Lagrange-polynomen

Dick Klingens
september 2004

1. Probleem

Van een functie *f* is, hetzij door meting, hetzij door berekening, slechts een eindig aantal functiewaarden (hier $n + 1$) bekend:

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

We willen deze (verder onbekende) functie benaderen door een veeltermfunctie φ_n van de n-de graad die voor de waarden $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ dezelfde waarden aanneemt als de functie *f*.
Deze probleemstelling wordt wel *interpolatie door een veelterm* genoemd.

Stelling

Er bestaat precies één veelterm die aan bovengenoemde eisen voldoet.
Bewijs:
Stel er is een tweede veelterm ψ_n met dezelfde eigenschap. Bekijk nu de functie $\theta_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$, die ook van de n-de graad is.
Nu is voor $i = 0, \ldots, n$:

$$\theta_n(x_i) = \varphi_n(x_i) - \psi_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

zodat θ_n $(n + 1)$ nulpunten x_i heeft en daardoor identiek gelijk is aan 0. Waaruit direct volgt dat $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$. □

Algebraïsche bepaling van φ_n

Een veelterm $\varphi_n(x)$ van de n-de graad die de nulpunten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heeft, kan worden voorgesteld door

$$\varphi_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

waarin a_0 vooralsnog onbepaald is.
De waarde van a_0 kan men vastleggen door de eis dat $\varphi_n(x)$ voor $x = x_0$ de waarde $f(x_0)$ heeft.
In dat geval is dan

$$f(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)$$

of

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

zodat de functie gedefinieerd door

$$f(x_0)L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

voor $x = x_0$ de waarde $f(x_0)$ aanneemt, en voor $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ gelijk is aan 0.
Evenzo vormt men de veelterm

$$f(x_1)L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}$$

die gelijk aan 0 is voor $x = x_0, x_2, \ldots, x_n$, en gelijk aan $f(x_1)$ voor $x = x_1$.
Enzovoort.
Een veelterm die aan de gestelde eisen voldoet is dan:

$$\varphi_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x)$$

met

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad \square$$

De veeltermen $L_i(x)$ noemt men veeltermen van Lagrange of ook wel Lagrange-polynomen behorende bij de punten x_1, x_2, …, x_n (naar Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813, Frankrijk).

Opmerking
We kunnen ook schrijven:

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x)$$

$$\text{met } P_i(x) = f(x_i)\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

[einde Opmerking]

Eigenschappen

$$L_i(x_k) = 0 \qquad \text{voor } k \neq i$$
$$L_i(x_k) = 1 \qquad \text{voor } k = i \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Samenhangend met het aantal basispunten onderscheidt men de volgende interpolaties:

Lineaire interpolatie ($n = 1$)
De kromme met vergelijking $y = f(x)$ wordt tussen de gegeven punten benaderd door een rechte lijn.

Kwadratische interpolatie ($n = 2$)
De kromme met vergelijking $y = f(x)$ wordt tussen de gegeven punten benaderd door een parabool waarvan de as evenwijdig is met de y-as.

Kubische interpolatie ($n = 3$)
De kromme met vergelijking $y = f(x)$ wordt tussen de gegeven punten benaderd door 3e-graads kromme.

En algemeen:

Interpolatie van de i-de orde ($n = i$).

2. Een iets andere kijk…

We gaan uit van n gegeven punten:

$$(x_1 \,;\, y_1), (x_2 \,;\, y_2), \ldots, (x_n \,;\, y_n)$$

waarvan geen tweetal dezelfde x-waarde heeft.
Voor een wat eenvoudiger notatie schrijven we in deze paragraaf volgt: $a = x_1$ en $b = x_n$.

Definitie

De functie $f(x) = \dfrac{(b-x)f_1(x) + (x-a)f_2(x)}{b-a}$ is het interpolatiepolynoom bij de functies f_1 en f_2.

Stelling
Is $f_1(x)$ het polynoom waarvan de grafiek gaat door de *eerste* $n-1$ punten

$$(x_1 \,;\, y_1), (x_2 \,;\, y_2), \ldots, (x_{n-1} \,;\, y_{n-1})$$

en is $f_2(x)$ het polynoom waarvan de grafiek gaat door de *laatste* $n-1$ punten

$$(x_2 \,;\, y_2), (x_3 \,;\, y_3), \ldots, (x_n \,;\, y_n)$$

dan gaat de grafiek van het polynoom

$$f(x) = \frac{(b-x)f_1(x) + (x-a)f_2(x)}{b-a}$$

door de n gegeven punten.
Bewijs:
Uit de gegevens volgt direct:

$$f_1(x_1) = y_1,\ \ f_1(x_2) = y_2,\ \ \ldots, f_1(x_{n-1}) = y_{n-1}$$
$$f_2(x_2) = y_2,\ \ f_2(x_3) = y_3,\ \ \ldots, f_1(x_n) = y_n$$

zodat

$$f(a) = \frac{(b-a)f_1(a) + (a-a)f_2(a)}{b-a} = f_1(a) = y_1$$
$$f(b) = \frac{(b-b)f_1(b) + (b-a)f_2(b)}{b-a} = f_2(b) = y_n$$

En ook, voor $i \neq 1,\ i \neq n$:

$$f(x_i) = \frac{(b-x_i)f_1(x_i) + (x_i-a)f_2(x_i)}{b-a} = \frac{(b-x_i)y_i + (x_i-a)y_i}{b-a}$$
$$= \frac{(b-x_i+x_i+a)y_i}{b-a} = y_i$$

waaruit blijkt dat de grafiek van de functie f inderdaad door de gegeven n punten gaat. □

Meetkundige constructie van de grafiek van *f*

Uitgaande van n gegeven punten $(x_1 \,;\, y_1), (x_2 \,;\, y_2), \ldots, (x_n \,;\, y_n)$ doen we het volgende.
Stap 1: Kies een punt $(x_0 \,;\, 0)$ met $x_1 < x_0 < x_n$.
Stap 2: Construeer de grafiek van de polynoomfunctie f_1, die door de *eerste* $n-1$ gegeven punten gaat.
Stap 3: Construeer ook de grafiek van de polynoomfunctie f_2, die door de *laatste* $n-1$ gegeven punten gaat.
Stap 4: Construeer de punten $(x_1 \,; f_1(x_0))$ en $(x_n \,; f_2(x_0))$.
Stap 5: Construeer het punt $\left(x_0 \,;\, \dfrac{(b-x_0)f_1(x_0) + (x_0-a)f_2(x_0)}{b-a}\right)$.
De meetkundige plaats van dit laatste punt is dan de grafiek van de gezochte polynoomfunctie f.

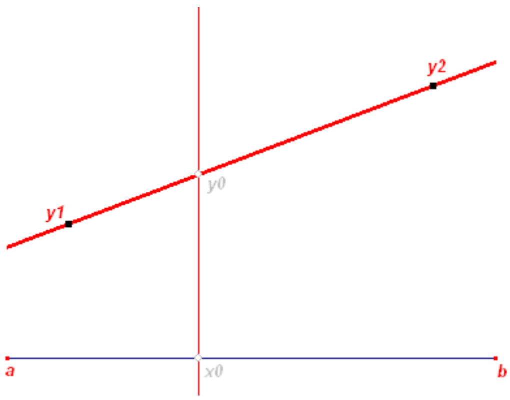
Voorbeelden

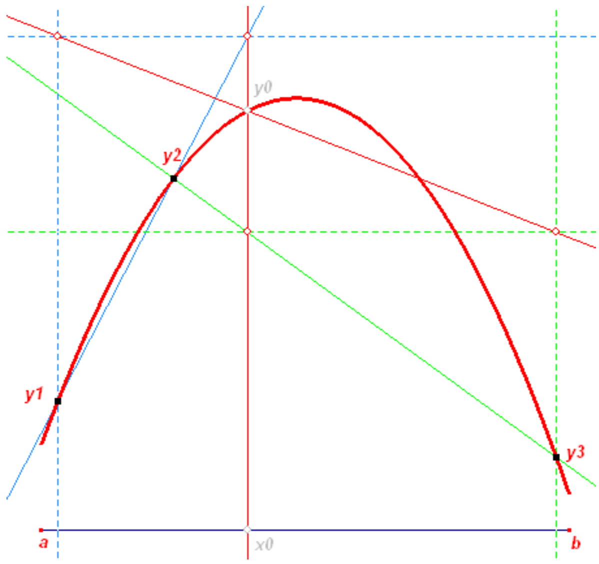
In de onderstaande afbeeldingen[1] zijn a en b, in afwijking van de betekenis hierboven, de grenzen van het interval waarop de punten x_i kunnen worden gekozen; dus voor $i = 1, \ldots, n$ geldt: $a \leq x_i \leq b$.

[1] De afbeeldingen zijn gemaakt met het programma Cabri Geometry II Plus (CabriLog, Genève).
Zie http://www.pandd.nl/analyse/lagrange.htm voor enkele applets gebaseerd op de vermelde meetkundige constructie.

De gegeven punten zijn in de afbeeldingen aangegeven met hun y-coördinaat: y_i. De in stap 4 geconstrueerde punten zijn in zo'n afbeelding niet voorzien van een naam. Het in stap 5 geconstrueerde punt is aangegeven met y_0.

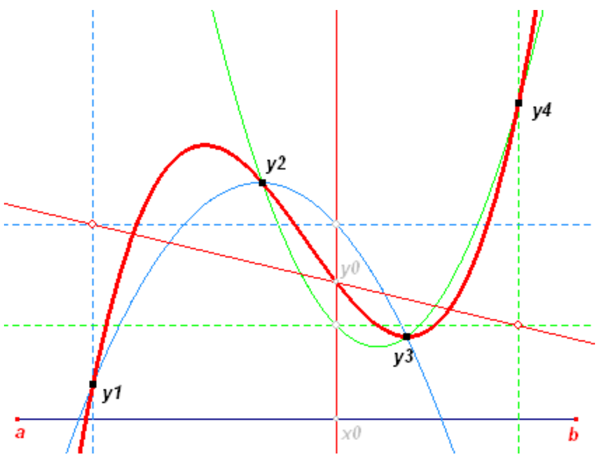
1e-graads polynoom; er zijn dan twee punten, $(x_1; y_1)$ en $(x_2 ; y_2)$, gegeven.
De grafiek van de polynoomfunctie is dus in dit geval de rechte lijn door de beide punten.

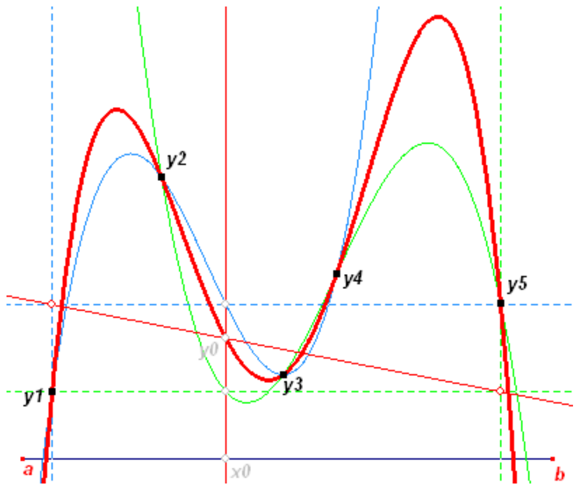




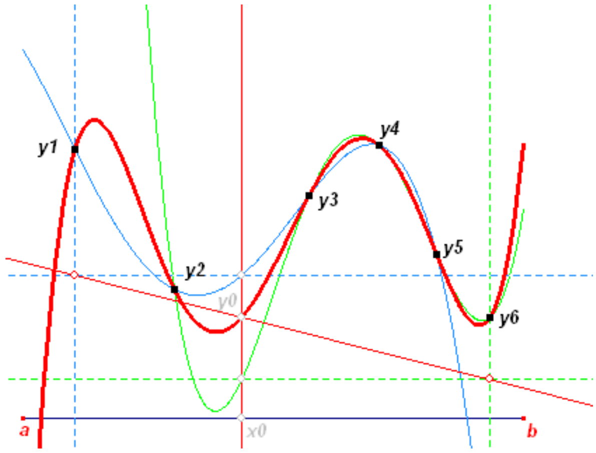
2e-graads polynoom; er zijn dan drie punten, $(x_1; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$, gegeven.
De grafiek is hier dus een parabool door de gegeven punten.

3e-graads polynoom; er zijn vier gegeven punten, $(x_1; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$, $(x_4 ; y_4)$.





4e-graads polynoom; vijf gegeven punten: $(x_1; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$, $(x_4 ; y_4)$, $(x_5 ; y_5)$.



5e-graads polynoom; de zes gegeven punten zijn: $(x_1; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$, $(x_4 ; y_4)$, $(x_5 ; y_5)$, $(x_6 ; y_6)$.

3. 'Equidistante' functiewaarden

Worden de $n + 1$ waarden van de functie f in het hierboven in paragraaf 1 gestelde probleem op het interval $[a ; b]$ gegeven op basis van de equidistante punten $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) met $x_0 = a$, $x_n = b$ en $h = (b - a)/n$, dan kunnen we anders handelen.
Stellen we $x = x_0 + sh$, dan gaat

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

bij gelijktijdige deling door gelijke factoren h in teller en noemer, over in:

$$L_i(x) = \frac{s(s-1)\cdots(s-i+1)(s-i-1)\cdots(s-n)}{i(i-1)\cdots \quad 1 \quad (-1)\cdots(i-n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k}$$

Door de substitutie $x = x_0 + sh$ is nu L_i een functie van s.
We geven de functie daarom in hetgeen volgt aan met $L_i^{\#}(s)$.
Deze laatste functie kunnen we gebruiken bij interpolaties op tussengelegen functiewaarden in bijvoorbeeld tabellen. Meestal gebruikt men dan de zogenoemde d r i e p u n t s i n t e r p o l a t i e ($n = 2$).
Voor $n = 2$ hebben we:

$$L_0^{\#}(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} = \tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)$$

$$L_1^{\#}(s) = \frac{s(s-2)}{1\cdot(-1)} = -s(s-2)$$

$$L_2^{\#}(s) = \frac{s(s-1)}{2\cdot 1} = \tfrac{1}{2}s(s-1)$$

Voor de functie $\varphi_2^{\#}$ vinden we dan overeenkomstig:

$$\varphi_2^{\#}(s) = \tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)f(x_0) - s(s-2)f(x_1) + \tfrac{1}{2}s(s-1)f(x_2)$$

Voorbeeld

In een tabel voor de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ worden functiewaarden weergegeven in 5 decimalen met $h = 0{,}1$.
Gevraagd wordt de waarde van $\sqrt[3]{1{,}23}$ te benaderen (eveneens in 5 decimalen).

We kiezen nu $x_0 = 1{,}1$, $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = 1{,}3$.
In de tabel vinden we

$$f(x_0) = 1{,}03228$$
$$f(x_1) = 1{,}06266$$
$$f(x_2) = 1{,}09139$$

Uit $x = x_0 + sh$ vinden we eenvoudig $1{,}23 = 1{,}1 + 0{,}1s$ of $s = 1{,}3$.
Zodat

$$\varphi_2^{\#}(1{,}23) = -0{,}105 f(x_0) + 0{,}91 f(x_1) + 0{,}195 f(x_2) = 1{,}07145$$

De juiste waarde in 5 decimalen is 1,07144. Deze waarde verschilt dus slechts één eenheid in de vijfde decimaal met de geïnterpoleerde waarde.