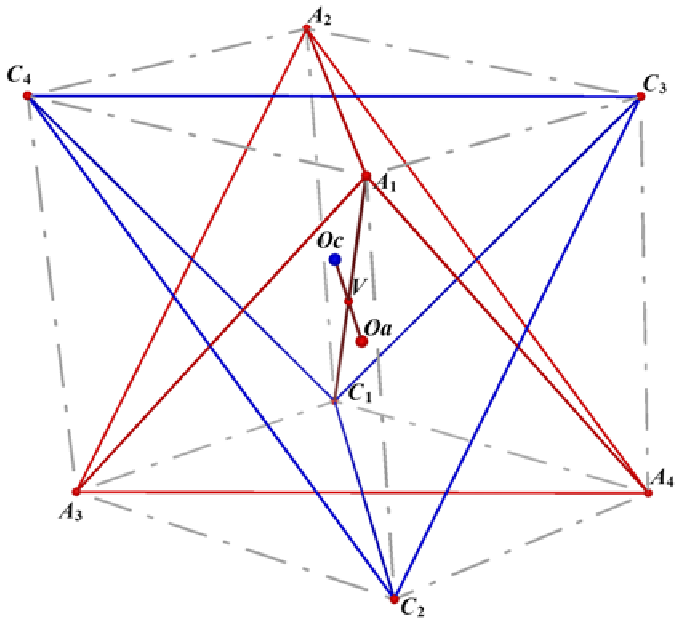
Over het Monge-punt van een viervlak

Dick Klingens
Krimpenerwaard College, Krimpen ad IJssel
september 2005

Inleiding

Het is mogelijk door elke ribbe van een viervlak een vlak aan te brengen evenwijdig aan de overstaande ribbe. We krijgen dan drie paar evenwijdige vlakken die een blok [1] vormen.

Figuur 1

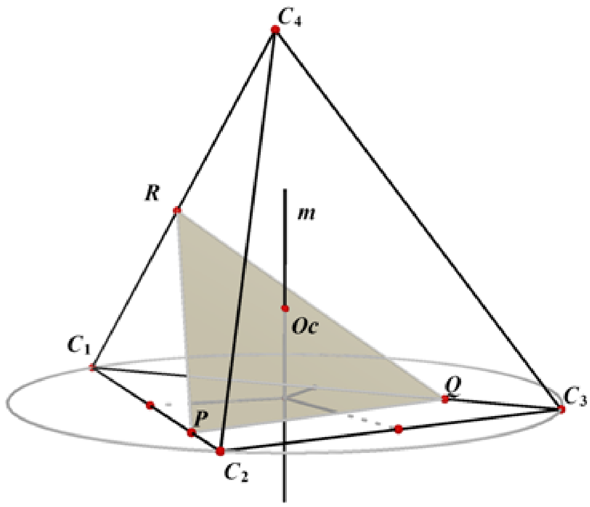


Voor een tekening is het uiteraard handiger om uit te gaan van een blok en daarin het bewuste viervlak aan te brengen. Dat is in **figuur 1** gedaan met viervlak $A_1A_2A_3A_4$.
Dat inderdaad het grondvlak van het blok – dat is het vlak $A_3C_2A_4C_1$ – evenwijdig is met A_1A_2 blijkt uit het feit dat C_2C_1 evenwijdig is met A_1A_2 en A_3A_4 snijdt.
Het blok is ook 'omgeschreven' aan het viervlak $C_1C_2C_3C_4$.
De verbindingslijnstukken A_iC_i (met i = 1,… 4) – het zijn de lichaamdiagonalen van het blok – snijden elkaar in het middelpunt V van het blok. Daardoor is het C-viervlak op te vatten als de beeldfiguur van het A-viervlak bij een vermenigvuldiging met het punt V als centrum en –1 als factor.

[1] Een **blok** (ook wel parallellepipedum) is een (vierzijdig) prisma, waarvan het grondvlak een parallellogram is.

Het Monge-punt

Figuur 2



Elk viervlak heeft een omgeschreven bol (kortweg ook *ombol*). Alle punten die zich op gelijke afstand van de punten C_1, C_2, C_3 bevinden, liggen op de loodlijn m op het vlak $C_1C_2C_3$ met als voetpunt het middelpunt van de omcirkel van driehoek $C_1C_2C_3$ (de lijn m heet de **as** van de driehoek of ook wel de as van het betreffende zijvlak van het viervlak). Het middelpunt O_c van de ombol van het C-viervlak is dan het snijpunt van m met (bijvoorbeeld) het middelloodvlak van ribbe C_1C_4 (**zie figuur 2**, waarin PQR het middelloodvlak is van C_1C_4).
In figuur 1 is O_a het middelpunt van de ombol van het A-viervlak. Het punt V is dan, wegens de genoemde vermenigvuldiging, het midden van het lijnstuk O_aO_c.
Het middelloodvlak van ribbe C_1C_2 gaat uiteraard door het midden van A_3A_4 en staat loodrecht op de overstaande ribbe A_1A_2 van A_3A_4. En hetzelfde geldt voor de middelloodvlakken van de andere ribben van het C-viervlak.
Bekijken we die middelloodvlakken nu vanuit het A-viervlak, dan blijkt dus dat de vlakken die gaan door het midden van een A-ribbe en loodrecht staan op de overstaande ribbe daarvan, door hetzelfde punt (en dat was O_c) gaan. Het punt O_c noemen we het **Monge-punt** [2] van het A-viervlak.
En vanwege de vermenigvuldiging met centrum V is O_a het Monge-punt van het C-viervlak.

Het zwaartepunt van een viervlak is het gemeenschappelijk snijpunt van de zogenoemde *bimedianen*; dat zijn de lijnstukken die de middens van twee overstaande ribben van een viervlak met elkaar verbinden.
Deze middens zijn (blijkens **figuur 1**) de snijpunten van de zijvlaksdiagonalen van het blok.
We kunnen dus concluderen dat het punt V het zwaartepunt is van niet alleen het A-viervlak, maar ook van het C-viervlak.
Zoals opgemerkt is V het midden van het lijnstuk O_aO_c. We hebben dan:

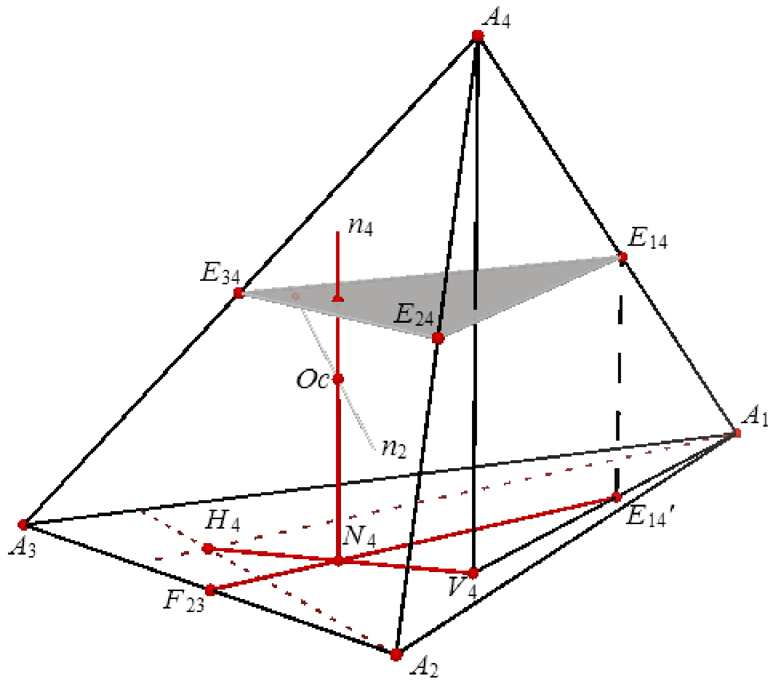
Het zwaartepunt van een viervlak is het midden van het lijnstuk dat het middelpunt van de ombol en het Monge-punt tot eindpunten heeft.

[2] Naar **Gaspard Monge**, 1746 – 1818, Frankrijk.

De Monge-vlakken en Monge-lijnen

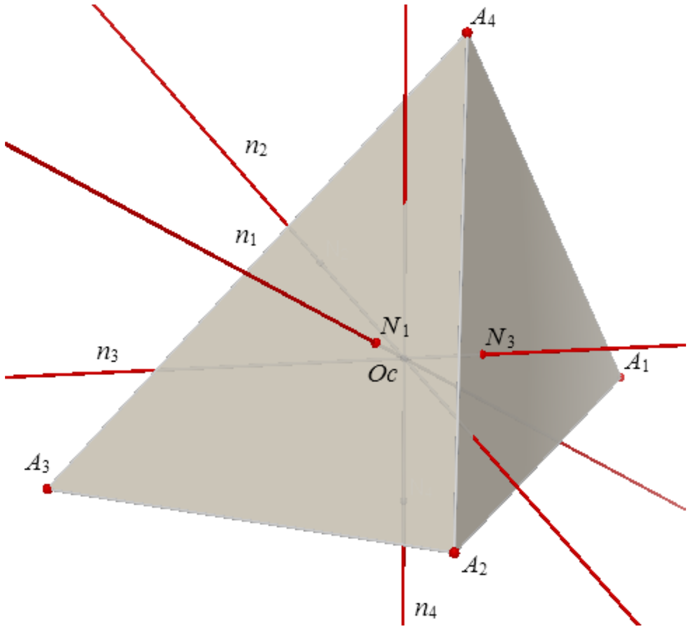
De zes vlakken die door de middens E_{jk} van de ribben gaan en loodrecht staan op de overstaande ribbe, hebben blijkbaar het Monge-punt van het viervlak als gemeenschappelijk punt. Deze vlakken worden wel de **Monge-vlakken** van het viervlak genoemd.
Eén van die Monge-vlakken is het vlak door E_{14} loodrecht op A_2A_3 (**zie figuur 3**). Dit Monge-vlak staat loodrecht op het vlak $A_1A_2A_3$ en bevat dus de projectie E_{14}' van E_{14} op dat vlak, alsmede de lijn $E_{14}'F_{23}$ die loodrecht staat op A_2A_3.

Figuur 3



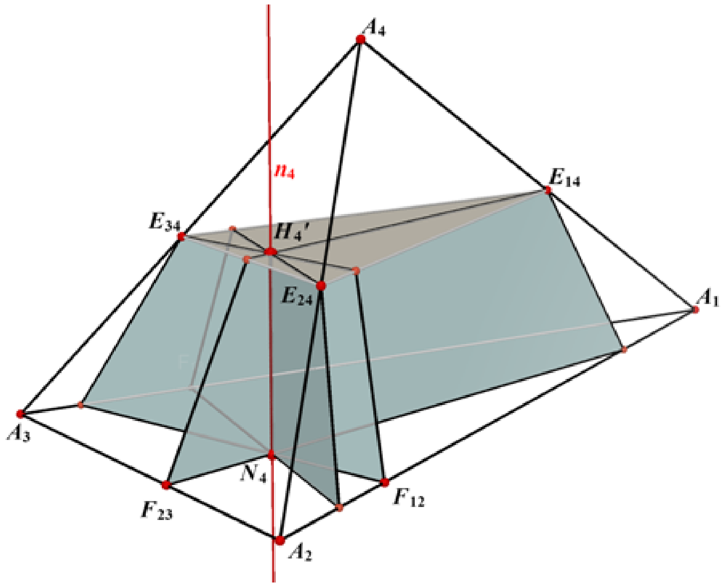
Zij nu V_4 de projectie van A_4 op vlak $A_1A_2A_3$. In driehoek $A_1A_4V_4$ is $E_{14}E_{14}'$ middenparallel, zodat E_{14}' het midden is van A_1V_4.
Is nu H_4 het hoogtepunt van driehoek $A_1A_2A_3$, dan is A_1H_4 // $E_{14}'F_{23}$. De lijn $E_{14}'F_{23}$ snijdt dus V_4H_4 in het midden N_4, immers $E_{14}'F_{23}$ is middenparallel in driehoek $A_1V_4H_4$.
N_4 ligt dus in het Monge-vlak van het punt E_{14}.
Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat N_4 ligt in het Monge-vlak van E_{24} en in dat van E_{34}.
Deze drie Monge-vlakken snijden elkaar nu volgens een lijn n_4 die in N_4 loodrecht staat op vlak $A_1A_2A_3$.
Het Monge-punt O_c van het viervlak ligt dus op de lijn n_4.
Geheel analoog blijkt dat O_c ook ligt op drie andere overeenkomstige lijnen n_1, n_2, n_3.
Het Monge-punt is dus het snijpunt van deze vier loodlijnen (deze loodlijnen op de zijvlakken van het viervlak) worden wel **Monge-lijnen** van het viervlak genoemd); **zie figuur 4**.

Figuur 4



De middens E_{14}, E_{24}, E_{34} liggen in een vlak dat evenwijdig is met vlak $A_1A_2A_3$. Zo is $E_{24}E_{34}$ evenwijdig met A_2A_3 (**zie figuur 5**).

Figuur 5



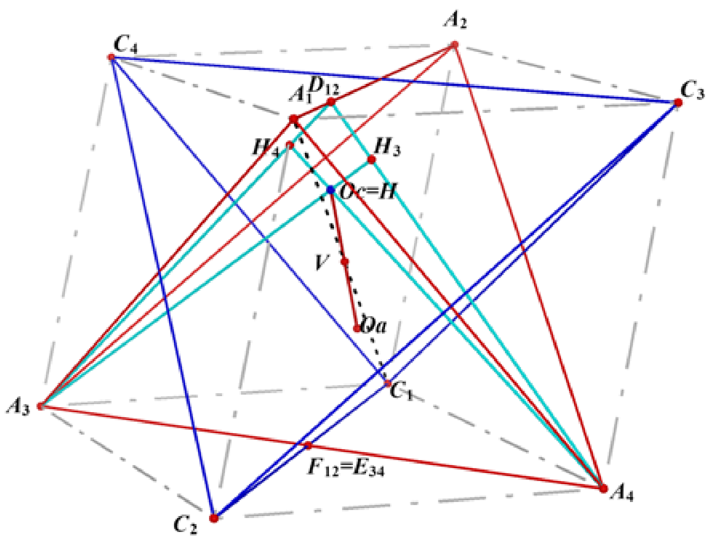
Het Monge-vlak van het punt E_{14} staat loodrecht op A_2A_3 en dus ook loodrecht op $E_{24}E_{34}$. De snijlijn van dit Monge-vlak met het vlak $E_{14}E_{24}E_{34}$ is dus de hoogtelijn van driehoek $E_{14}E_{24}E_{34}$. En dat geldt ook voor de snijlijnen van de beide andere Monge-vlakken, die van E_{24} en E_{34}.
De Monge-lijn n_4 gaat dus door het hoogtepunt H_4' van driehoek $E_{14}E_{24}E_{34}$. Of andere gezegd: de loodrechte projectie van het hoogtepunt H_4' van driehoek $E_{14}E_{24}E_{34}$ op vlak $A_1A_2A_3$ is het punt N_4. De lijn n_4 is daarbij de projecterende lijn.
Een analoge redenering geldt natuurlijk voor de Monge-lijnen n_1, n_2 en n_3.

Monge-eigenschappen in een orthogonaal viervlak

De zijvlakken van het omgeschreven blok van een *orthogonaal* viervlak [3] zijn congruente ruiten, immers de zijvlaksdiagonalen van het blok delen elkaar loodrecht middendoor. Het blok heeft dus 12 gelijke ribben (**zie figuur 6**) [4].
Het Monge-punt van het A-viervlak is, ook nu, het middelpunt O_c van de ombol van het C-viervlak.
Het middelloodvlak van C_1C_2 gaat door A_3A_4 en staat loodrecht op A_1A_2.
Dit middelloodvlak bevat dus de viervlakshoogtelijnen A_3H_3 en A_4H_4 uit opvolgend A_3 en A_4 van het A-viervlak. Deze hoogtelijnen snijden elkaar in het hoogtepunt H van het A-viervlak.
De middelloodvlakken van de ribben van het C-viervlak snijden elkaar in het Monge-punt O_c van het A-viervlak.
Deze vlakken zijn dus dezelfde als de vlakken die elk twee hoogtelijnen bevatten.
Dus:

Het hoogtepunt van een orthogonaal viervlak valt samen met het Monge-punt van dat viervlak.

Figuur 6



Bij elk viervlak ligt het zwaartepunt, ook hier is dat het punt V, midden tussen het Monge-punt en het middelpunt van de ombol.
Dus:

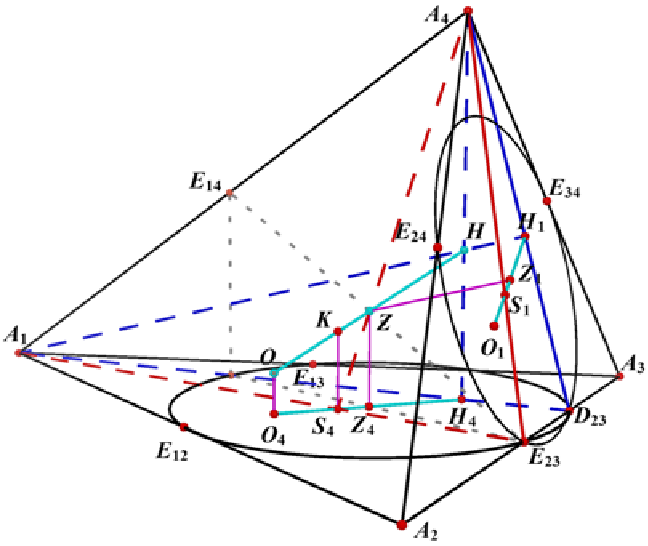
Het zwaartepunt van een orthogonaal viervlak ligt midden tussen het viervlakshoogtepunt en het middelpunt van de ombol.

In figuur 7 is H (was O_c) het hoogtepunt, Z (was V) het zwaartepunt en O (was O_a) het middelpunt van de ombol van het viervlak $A_1A_2A_3A_4$.
We vinden dan:

Van een orthogonaal viervlak liggen hoogtepunt, zwaartepunt en middelpunt van de ombol op een rechte lijn, waarbij het zwaartepunt midden tussen beide andere punten ligt.

[3] In een **orthogonaal** viervlak staan de overstaande ribben twee aan twee loodrecht op elkaar. In een **orthocentrisch** viervlak gaan de hoogtelijnen op de zijvlakken, de *viervlakshoogtelijnen*, door hetzelfde punt, het *viervlakshoogtepunt*. Bewezen kan worden, dat een orthogonaal viervlak orthocentrisch is, en omgekeerd. De begrippen orthogonaal en orthocentrisch kunnen dus bij viervlakken door elkaar worden gebruikt.
[4] Een dergelijk blok heet ook wel **ruitenzesvlak**.

Figuur 7



Overeenkomstig een eigenschap uit de vlakke meetkunde [5] noemen we de lijn waarop de punten H, Z, O gelegen zijn, de **Euler-lijn** [6] van het orthogonale viervlak.
De projecties van deze punten op het zijvlak tegenover A_4 zijn opvolgend H_4, Z_4, O_4 [7].
Van driehoek $A_1A_2A_3$ is H_4 het hoogtepunt en O_4 het middelpunt van de omcirkel. Volgens het bovenstaande is nu Z_4 het midden van het lijnstuk H_4O_4. Uit de vlakke meetkunde is nu bekend, dat Z_4 het middelpunt is van de negenpuntscirkel van driehoek $A_1A_2A_3$, zodat:

De projectie van de Euler-lijn van het viervlak op elk zijvlak is de Euler-lijn van de driehoek in dat zijvlak.

En ook:

De projectie van het zwaartepunt van een orthogonaal viervlak op elk zijvlak is het middelpunt van de negenpuntscirkel van de driehoek in dat zijvlak.

---

[5] Bedoelde eigenschap luidt: Van een driehoek liggen het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt O van de omcirkel op een rechte lijn, de **Euler-lijn** van de driehoek, waarbij $HZ : ZO = 2 : 1$.
[6] Naar **Leonard Euler**, 1707-1783, Zwitserland.
[7] Op de Euler-lijn van het viervlak ligt ook het punt K, waarvan de projectie op het vlak $A_1A_2A_3$ het punt S_4 is.
De punten S_k zijn de zwaartepunten van de zijvlakken van het viervlak.

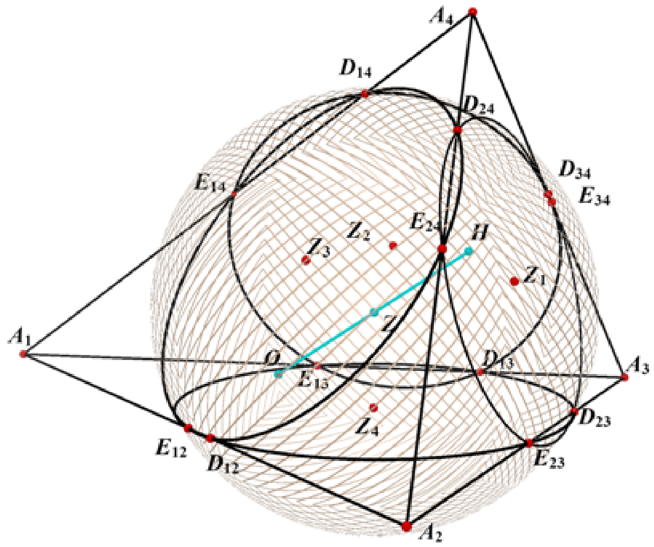
De 24-puntsbol van een orthogonaal viervlak

De lijn ZZ_4 is de as van de negenpuntscirkel van driehoek $A_1A_2A_3$. De afstanden van Z tot D_{23} (het voetpunt van de driehoekshoogtelijn uit A_1) en tot E_{23} (het midden van het lijnstuk A_2A_3) zijn dus gelijk.
Echter het punt D_{23} is hier (in het orthogonale viervlak) ook het voetpunt van de driehoekshoogtelijn uit A_4 op A_2A_3. De negenpuntscirkel van driehoek $A_2A_3A_4$ gaat dan ook door D_{23} en door E_{23}.
Beide negenpuntscirkels liggen dus op eenzelfde bol, waarvan het middelpunt het punt Z is. En uiteraard geldt dat eveneens voor de negenpuntscirkels van de andere (zijvlaks)driehoeken. Zodat:

In een orthogonaal viervlak liggen de negenpuntscirkels van de zijvlaksdriehoeken op dezelfde bol.

De bedoelde bol gaat dus in ieder geval door 12 (6 maal 2) punten op de ribben van het viervlak, namelijk door de punten D_{jk} en E_{jk}; **zie figuur 8**.

Figuur 8



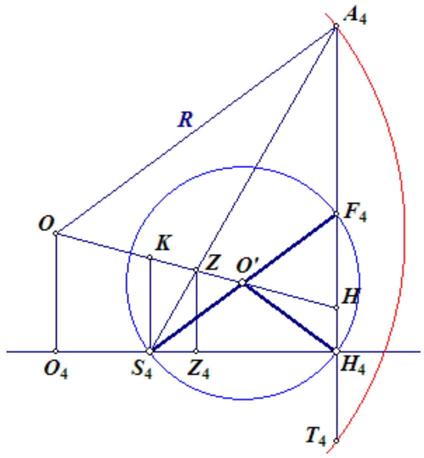
De negenpuntscirkels in de zijvlakken gaan ook door de 'bovenste stukken' van de driehoekshoogtelijnen in de zijvlakken. Er liggen dus nog eens 12 (4 maal 3) punten op de bol (deze punten zijn in figuur 8 niet getekend).
De bol wordt daarom de **24-puntsbol** van het orthogonale viervlak genoemd.
Het punt Z is het midden van elk van de bimedianen van het viervlak (dus bijvoorbeeld van $E_{14}E_{23}$).
De straal van de 24-puntsbol is dus gelijk aan de helft van de afstand tussen de middens van twee kruisende ribben van het orthogonale viervlak [8].

[8] Er geldt: De lengtes van de bimedianen van een orthogonaal viervlak zijn gelijk.

De 12-puntsbol van een orthogonaal viervlak

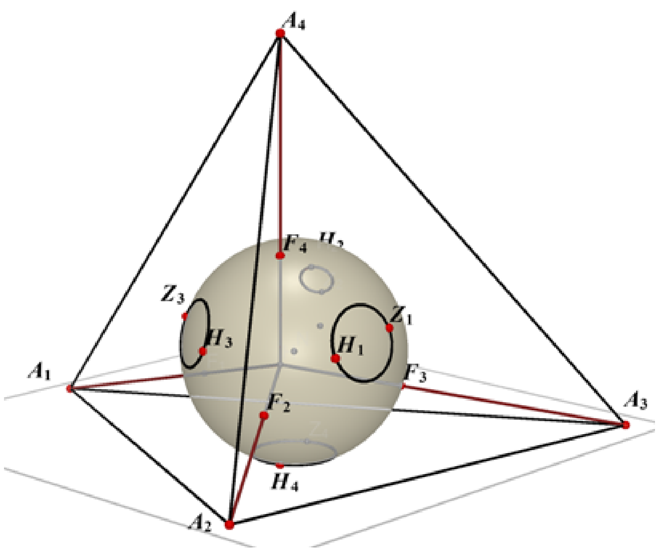
In figuur 7 bekijken we het vlak door de Euler-lijn en de loodlijn A_4H_4 op het vlak $A_1A_2A_3$. Een deel van dat vlak is in **figuur 9** weergegeven.

Figuur 9



De punten O_4, S_4, Z_4 en H_4 zijn opvolgend het middelpunt van de omcirkel, het zwaartepunt, het middelpunt van de negenpuntscirkel en het hoogtepunt van driehoek $A_1A_2A_3$.
De verhoudingen op het lijnstuk O_4H_4 zijn nu uit de vlakke meetkunde bekend: is $S_4Z_4 = a$, dan is $O_4S_4 = 2a$, $Z_4H_4 = 3a$. Die verhoudingen vinden we vanwege de loodrechte projectie ook terug op het lijnstuk OH.
We kiezen nu H als centrum van een vermenigvuldiging f met factor $\frac{1}{3}$. Daardoor wordt het middelpunt O van de ombol (straal $R = OA_4$) van het viervlak afgebeeld op het punt O'. Verder vinden we dan op A_4H_4 het punt F_4 met $F_4 = f(A_4)$.
A_4S_4 is een viervlakszwaartelijn, dus $A_4Z : ZS = 3 : 1$. Ook is $OZ : ZO' = 3 : 1$, met als gevolg dat $O'S_4 \,//\, OA_4$. En dus is $O'S_4 = \frac{1}{3}R$.
Door de vermenigvuldiging f is ook $O'F_4 \,//\, OA_4$: de punten S_4, O', F_4 zijn dus collineair, waarbij $O'F_4 = \frac{1}{3}R$.
Driehoek $S_4H_4F_4$ (rechthoekig in H_4) heeft H_4O' als zwaartelijn. Zodat ook: $O'H_4 = \frac{1}{3}R$.

Figuur 10



De ombol van het viervlak wordt door de vermenigvuldiging f afgebeeld op een bol met middelpunt O' die gaat door de punten S_4, H_4, F_4. Voor H_4 hebben we dan $H_4 = f(T_4)$, waarbij T_4 het tweede punt is van de ombol waarin de lijn A_4H_4 de ombol snijdt.
We kunnen hetzelfde bewijzen voor de andere punten S_k (zwaartepunt van een zijvlak), H_k (hoogtepunt van een zijvlak) en F_k (punt op $\frac{1}{3}$ van de afstand van H tot het hoekpunt A_k van het viervlak). En dus:

In een orthogonaal viervlak liggen de zwaartepunten en de hoogtepunten van de zijvlakken, alsmede de punten op een derde van de afstand van het viervlakshoogtepunt tot de hoekpunten op een bol.

Deze bol gaat dus door 12 (4 maal 3) bijzondere punten van het viervlak en wordt daarom de **12-puntsbol** [9] van het orthogonale viervlak genoemd; **zie figuur 10**. De straal van de 12-puntsbol is gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de straal van de ombol.

[9] De 12-puntsbol is in 1863 voor het eerst beschreven door **P.M.E. Prouhet**, 1817-1867, Frankrijk. Hij publiceerde een en ander in een artikel onder de naam '*Analogies du triangle et du tétraèdre*' (In: Nouvelles Annales du Mathématique, Serie 2, vol ii, p.138).