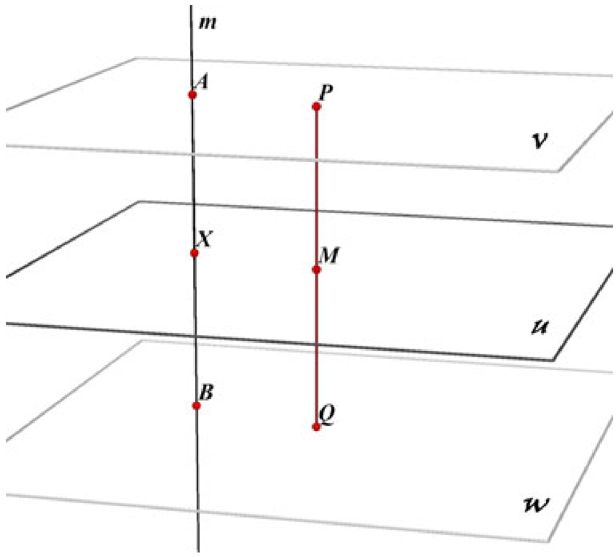
Het middenvlak (bij een viervlak)

Stelling 1
De meetkundige plaats van de punten die gelijke afstanden hebben tot twee evenwijdige vlakken, is het vlak dat evenwijdig is met elk van die vlakken en dat hun afstand middendoor deelt.

We zullen dit vlak in het vervolg het **middenvlak** van de beide gegeven vlakken noemen.

Bewijs:



U is het middenvlak van de evenwijdige vlakken V en W, d.w.z. PQ met midden M is de afstand van V en W, en het punt M ligt in U.

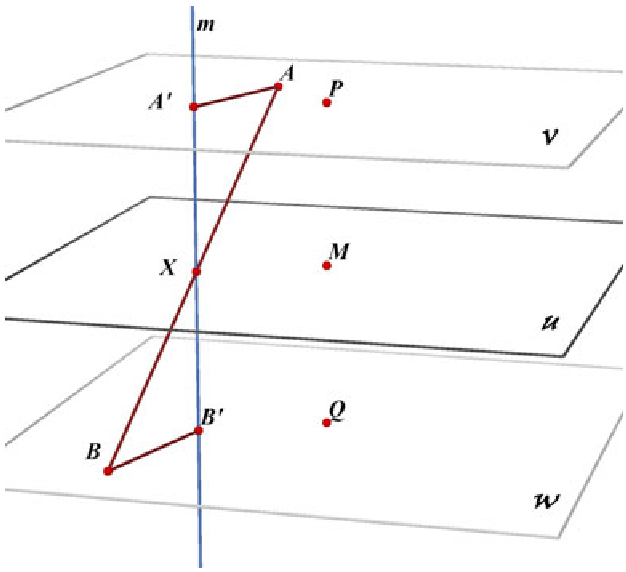
(1) Stel X ligt in het vlak U.
De lijn m door X loodrecht op V snijdt V in A en W in B.
Nu is ook $m \perp U$ en $m \perp W$, zodat XA en XB afstanden zijn van X tot opvolgend de vlakken V en W.
De vierhoeken $AXMP$ en $XBQM$ zijn rechthoeken, waaruit volgt dat $XA = PM$ en $XB = MQ$.
Dus: $XA = XB$.

(2) Stel nu dat X een punt is waarvoor geldt dat afstand(X, V) = afstand(X, W).

Is nu U het vlak door X evenwijdig met V. Dan is U ook evenwijdig met W. De loodlijn m door X op V staat ook loodrecht op de vlakken U en W. Dus AB is de afstand tussen de evenwijdige vlakken V en W.□

Stelling 2
De meetkundige plaats van de middens van lijnstukken die een punt van één van twee evenwijdige vlakken verbinden met een punt van het andere vlak, is het middenvlak van die vlakken.

Bewijs:



A is een willekeurig punt van vlak V en B is een willekeurig punt van vlak W, waarbij $V // W$.

(1) De verbindingslijn van de punten A en B snijdt het middenvlak U van V en W in het punt X.
De lijn m is de loodlijn door X op V. Deze lijn staat dan loodrecht op U en loodrecht op W. De snijpunten van m met V en W zijn opvolgend A' en B'.
Nu is (in het vlak door m en AB):
- $XA' = XB'$ (conform stelling 1)
- $\angle XA'A = \angle XB'B = 90°$
- $\angle A'XA = \angle B'XB$ (overstaande hoeken)

Zodat $XA'A$ en $XB'B$ congruente driehoeken zijn (HZH).
En daaruit volgt dat $XA = XB$.

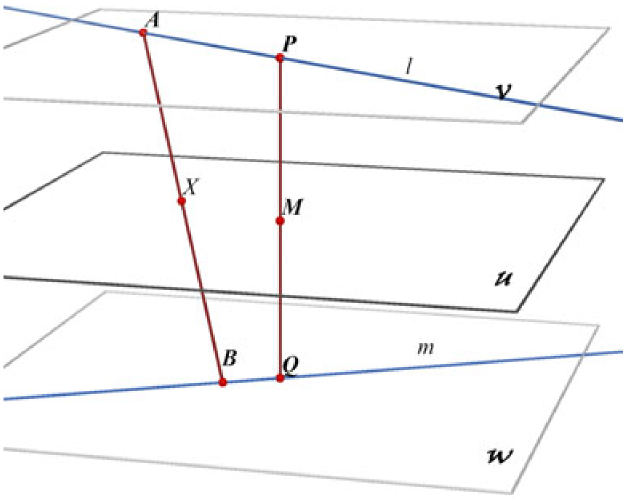
(2) Stel X is een punt met $XA = XB$. De loodlijn m door X op V snijdt de vlakken V en W in opvolgend A' en B'. In het vlak door m en AB geldt in dit geval:
- $XA = XB$
- $\angle XA'A = \angle XB'B = 90°$
- $\angle A'XA = \angle B'XB$ (overstaande hoeken)

De driehoeken $XA'A$ en $XB'B$ zijn dan congruent (ZHH), waaruit volgt dat $XA' = XB'$. Het punt X ligt dus in het middenvlak van de vlakken V en W.
Waarmee het gestelde is aangetoond.□

Stelling 3
De meetkundige plaats van de middens der lijnstukken die een punt van één van twee kruisende lijnen met een punt van de andere verbinden, is het vlak dat evenwijdig loopt aan die kruisende lijnen en dat hun afstand middendoor deelt.

Ook hier spreken we van een **middenvlak**, het middenvlak van twee kruisende lijnen.

Bewijs:



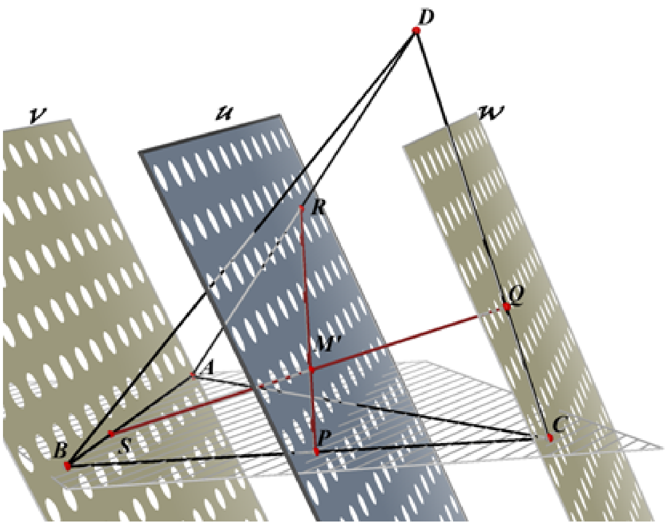
Door elk van twee kruisende lijnen l en m kan een vlak worden aangebracht dat evenwijdig is met de andere lijn. In de figuur hiernaast zijn dat de vlakken V (door l) en W (door m).
Hun afstand PQ is de gemeenschappelijk loodrechte snijlijn.
Het gestelde volgt nu uit stelling 2.□

Een direct gevolg van stelling 3 is dan:

Stelling 4
De bimediaan van twee overstaande ribben van een viervlak ligt in het middenvlak van beide andere ribben.

Een **bimediaan** van een viervlak is de verbindingslijn van de middens van twee overstaande ribben van dat viervlak. In onderstaande figuur is PR de bimediaan van de ribben AD en BC.

Bewijs:



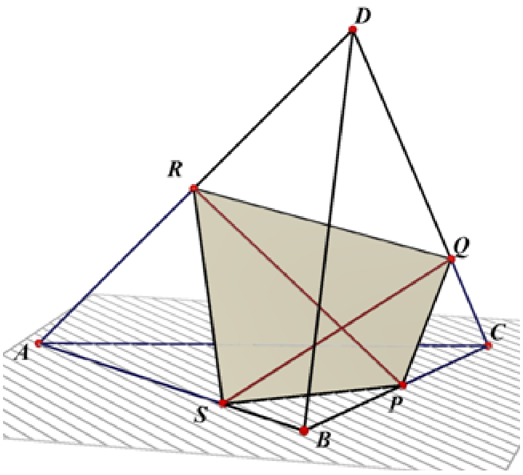
V en W zijn de vlakken door AB en CD evenwijdig met opvolgend CD en AB.
Omdat $AR = DR$ en $BP = CP$ liggen P en R, en daardoor de lijn PR, in het middenvlak van de ribben AB en CD (volgens stelling 3).□

Gevolg
Een lijnstuk QS waarvan de drager de lijn PR snijdt, wordt door de lijn PR gehalveerd (zie het punt M'), immers het midden van QS, in casu M', ligt in het middenvlak U van de vlakken V en W.

We bewijzen nu tenslotte:

Stelling 5
Een vlak door de middens van twee overstaande ribben van een viervlak verdeelt dat viervlak in stukken met dezelfde inhoud.

Bewijs:



P en *R* zijn de middens van de ribben *BC* en *AD*.
Nu is:

Inh(*R.ABC*) = ½ Inh(*D.ABC*)

omdat de hoogte van het eerste viervlak de helft is van die van het tweede, terwijl beide hetzelfde grondvlak hebben.
Verder hebben we:

Inh(*ASRQCP*) = Inh(*R.ABC*) + Inh(*CPQR*) - Inh(*BPRS*)

Wanneer we nu kunnen bewijzen dat

Inh(*CPQR*) = Inh(*BPRS*)

zijn we klaar.

Het lijnstuk PR ligt in het **middenvlak** van de kruisende lijnen *BC* en *AD* (zie stelling 4).
De lijn PR deelt daardoor het lijnstuk QS middendoor (zie het gevolg van stelling 4), zodat

Opp(*PQR*) = Opp(*PRS*).

Uit *BP* = *PC* volgt dan verder dat de punten *B* en *C* gelijke afstanden hebben tot het vlak *PQRS*.
De viervlakken *CPQR* en *BPRS* hebben dus gelijke grondvlakken en gelijke hoogtes, en dus ook gelijke inhouden.
Waarmee het gestelde bewezen is.□

