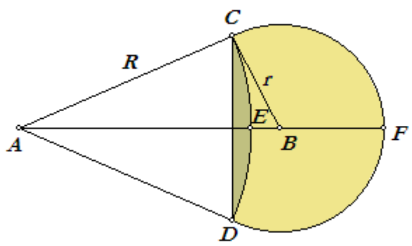
Het plusteken in de laatste uitdrukking leidt tot een waarde van $\sin^2 a$ die groter is dan 1.

We hebben daarmee: $$\sin a = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5+4\sqrt{5}}} \quad (\approx 0{,}3978)$$

Hieruit vinden we: $$a \approx 23{,}4°;\ b = 5a \approx 117{,}2°$$

Voor de oppervlakte A van het bijbehorende maantje vinden we met (8), na wat rekenwerk:

$$A \approx 1{,}42$$



figuur 10 (*t* = 5)

➢ En voor $t = \tfrac{5}{3}$ vinden we uit (7) de vergelijking:

$$\sin\tfrac{5}{3}a = \sqrt{\tfrac{5}{3}}\cdot\sin a$$

Met $a = 3c$ gaat deze vergelijking over in $\sin 5c = \sqrt{\tfrac{5}{3}}\cdot\sin 3c$, zodat:

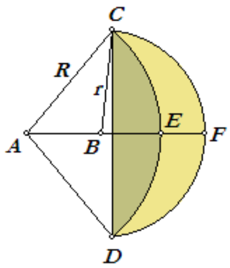
$$5\sin c - 20\sin^3 c + 16\sin^5 c = \sqrt{\tfrac{5}{3}}\cdot(3\sin c - 4\sin^3 c)$$
$$5 - 20\sin^2 c + 16\sin^4 c = \sqrt{\tfrac{5}{3}}\cdot(3 - 4\sin^2 c)$$
$$16\sin^4 c - (20 - 4\sqrt{\tfrac{5}{3}})\sin^2 c + 5 - 3\sqrt{\tfrac{5}{3}} = 0$$
$$16\sin^4 c - \tfrac{4}{3}(15 - \sqrt{15})\sin^2 c + (5 - \sqrt{15}) = 0$$

En dit is een kwadratische vergelijking in sin²*c*. We hebben dan:

$$\sin^2 c = \frac{\frac{4}{3}(15-\sqrt{15}) \pm \sqrt{\frac{16}{9}(15-\sqrt{15})^2 - 4\cdot 16\cdot(5-\sqrt{15})}}{32} = \frac{(15-\sqrt{15}) \pm \sqrt{(15-\sqrt{15})^2 - 36(5-\sqrt{15})}}{24}$$

of:
$$\sin^2 c = \frac{(15-\sqrt{15}) \pm \sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}$$

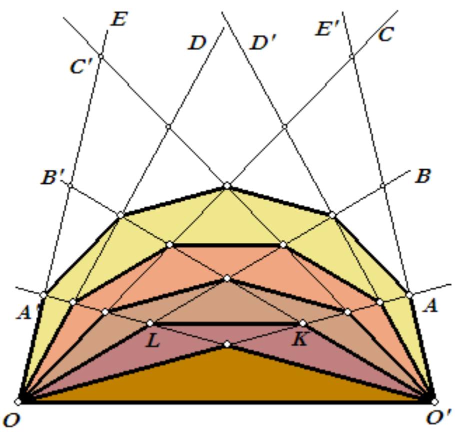
We zien dat we sin²*c* met passer en liniaal kunnen construeren, dan ook sin *c*, dus ook hoek *c* en daarmee eveneens hoek $a = 3c$.
De benaderde waarden van sin *c* zijn opvolgend 0,9186 (plusteken) en 0,2898 (minteken).
Deze waarden geven voor $a = 3c$ opvolgend 200,2° en 50,4°. De eerste waarde (200,2°) van *a* is te groot (die waarde is groter dan 180°).
Zodat we voor $t = \tfrac{5}{3}$ vinden: $a \approx 50{,}4°;\ b = \tfrac{5}{3}a \approx 84{,}0°$ ♦



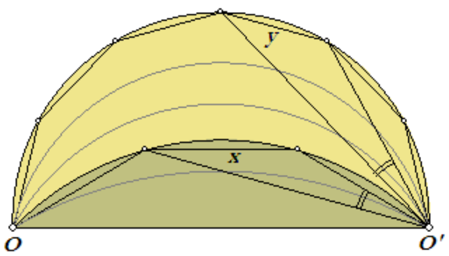
figuur 11 **(*t* = ⁵/₃)**

5. Een andere kijk

Knorr doet in [9; pag. 36 e.v.] een poging de constructies van Hippocrates in een algemeen (moderner) kader te plaatsen.
Uitgaande van een lijnstuk *OO'* tekent hij halve lijnen *OA*, *OB*, … en *O'A'*, *O'B'*, … die gelijke hoeken met elkaar maken (***zie figuur 12a***). Er kunnen dan veelhoeken worden gevormd door geschikte snijpunten van deze lijnen te kiezen.



figuur 12a



figuur 12b

Bijvoorbeeld. Is K het snijpunt van OA en $O'B'$ en L dat van $O'A'$ en OB, dan is $OO'KL$ een vierhoek waarvan de zijden $O'K$, KL, LO aan elkaar gelijk zijn.
Op deze manier kunnen we andere veelhoeken vinden, elk met zoveel gelijke zijden als we willen. Bekijken we nu de cirkelbogen die deel zijn van de omcirkels van twee van die veelhoeken (***zie figuur 12b***), dan vormen deze een maantje met n koorden van de kleine cirkel en m koorden van de grote cirkel. Geven we de koorde van de kleine cirkel aan met x en die van de grote cirkel met y, dan geldt op basis van de sinusregel:

$$x : y = \sin m\theta : \sin n\theta$$

waarbij θ de eerder genoemde gelijke hoek is tussen twee 'opvolgende' halve lijnen door O en O'.
Wil het maantje nu kwadreerbaar zijn, dan moet ook gelden:

$$n \cdot x^2 = m \cdot y^2$$

Of:

$$\boxed{n \cdot \sin^2 m\theta = m \cdot \sin^2 n\theta}$$

We bekijken deze relatie verder in paragraaf 7. De relatie is overigens equivalent met de in paragraaf 3 vermelde relatie (2).
Zodat:

$$\sin m\theta : \sin n\theta = \sqrt{m} : \sqrt{n}$$

Opmerking. Vergelijk deze uitdrukking voor $n = 1$ en $m = t$ met uitdrukking (7) hierboven. ♦

Geven we nu het algemene geval aan met $\mathcal{H}(m, n)$, dan zijn $\mathcal{H}(2, 1)$, $\mathcal{H}(3, 1)$ en $\mathcal{H}(3, 2)$ de constructies die gevonden zijn door Hippocrates.
De beide andere hierboven behandelde constructies zijn $\mathcal{H}(5, 1)$ en $\mathcal{H}(5, 3)$.

In later onderzoek (1903) is aangetoond, dat $\mathcal{H}(p, 1)$, waarbij p een priemgetal is, niet zijnde van de vorm $p = 2^{2^k} + 1$ (een zogenoemd Fermat-priemgetal), *niet* construeerbaar is (**Edmund Landau**, 1877-1938, Duitsland; zie [10]).
In 1929 (zie [11]) toonde **Ljubomir Chakaloff** (1886-1963, Bulgarije) aan dat ook $\mathcal{H}(p, n)$ waarbij $n = 1, 2, 3, \ldots, p - 1$ (met p priem, niet zijnde een Fermat-priem), *niet* construeerbaar is.

6. Na 2500 jaar…

De maantjes voor $t = 1\frac{1}{2}$ en $t = \frac{5}{3}$ worden wel toegeschreven aan **Leonhard Euler** (1707-1783, Zwitserland). Hij beschreef ze in 1771 (***zie figuur 13***, die is overgenomen uit [6]).

I. Caſus $m = 45°$ et $n = 90°$
II. Caſus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ exiſtente
coſ. $\omega = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ vel coſ. $2\omega = 1 - \sqrt{3}$
III. Caſus $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ exiſtente
coſ. $\omega = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$ vel coſ. $2\omega = \frac{1 - \sqrt{33}}{16}$
IV. Caſus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ exiſtente
coſ. $\omega = \frac{\sqrt{(5 + 4\sqrt{5})} - 1}{4}$
V. Caſus $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ exiſtente
coſ. $\omega = \frac{\sqrt{15} - 3 + \sqrt{(60 + 6\sqrt{15})}}{12}$ vel coſ. $2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$.

figuur 13

Heath vermeldt in [7; pag. 200] dat de vijf genoemde kwadraturen reeds voorkomen in een dissertatie in 1766 van Martin Johan Wallenius (1731-1773, Finland). Maar, die dissertatie is geschreven door **Daniel Wijnquist** ("*Dissertatio gradualis, exhibens lunulas quasdam circulares quadrabiles*") onder leiding van Wallenius.

Het was **Thomas Clausen** (1801-1885, Denemarken) die in 1840 in een kort artikel het vermoeden uitsprak dat de hierboven behandelde vijf gevallen de *enige* kwadreerbare maantjes zijn (zie [4]): "*Ich glaube schwerlich, dass sich die Größen, die die Winkel der, andern Verhältnisse entsprechenden Ausschnitte bestimmen, geometrisch finden lassen.*"

Het zou evenwel tot 1948 duren voor een definitief bewijs van het door Clausen geuite vermoeden werd geleverd door **N.G. Chebotarev** (1894-1947, Rusland) en diens student **A.V. Dorodnov**, een bewijs dat in hoofdzaak gebaseerd is op de Galois-theorie. De laatste heeft het gedeeltelijk bewijs van Chebotarev uit 1934 (zie [12]) na diens dood in 1947 aangevuld (en gepubliceerd in 1948). Een schets van een bewijs staat in paragraaf 7.
Daarmee was dus een bijna 2500 jaar oud meetkundig topic afgerond.

7. Tot slot

We gaan uit van de relatie (zie paragraaf 5):

$$n \cdot \sin^2 m\theta - m \cdot \sin^2 n\theta = 0 \tag{13}$$

Daarbij is, met $m > n \geq 1$ en geheel: $a = m\theta, \quad b = n\theta$

Nb. Hiermee is in tegenstelling tot het bovenstaande steeds: $a > b$.

Voor $z = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ hebben we:

$$\frac{(z^k - 1)^2}{4z^k} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{z^{2k} - 2z^k + 1}{z^k} = \tfrac{1}{4}(z^k - 2 + z^{-k})$$

En na substitutie:

$$\begin{aligned}\frac{(z^k - 1)^2}{4z^k} &= \tfrac{1}{4}\big(\cos(2k\theta) + i\sin(2k\theta) - 2 + \cos(-2k\theta) + i\sin(-2k\theta)\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(2\cos(2k\theta) - 2\big) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(2k\theta) - 1\big) \\ &= -\sin^2 k\theta\end{aligned} \tag{14}$$

Voor $k = m$ cq. $k = n$ gaat (13) via (14) over in:

$$-n \cdot \tfrac{(z^m - 1)^2}{4z^m} + m \cdot \tfrac{(z^n - 1)^2}{4z^n} = 0$$

$$-n \cdot z^n (z^m - 1)^2 + m \cdot z^m (z^n - 1)^2 = 0$$

Dus:

$$\boxed{n(z^m - 1)^2 - mz^{m-n}(z^n - 1)^2 = 0} \tag{15}$$

Vergelijking (15) moet nu teruggebracht kunnen worden (reduceerbaar zijn) tot een vergelijking van de tweede graad waarvan de coëfficiënten rationaal cq. een ketting van vierkantswortels zijn, wil er sprake zijn van construeerbaarheid van het betreffende maantje. Immers, is een wortel z van (15) construeerbaar, dan is 2θ construeerbaar, en daarmee, via θ, ook a en b.
De kwadratuur van de maantjes is dus equivalent met de construeerbaarheid van de *complexe* wortels van vergelijking (15).

Merk ook op dat voor een oplossing $z = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ van (15) moet gelden:

$$|z| = 1 \text{ én } 0 < 2\theta < \tfrac{1}{2}\pi \tag{16}$$

Opmerking. De betekenis van $|z| = 1$ voor de complexe wortels z_1, z_2 van een vierkantsvergelijking is dat $|z_1 \cdot z_2| = 1$. ♦

- Bewezen kan worden dat (15) *niet* reduceerbaar is voor een *samengesteld* getal m, behalve als $m = 9$, $n = 1$. Het bewijs van deze eigenschap zullen we hier niet geven.
- Ook als $m = p$ met p priem en $p \geq 6$, is (15) *niet* reduceerbaar; we bewijzen dat evenmin.

Rest ons $\mathcal{H}(m, n)$ te onderzoeken voor:
- $m = 2$, $m = 3$, $m = 5$, elk met $1 \le n < m$ en n eveneens geheel;
- $m = 9$, $n = 1$.

➢ $m = 2$, $n = 1$, dus $\mathcal{H}(2, 1)$
Vergelijking (15) gaat daarmee over in:

$$(z^2-1)^2-2z(z-1)^2=0$$
$$(z-1)^2(z+1)^2-2z(z-1)^2=0$$
$$z^2+2z+1-2z=0$$

Zodat: $$z^2+1=0$$
En dat geeft:

$$(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^2+1=0$$
$$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = \text{-}1$$

En hieruit volgt: $$\theta = 45° \quad\Rightarrow\quad a = 90°;\ b = 45°$$ ♦

➢ $m = 3$, $n = 1$, dus $\mathcal{H}(3, 1)$
Dit geeft in (15):

$$(z^3-1)^2-3z^2(z-1)^2=0$$
$$(z-1)^2(z^2+z+1)^2-3z^2(z-1)^2=0$$
$$(z^2+z+1)^2-3z^2=0$$

Zodat: $$\left(z^2+(1+\surd 3)z+1\right)\left(z^2+(1-\surd 3)z+1\right)=0$$
De eerste factor heeft twee reële wortels. Uit de tweede factor volgt:

$$z=\tfrac{1}{2}(\surd 3-1)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\text{-}2\surd 3}$$

Zodat: $$\cos 2\theta=\tfrac{1}{2}(\surd 3-1)\quad\Rightarrow\quad 2\theta=68{,}5°\quad\Rightarrow\quad a=102{,}8°;\ b=34{,}3°$$ ♦

➢ $m = 3$, $n = 2$, dus $\mathcal{H}(3, 2)$
Vergelijking (15) gaat dan over in:

$$2(z^3-1)^2-3z(z^2-1)^2=0$$
$$2(z^2+z+1)^2-3z(z+1)^2=0$$

Dus: $$2z^4+z^3+z+2=0$$
Deze vergelijking heeft vier imaginaire wortels; het linker lid laat zich als volgt splitsen in twee kwadratische factoren:

$$2\cdot(z^2+(\text{-}1{,}186...)z+1)(z^2+(1{,}686...)z+1)=0$$

Of ook: $$2\cdot\left(z^2-\tfrac{1}{4}(\surd 33-1)z+1\right)\left(z^2+\tfrac{1}{4}(\surd 33+1)+1\right)=0$$
Alleen de tweede factor geeft waarden van z die aan voorwaarde (16) voldoen, zodat:

$$\cos 2\theta=\tfrac{1}{8}(\surd 33-1)\quad\Rightarrow\quad 2\theta=53{,}6°\quad\Rightarrow\quad a=80{,}4°;\ b=53{,}6°$$ ♦

➢ $m = 5$, $n = 1$, dus $\mathcal{H}(5, 1)$
Dit geeft in (15):

$$(z^5-1)^2-5z^4(z-1)=0$$
$$(z^4+z^3+z^2+z+1)^2-5z^4=0$$

Of: $$\mathcal{E}(\pm\surd 5)\ \equiv\ z^4+z^3+(1\pm\surd 5)z^2+z+1=0$$

Nu is: $\mathcal{E}(+\surd 5) \equiv (z^2+(0,726...)z+(2,661...))(z^2+(0,273...)z+(0,375...))=0$

Geen van de complexe oplossingen van deze vergelijking voldoet aan (16).

En: $\mathcal{E}(-\surd 5) \equiv (z^2+(2,367...)z+1)(z^2+(-1,367...)z+1)=0$

De eerste factor geeft alleen reële wortels; de tweede factor geeft:

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5+4\surd 5}-1) \approx 0,6836 \quad\Rightarrow\quad 2\theta = 46,9° \quad\Rightarrow a = 117,2°;\ b = 23,4°$$ ♦

➢ m = 5, n = 2, dus $\mathcal{H}(5, 2)$

Dit geeft dan in (15):

$$2(z^5-1)^2-5z^3(z^2-1)^2=0$$

$$2(z^4+z^3+z^2+z+1)^2-5z^3(z+1)^2=0$$

Of: $$2z^8+4z^7+6z^6+3z^5+3z^3+6z^2+4z+2=0$$

Het linker lid hiervan kan ontbonden worden in vier tweedegraads factoren met reële coëfficiën-ten:

$$2\cdot(z^2+(1,858...)z+1)(z^2+(1,192...)z+(2,353...))(z^2+(0,506...)z+(0,424...))(z^2+(-1,557...)z+1)$$

Er kan bewezen worden dat geen van die coëfficiënten kan worden teruggebracht tot een rationaal getal of tot een ketting van vierkantswortels (eigenlijk alleen van belang voor de *vijfde* factor).♦

➢ m = 5, n = 3, dus $\mathcal{H}(5, 3)$

Uit (15) krijgen we in dit geval:

$$3(z^5-1)^2-5z^2(z^3-1)^2=0$$

$$3(z^4+z^3+z^2+z+1)^2-5z^2(z^2+z+1)^2=0$$

Of: $$3z^8+6z^7+4z^6+2z^5+2z^3+4z^2+6z+3=0$$

En ontbonden:

$$3\cdot(z^2+(2,156...)z+1)(z^2+(1,375...)z+1)(z^2+(0,134...)z+1)(z^2+(-1,666...)z+1)=0$$

De tweede factor heeft twee reële wortels; de derde en de vierde factor voldoen niet aan (16). De vijfde factor laat zich schrijven als:

$$z^2-\tfrac{1}{2}\left(\surd\tfrac{5}{3}-1+\sqrt{\tfrac{20}{3}+\surd\tfrac{20}{3}}\right)z+1$$

zodat: $$\cos 2\theta = \tfrac{1}{4}\left(\surd\tfrac{5}{3}-1+\sqrt{\tfrac{20}{3}+\surd\tfrac{20}{3}}\right)$$

En dat geeft: $$2\theta = 33,6° \quad\Rightarrow\quad a = 84,0°;\ b = 50,4°$$ ♦

➢ m = 5, n = 4, dus $\mathcal{H}(5, 4)$

Uitdrukking (15) wordt nu:

$$4(z^5-1)^2-5z(z^4-1)^2=0$$

Dit geeft, na deling door $(z-1)^2$:

$$4z^8+3z^7+2z^6+z^5+z^3+2z^2+3z+4=0$$

En ontbonden:

$$4\cdot(z^2+(1,893...)z+1)(z^2+(0,923...)z+1)(z^2+(-0,329...)z+1)(z^2+(-1,737...)z+1)=0$$

Ook hier kan, evenals bij $\mathcal{H}(5, 2)$ het geval was, aangetoond worden dat geen van de coëfficiënten kan worden teruggebracht tot een rationaal getal of tot een ketting van vierkantswortels (eigenlijk alleen van belang voor de *vierde* en *vijfde* factor). ♦

➢ En ten slotte: m = 9, n = 1, dus $\mathcal{H}(9, 1)$.

Dit geeft in (15):

$$(z^9-1)^2-9z^8(z-1)^2=0$$

$$\mathcal{E}(\pm 3)\ \equiv\ (z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)^2-9z^8=0$$

Of:

$$\begin{cases}\mathcal{E}(\text{-}3)\ \equiv\ z^8+z^7+z^6+z^5-2z^4+z^3+z^2+z+1=0\\ \mathcal{E}(+3)\ \equiv\ z^8+z^7+z^6+z^5+4z^4+z^3+z^2+z+1=0\end{cases}$$

Ontbinding van uitdrukking $\mathcal{E}$(-3) geeft:

$$(z^2+(2{,}159...)z+1)(z^2+(0{,}387...)z+(1{,}935...))(z^2+(0{,}200...)z+(0{,}516...))\times$$
$$\times(z^2+(\text{-}1{,}747...)z+1)=0$$

Ontbinding van $\mathcal{E}$(+3) geeft:

$$(z^2+(2{,}211...)z+(2{,}143...))(z^2+(1{,}03...)z+(0{,}466...))(z^2+(\text{-}0{,}889...)z+(0{,}656...))\times$$
$$\times(z^2+(\text{-}1{,}353...)z+(1{,}522...))=0$$

Voor $\mathcal{E}$(-3) kan aangetoond worden dat geen van de coëfficiënten kan worden teruggebracht tot een rationaal getal of tot een ketting van vierkantswortels (eigenlijk alleen van belang voor de *vierde* factor). Bij $\mathcal{E}$(+3) voldoet geen van de complexe wortels aan (16). ♦

Zodat we kunnen concluderen:

Kwadreerbare maantjes bestaan alleen in de volgende vijf gevallen:

$\mathcal{H}$(2, 1), $\mathcal{H}$(3, 1), $\mathcal{H}$(3, 2), $\mathcal{H}$(5, 1), $\mathcal{H}$(5, 3)

7. Noten

[a] In 1882 bewees **Ferdinand (von) Lindemann** (1852-1939, Duitsland) via de identiteit van Euler $(e^{\pi i}+1=0)$ dat π een zogenoemd *transcendent getal* is ('*Ueber die Zahl π*'. In: *Mathematische Annalen*, Band 20, pp. 213-225). Later (in 1885; zie [14]) is deze eigenschap in algemener kader geplaatst door **Karl Weierstrass** (1815-1897, Duitsland).
Een *transcendent getal* is een getal dat *niet* de oplossing (wortel) is van een algebraïsche vergelijking met rationale coëfficiënten en eindig veel termen. Omdat elk getal dat met passer en liniaal te construeren is, aan zo'n vergelijking voldoet, kan zo'n constructie nooit tot de kwadratuur van de cirkel leiden: π, en dan ook $\sqrt{\pi}$, kan niet worden geconstrueerd.
Stelling van Lindemann-Weierstrass (zie bijvoorbeeld ook [1; pp. 6-8]): Zijn a_i $(i=1,\ldots,n)$ *verschillende* algebraïsche (dwz. reële of complexe) getallen en b_i $(i=1,\ldots,n)$ *willekeurige* algebraïsche getallen, dan geldt:

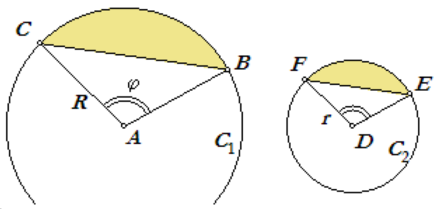
$$\sum_{i=1}^{n} b_i e^{a_i}=b_1\,\mathrm{e}^{a_1}+b_2\,\mathrm{e}^{a_2}+\cdots+b_n\,\mathrm{e}^{a_n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad b_i=0 \quad (i=1,\ldots,n)$$

Zou nu π algebraïsch zijn, dan is πi dat ook (immers, i is algebraïsch). Dan is volgens deze stelling (voor $n=2$ en $b_1=1$, $a_1=\pi i$, $b_2=1$, $a_2=0$):

$$1\cdot e^{\pi i}+1\neq 0$$

Maar dat is, gezien de vergelijking van Euler, onjuist. Dus π is niet-algebraïsch, en daarmee transcendent.
Weer wat later (in 1893) gaf **David Hilbert** (1862-1943, Pruisen) een bewijs voor het transcendent zijn van e en π op een andere manier ('*Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π*'. In: *Mathematische Annalen*, Band 43, pp. 216-219).

[b] Hoe Hippocrates de genoemde eigenschappen bewezen heeft, is uit de geschriften van zijn commentatoren niet duidelijk. Vermoedelijk gebruikte hij de aan Eudoxos toegeschreven *exhaustiemethode* (dat is de naam voor een door de Grieken toegepaste methode van oppervlaktebepaling waarbij indirect limietovergangen worden gebruikt).
Met de kennis die wij nu hebben, gaat het echter eenvoudig; ***zie figuur 14***.
Er geldt: $cirkel(C_1) : cirkel(C_2) = \pi R^2 : \pi r^2 = R^2 : r^2$
Dus ook, vanwege de gelijke middelpuntshoeken bij A en D:



$$sector(ABC) : sector(DEF) = R^2 : r^2$$
$$driehoek(ABC) : driehoek(DEF) = R^2 : r^2$$

Zodat:

$$segment(BC) : segment(EF) = R^2 : r^2$$

figuur 14

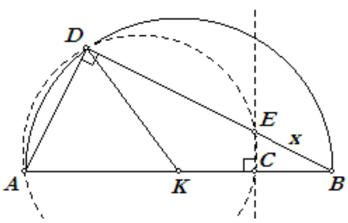
Bedoelde exhaustiemethode zien we in ieder geval op schrift gesteld bij het bewijs van Propositie XII-2 in de *Elementen* van **Euclides**; zie [5; deel II, pp. 225-237]. Deze propositie luidt:

[*De oppervlaktes van*] *cirkels staan tot elkaar als de vierkanten op de diameters.*

Het bewijs wordt daarbij geleverd door ingeschreven regelmatige veelhoeken van de cirkel te bekijken met telkens een verdubbeld aantal zijden.

[c] In de Griekse meetkunde gebruikte men voor een dergelijke constructie van het punt E een zogenoemde *neusisconstructie*: een constructie waarbij gebruik wordt gemaakt van een *gemerkte* liniaal.
Zie hiervoor bijvoorbeeld:
- *http://nl.wikipedia.org/wiki/Neusis* (WikipediA), of
- *http://mathworld.wolfram.com/NeusisConstruction.html* (MathWorld).

Op een liniaal wordt dan via twee merktekens de lengte van $DE = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot KB$ aangegeven, waarna het punt D op de cirkel en het punt E op de lijn wordt geplaatst en dan zo, dat de lijn DE door het punt B gaat.



figuur 15

Evenwel, in dit geval is een constructie met passer en liniaal *wel* mogelijk.
Daartoe gebruiken we in de eerste plaats het feit dat vierhoek $CEDA$ een koordenvierhoek is (***zie figuur 15***).
Dan geldt:

$$BE \cdot BD = BC \cdot BA$$

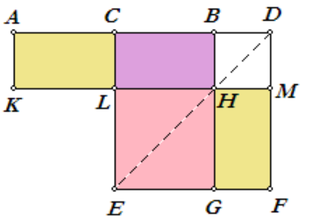
Stellen we nu $BE = x$ en $KB = 1$ (zoals we verderop in het artikel ook zullen doen), dan is:

$$x \cdot (\sqrt{\tfrac{3}{2}} + x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Of: $$(\sqrt{\tfrac{3}{2}} + x) \cdot x + (\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}})^2 = 1 + \tfrac{3}{8} = \tfrac{11}{8} = (\sqrt{\tfrac{11}{8}})^2$$

De reden voor deze laatste schrijfwijze is dat er, met de zo geschreven vergelijking, een oud-Griekse constructie bestaat voor het lijnstuk x. Die constructie is gebaseerd op Propositie II-6 in de *Elementen* van Euclides (zie [5; deel II, pag. 5] of [8]):
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar

toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de heele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft, gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



figuur 16

Met 'andere woorden' (***zie figuur 16***):

rechthoek($ADMK$) + *vierkant*($LHGE$) = *vierkant*($CDFE$)

Hierbij is C het midden van AB.
Stellen we $AB = a$, $BD = x$ en is *vierkant*($CDFE$) = b^2, dan staat er: $(a + x) \cdot x + (\frac{1}{2}a)^2 = b^2$

Nemen we ***in figuur 16*** $AB = \sqrt{\frac{3}{2}}$ en $CD = \sqrt{\frac{11}{8}}$, dan kan de lengte van het lijnstuk $BD = x$ (overeenkomend met het lijnstuk BE ***in figuur 5a***) eenvoudig worden geconstrueerd.

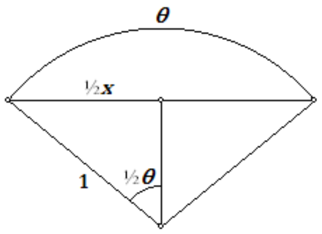
[d] Deze stelling is af te leiden uit de Stelling van Lindemann-Weierstrass (SLW). Zie [a].
Er geldt (per definitie): $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -\frac{1}{2}ie^{i\theta} + \frac{1}{2}ie^{-i\theta}$
Kiezen we nu in SLW met $n = 3$, waarbij we *veronderstellen* dat $\theta\,(\neq 0)$ algebraïsch is:

$$b_1 = -\tfrac{1}{2}i,\ a_1 = i\theta,\ b_2 = -b_1,\ a_2 = -a_1,\ b_3 = -x,\ a_3 = 0$$

(merk op dat hier $x \neq 0$ is), dan is volgens de SLW de vergelijking:

$$\sin\theta - x = 0$$

een *valse* vergelijking (dus niet oplosbaar): $\sin\theta$ is daarmee niet-algebraïsch, dus transcendent.



figuur 17

N.b. De vergelijking:

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}x$$

is dan evenmin oplosbaar (***zie figuur 17***), met als gevolg:

een cirkelboog θ waarvan de koorde algebraïsch is, is dus niet-algebraïsch, dus transcendent.

Overigens, Weierstrass geeft bovenstaand bewijs, zij het in een iets afwijkende vorm, in [14; pp. 1085-1086] als afsluiting van zijn artikel, waarbij hij opmerkt: "(…) eben so wenig ist der zu einem solchen Bogen gehörige Kreissector durch ein derartige Construction quadrirbar."

8. Literatuur

[1] A. Baker (1975): *Transcendental Number Theory*. Cambridge (USA): Cambridge University Press.

[2] A. Bogomolny: *Hippocrates' Squaring of a Lune*. Op: *Cut The Knot* (website); zie: *www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PythagoreanLune.shtml*

[3] L.H.N. Bunt (1954): *Van Ahmes tot Euclides*. Groningen: J.B. Wolters N.V. (4e druk, 1963); pp. 75-81.

[4] Th. Clausen (1840): *Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrierbar ist*. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 21; pp. 375–376.

[5] E.J. Dijksterhuis (1929): *De Elementen van Euclides*, deel I en II. Groningen: P. Noordhoff N.V.

[6] L. Euler (1771): *Considerationes cyclometricae*. In: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 16 (1772); pp. 160-170.

[7] T.L. Heath (1921): *A History of Greek Mathematics*, volume I. New York: Dover Publications Inc. (reprint 1981); pp. 183-200.

[8] D. Klingens (1999): *Boek II*. Op: *www.pandd.demon.nl/propII.htm#3* (website).

[9] W.R. Knorr (1945): *The ancient tradition of geometric problems*. New York: Dover Publications Inc. (reprint 1993).

[10] E. Landau (1903): *Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke*. In: *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, Band 2; pp. 1-6.

[11] L. Tschakaloff (1926): *Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke.* In: *Mathematische Zeitschrift*, Band 30; pp. 552-559.

[12] N. Tschebotaröw (1934): *Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke I*. In: *Mathematische Zeitschrift*, Band 39; pp. 161-175.

[13] B.L. van der Waerden (1950): *Ontwakende wetenschap*. Groningen: P. Noordhoff N.V.

[14] K. Weierstrass (1885): *Zu Lindemann's Abhandlung - Über die Ludolph'sche Zahl*. In: *Berichte der Berliner Akademie*, Band 5; pp. 1067-1085.

[15] --: *The Five Squarable Lunes*. Op: *www.mathpages.com/home/kmath171.htm* (MathPages).

