Passermeetkunde – een bewijs van de stelling van Mohr-Mascheroni

DICK KLINGENS

1. Probleemstelling

Stelling. Iedere constructie in het euclidische vlak die met passer en liniaal mogelijk is, kan ook met passer alleen worden uitgevoerd.

Deze stelling staat bekend als de stelling van Mohr-Mascheroni.[1]

In paragraaf 5 staat een bewijs van deze stelling. Daarbij is onder andere de volgende afspraak van belang. Een rechte lijn en een lijnstuk worden in het vlak vastgelegd door twee punten. De overige punten van beide puntverzamelingen zijn niet zichtbaar, maar moeten, indien nodig, door een passerconstructie (dit is een constructie waarbij alleen van een passer gebruik wordt gemaakt) kunnen worden zichtbaar gemaakt.

Opmerking. Omdat er alleen met een passer gewerkt wordt, zullen rechte lijnen en lijnstukken in de te gebruiken figuren, waar dit althans van belang is, gestippeld worden weergegeven. ◊

2. Drie of vier basisconstructies

De (gebruikelijke) passer-en-liniaal-constructies die in de euclidische meetkunde worden uitgevoerd, komen alle neer op de volgende drie basisconstructies:
1. het bepalen (tekenen) van de snijpunten van twee gegeven cirkels;
2. het tekenen van de snijpunten van een gegeven cirkel met een rechte lijn;
3. het tekenen van het snijpunt van twee gegeven rechte lijnen.

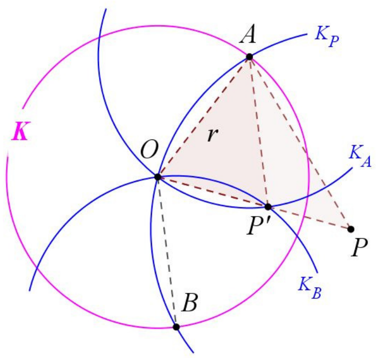
En eventueel nog:
4. het tekenen van een rechte lijn door twee gegeven punten.

Als alleen de passer als (theoretisch) tekenhulpmiddel is toestaan, dan hoeven we ons geen zorg te maken over de uitvoerbaarheid van de punten 1 en 4, gezien de voorwaarden die er gesteld zijn.

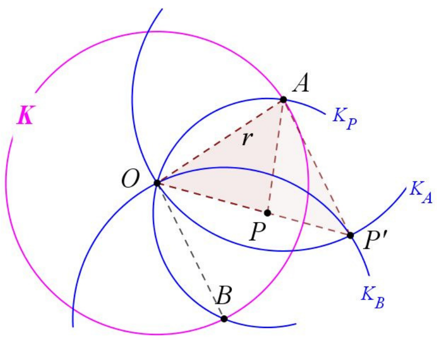
3. Inversie

We zullen in stelling 5 (paragraaf 5) aantonen dat de in paragraaf 2 genoemde basisconstructies 2 en 3 met behulp van **inversie** kunnen worden teruggebracht tot basisconstructie 1. Voordat we de inversie introduceren, wordt eerst een drietal stellingen bewezen die in de rest van het betoog belangrijk zijn.[2, 3]

figuur 1a



figuur 1b



Stelling 1. Het is mogelijk bij een gegeven punt P en een gegeven cirkel K (middelpunt O en straal r) met passer alleen een punt P' op de halve lijn OP te construeren waarbij: $OP \cdot OP' = r^2$.

Bewijs (via constructie). We bekijken bij het bewijs de verschillende posities van P ten opzichte van K: P ligt buiten cirkel K, P ligt er binnen, P ligt op de cirkel.
(a) het punt P ligt buiten (K); zie figuur 1a.

1. ↓ K_P = Cirkel(P, PO)
2. ↓ A, B = Snijpunten(K, K_P)
3. ↓ K_A = Cirkel(A, AO)

4. ↓ K_B = Cirkel(B, BO)
5. P' = Snijpunt(K_A, K_B)

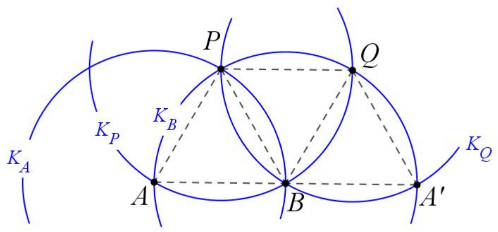
Uit de symmetrie van de constructie blijkt dat O, P, P' collineair zijn. De *gelijkbenige* driehoeken AOP en $P'OA$ hebben hoek O als gemeenschappelijke basishoek. Dus zijn beide driehoeken gelijkvormig (*hh*).
Daaruit volgt $OP : OA = AO : P'O$.
Of: $OP \cdot OP' = OA^2 = r^2$.

(b) P ligt binnen cirkel K; zie figuur 1b. Het constructievoorschrift zoals dat bij figuur 1a is gegeven, kan nu ongewijzigd worden gevolgd. En dan blijkt dat ook in dit geval $OP \cdot OP' = r^2$.

(c) Als het punt P op (K) ligt, dan vallen P' en P samen en is onmiddellijk duidelijk dat $OP \cdot OP' = r^2$.

Uit de onderdelen (a), (b) en (c) volgt nu het gestelde.

figuur 2

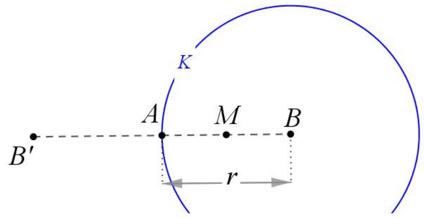


Stelling 2. Het is mogelijk met passer alleen een punt A' op het verlengde van een gegeven lijnstuk AB te construeren, waarbij $BA' = AB$.
Bewijs (door constructie).

1. ↓ K_A = Cirkel(A, AB)
2. ↓ K_B = Cirkel(B, BA)
3. ↓ P = Snijpunt(K_A, K_B)
4. ↓ K_P = Cirkel(P, PA)
5. ↓ Q = Snijpunt(K_P, K_B)
6. ↓ K_Q = Cirkel(Q, QB)
7. A' = Snijpunt(KQ, KB)

Op grond van de constructie zijn de driehoeken ABP, PBQ en QBA' gelijkzijdig. Daaruit volgt dat de punten A, B, A' collineair zijn ($\angle ABA' = 3 \cdot 60^{\circ}$) en dat $BA' = AB$.

figuur 3



Stelling 3. Het is mogelijk het midden M van een gegeven lijnstuk AB met passer alleen te construeren.
Bewijs. Volgens stelling 2 is het mogelijk met passer alleen het punt B' op het verlengde van BA te construeren, waarbij $BA = r = AB'$.
Zij nu K = Cirkel(B, BA). Volgens stelling 1 is het mogelijk met passer alleen het punt M zo op de halve lijn BB' te construeren dat $BM \cdot BB' = r^2$.
Omdat $BB' = 2r$ is, is $BM = \frac{1}{2}r$. Het punt M is dan het midden van AB.

4. Eigenschappen van inversie

Definitie. Een inversie is een afbeelding van de punten van het euclidische vlak op zichzelf waarmee bij een gegeven vaste cirkel (hier middelpunt O, straal r) aan ieder punt P ($\neq O$) een punt P' op de halve lijn OP wordt toegevoegd waarvoor geldt dat $OP \cdot OP' = r^2$ (zie stelling 1).

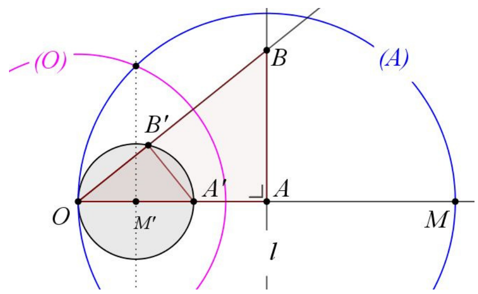
Naamgeving. De in de definitie genoemde (vrij te kiezen, maar daarna vaste) cirkel is de *inversiecirkel* en het middelpunt daarvan is het *inversiecentrum*.
De inversiecirkel en het inversiecentrum zullen in hetgeen volgt zoveel mogelijk worden aangegeven met dezelfde letter; bijvoorbeeld (O) c.q. (O, r) voor de cirkel en O voor het middelpunt.

Twee belangrijke eigenschappen van een inversie zijn:[4]

E I. Iedere rechte lijn die door het inversiecentrum van een inversie gaat, wordt door die inversie op zichzelf afgebeeld (niet-puntsgewijs).
E II. Iedere rechte lijn die *niet* door het inversiecentrum van een inversie gaat, wordt door die inversie afgebeeld op een cirkel die door dat centrum gaat en waarvan de door dat centrum gaande middellijn loodrecht staat op die rechte lijn.

E(igenschap) I behoeft geen bewijs, omdat deze eigenschap besloten ligt in de definitie van inversie. Is O namelijk het inversiecentrum en P een willekeurig punt op die rechte lijn, dan ligt P' (per definitie) op de lijn door O en P dus ook op die bewuste lijn. P en P' zijn daarbij in het algemeen verschillende punten.

figuur 4



Bewijs van Eigenschap II. Zie figuur 4.

Cirkel (O, r) is de inversiecirkel. De lijn l is de lijn waarvan het inverse beeld moet worden bepaald.

A is het voetpunt van de loodlijn door O op l en B is een *willekeurig* punt van l, met opvolgend de punten A' en B' als beeldpunt bij deze inversie.

Per definitie is nu: $OA \cdot OA' = r^2$ en $OB \cdot OB' = r^2$.

Hieruit volgt dan dat $OA : OB' = OB : OA'$. De driehoeken OAB en $OB'A'$ hebben de hoek O gemeenschappelijk en zijn daarmee gelijkvormig (*zhz*). En dan blijkt dat ook $\angle OB'A' = 90^\circ$.
De meetkundige plaats van het punt B' is dus de cirkel met middellijn OA'. Waarmee het gestelde is aangetoond.

Gevolg. Is in dit geval M het spiegelbeeld van het punt O in l. Dan geldt voor het inverse punt M' van M bij de inversie dat $OM \cdot OM' = r^2$, zodat:

$$OM' = \frac{r^2}{OM} = \frac{r^2}{2OA} = \frac{r^2 \cdot OA'}{2 \cdot OA \cdot OA'} = \tfrac{1}{2} OA'$$

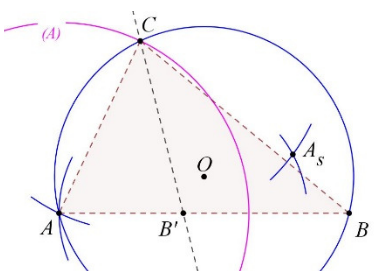
Conclusie. M' is het middelpunt van de cirkel op OA' (d.w.z. het middelpunt van het inverse beeld van l). Met andere woorden: het inverse beeldpunt van het spiegelbeeld van O in de lijn l is het middelpunt van het inverse beeld van de lijn l.

Opmerking. De gemeenschappelijke koorde van de cirkels (O) en (A) gaat door het punt M', omdat die koorde het beeld is van cirkel (A, AO) bij de beschouwde inversie; of omgekeerd, omdat het beeld van de drager van die koorde de cirkel met middelpunt A is die door het punt O gaat. ◊

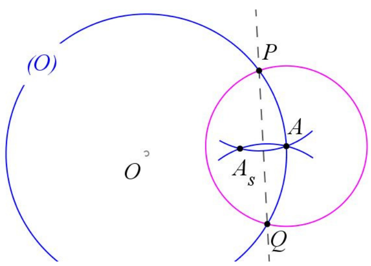
5. Bewijs van de stelling van Mohr-Mascheroni

We bewijzen allereerst:
Stelling 4. Het is mogelijk met passer alleen het middelpunt te construeren van de cirkel door drie in ligging gegeven vrijgelegen punten.[5]

figuur 5



figuur 6



Bewijs. Zijn A, B, C de drie bedoelde punten. We kiezen de cirkel $(A) \equiv (A, AC)$ als inversiecirkel. De omcirkel van driehoek ABC heeft als beeld de rechte lijn die door het punt C gaat (C is invariant) en door het beeldpunt B' van B bij deze inversie (gelegen op AB); dit is conform eigenschap II. Als A_s het spiegelbeeld is van A in de lijn $B'C$, dan, is conform het gevolg van eigenschap II, het inverse beeld van A_s het middelpunt O van de omcirkel van driehoek ABC.

- Het punt B' kan als invers beeld van B geconstrueerd worden volgens stelling 1.
- Het punt A_s kan geconstrueerd worden als snijpunt van de cirkels (C, CA) en (B', $B'A$).
- Het punt O kan als invers beeld van A_s geconstrueerd worden volgens stelling 1.

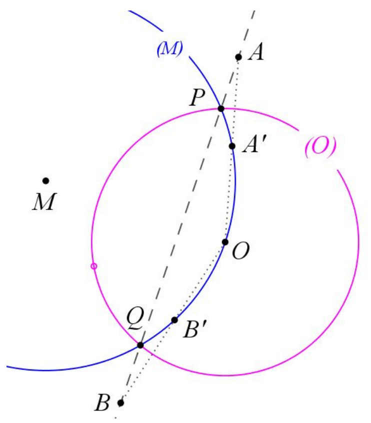
Waarmee stelling 4 is aangetoond.

Opmerking. Op stelling 4 kan een passerconstructie gebaseerd worden die het middelpunt geeft van een in ligging en grootte gegeven cirkel; zie figuur 6.
Zij (O) de gegeven cirkel. Kies nu A op die cirkel en ook een punt P. De cirkel met middelpunt (A, AP) snijdt (O) ook in Q. De lijn PQ is dan het beeld van (O) bij de inversie met (A) als inversiecirkel. Is dan A_s het spiegelbeeld van A in PQ, dan valt het inverse beeld van A_s samen met het middelpunt van (O). ◊

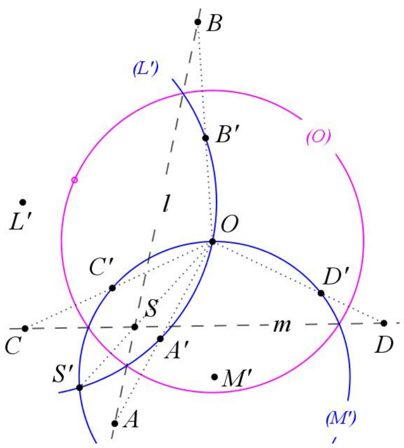
De in stelling 4 behandelde passerconstructie van de omcirkel van drie vrijgelegen punten wordt gebruikt in het hierna volgende bewijs van de stelling van Mohr-Mascheroni.

Stelling 5 (Mohr-Mascheroni)
1. Het is mogelijk met passer alleen de snijpunten van een in ligging gegeven rechte lijn met een in ligging en grootte gegeven cirkel te construeren.
2. Het is mogelijk met passer alleen het snijpunt van twee in ligging gegeven rechte lijnen te construeren.

figuur 7a



figuur 7b



Bewijs van stelling 5.1. Zie figuur 7a, waarin de lijn AB en de cirkel (O) gegeven zijn (in een zodanige positie dat lijn en cirkel elkaar inderdaad snijden).
Merk op dat de snijpunten van de lijn AB met de cirkel bij een inversie met die cirkel als inversiecirkel invariante punten zijn.
We kiezen de gegeven cirkel dus als inversiecirkel. De punten A', B' zijn de inversen van A, B bij de inversie met (O) als inversiecirkel. Deze punten zijn te construeren volgens stelling 1.
Volgens stelling 4 is het middelpunt M van de omcirkel van $OA'B'$ met alleen een passer te construeren, en daarmee ook (M) zelf. De snijpunten P, Q van (M) met (O) zijn dan de snijpunten van de lijn AB met (O).

Bewijs van stelling 5.2. Zie figuur 7b waarin alleen de lijnen $l \equiv AB$ en $m \equiv CD$ gegeven zijn.
We kiezen een cirkel (O), die hier beide lijnen snijdt, als inversiecirkel (het snijden is niet noodzakelijk).
De punten A', B', C', D' zijn de inversen van A, B, C, D bij deze inversie. Het tweede snijpunt S' van de omcirkel van $OA'B' \equiv (L')$ en de omcirkel van $OC'D' \equiv (M')$ is dan de inverse van het snijpunt S van l en m. Beide omcirkel zijn weer te construeren volgens stelling 4. En omdat S het snijpunt is van de lijnen l en m, is S' een van de snijpunten van die cirkels.

En hiermee is de stelling van Morh-Mascheroni is bewezen.

6. Noten

[1] Naar Georg Mohr (1640–1697, Denemarken) en Lorenzo Mascheroni (1750–1800, Italië). De eigenschap werd door Mohr geformuleerd in 1672 (in zijn boek *Euclides Danicus*), en geheel onafhankelijk van hem door Mascheroni in 1797 (in diens boek *La Geometria del Compasso*).

[2] De bewijsvoering van de stelling van Mohr-Mascheroni met inversie is voor het eerst toegepast in 1890 door August Adler (1863-1923) in zijn artikel "*Zur Theorie der Mascheronischen Konstructionen*" (Wiener Berichte, Nr. 99; pp. 910-916.)

[3] AUGUST ADLER (1906): "*Theorie der geometrischen Konstructionen*". Leipzig: G.J. Göschensche Verlagshandlung; pp. 92-122.

[4] Zie voor een uitvoeriger behandeling van de inversie bijvoorbeeld:
P. WIJDENES (1959): *Vlakke meetkunde voor voortgezette studie*. Groningen: P. Noordhoff N.V., derde druk, 1964; pp. 234-252.
of:
DICK KLINGENS (1999): *Inversie*. Op: *www.pandd.demon.nl/inversie.htm* (website van de auteur).

[5] Onder "vrijgelegen punten" wordt verstaan: punten die niet collineair zijn (zoals de drie hoekpunten van een driehoek).

::

::