# Over de lengte van *OH*, *OZ* en *OI* in een willekeurige driehoek

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (Nederland)
april 2007

## 1. De lengte van *OH* en *OZ*

De punten $O$, $H$ en $Z$ zijn opvolgend het *omcentrum* (middelpunt van de omgeschreven cirkel, die hier *omcirkel* genoemd wordt), het *hoogtepunt* en het *zwaartepunt* van een willekeurige driehoek $ABC$.
De lengte van de straal van de omcirkel ($O$) van die driehoek geven we aan met $R$, de lengtes van de zijden (zoals gebruikelijk) met $a$, $b$, $c$.
We laten zien dat:

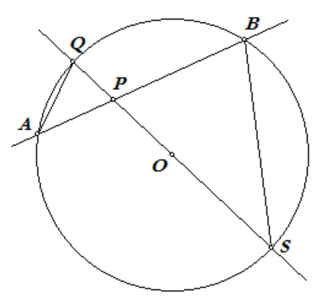
**Stelling 1.**
**a.** $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$
**b.** $OZ^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

We bewijzen allereerst:

**Lemma 1.** *Snijdt een lijn door een willekeurig, maar vast punt $P$ een cirkel ($O$, $R$) in de punten $A$ en $B$, dan is:*

$$PA \cdot PB = k \text{ } (k \text{ is constant})$$

*waarbij* $k = |\, OP^2 - R^2 \,|$




**Bewijs.** In de figuur hiernaast (met $P$ binnen de cirkel) is:

$$\angle AQP = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{bg}(AS) = \angle PBS.$$

De driehoeken $APQ$ en $SPB$ zijn daarmee gelijkvormig ($hh$), zodat:

$$PA : PS = PQ : PB$$

of:

$$PA \cdot PB = PQ \cdot PS = (R - OP)(R + OP)$$

Dus: $$PA \cdot PB = R^2 - OP^2$$ □

***Opmerkingen.***
**1.** Ligt $P$ buiten de cirkel, dan is $PA \cdot PB = OP^2 - R^2$.
**2.** Het getal $m = OP^2 - R^2$ wordt wel de **macht van het punt $P$ bij de cirkel** ($O$) genoemd. Daaruit volgt dat $m < 0$ is als $P$ *binnen* de cirkel ($O$) ligt, $m = 0$ als $P$ op de cirkel ligt, en $m > 0$ als $P$ *buiten* de cirkel ligt.

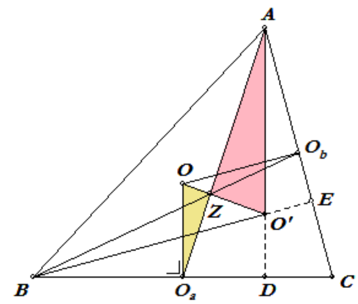
En vervolgens:

**Lemma 2.** *Is $O_a$ de projectie van $O$ op de zijde $BC$ van driehoek $ABC$ ($O_a$ is dan het midden van $BC$), dan geldt:*

$$AH = 2 \cdot OO_a$$

**Bewijs.** We bewijzen lemma 2 alleen voor een *scherphoekige* driehoek. Het bewijs voor een rechthoekige of stomphoekige driehoek verloopt analoog.

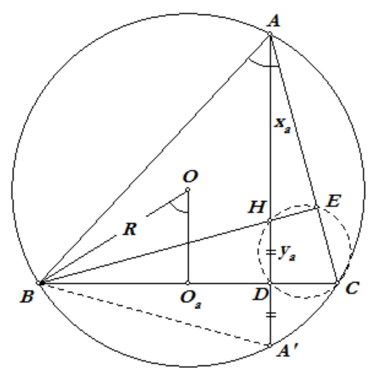



We vermenigvuldigen driehoek $OO_aZ$ met de factor -2 ten opzichte van het punt $Z$. Het beeld van $O$ bij deze vermenigvuldiging zij $O'$. Het beeld van $O_a$ is dan het punt $A$.
Door die vermenigvuldiging is $O'A$ // $OO_a$, zodat ook $O'A$ loodrecht staat op $BC$.
De lijn $AO'$ is dus de hoogtelijn uit $A$.
Op dezelfde manier kunnen we bewijzen dat de lijn $BO'$ hoogtelijn is van driehoek $ABC$.
Het punt $O'$ valt dus samen met het hoogtepunt $H$ van de driehoek.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $OO_aZ$ en $O'AZ$ volgt dan:

$$AO' = AH = 2 \cdot OO_a \qquad \square$$

**Gevolg.** Het zwaartepunt $Z$ ligt op de lijn $OH \equiv OO'$, waarbij $OZ : ZO' = 1 : 2$. □

## Bewijs van stelling 1a




In nevenstaande figuur snijdt de hoogtelijn uit $A$ de zijde $BC$ in het punt $D$ en de omcirkel van driehoek $ABC$ ook nog in het punt $A'$. De lijn $BE$ is de hoogtelijn op de zijde $CA$. Het punt $O_a$ is ook hier de projectie van $O$ op de zijde $BC$.
Stellen we nu $AH = x_a$, $HD = y_a$ en $AD = h_a = x_a + y_a$, dan geldt, omdat ook $HD = DA' = y_a$ en volgens lemma 1 voor de macht van het punt $H$ bij cirkel ($O$):

$$R^2 - OH^2 = HA \cdot HA' = x_a \cdot 2y_a = 2x_ay_a$$

of:

$$R^2 - OH^2 = 2x_a(h_a - x_a)$$

En zo ook, met overeenkomstige betekenis en naamgeving voor $h_b$, $h_c$, $x_b$, $x_c$:

$$R^2 - OH^2 = 2x_b(h_b - x_b)$$
$$R^2 - OH^2 = 2x_c(h_c - x_c)$$

Optelling van deze drie uitdrukkingen voor $R^2 - OH^2$ geeft dan:

$$3(R^2 - OH^2) = 2(x_ah_a + x_bh_b + x_ch_c) - 2(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2) \qquad (1)$$

Volgens de cosinusregel in driehoek $ABC$ hebben we:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

waarbij $\cos\alpha = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE}{c}$, zodat:

$$AE = c\cos\alpha \qquad (3)$$

Omdat $HDCE$ een koordenvierhoek is, hebben we ook voor de macht van $A$ bij cirkel ($HDCE$):

$$AE \cdot AC = AH \cdot AD = x_a \cdot h_a$$

zodat via (3) blijkt dat: $\qquad bc\cos\alpha = x_ah_a$

En dan geeft (2): $\qquad 2x_ah_a = b^2 + c^2 - a^2$

Uitdrukking (1) kan dan geschreven worden als:

$$3(R^2 - OH^2) = (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) - 2(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2)$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2) \qquad (4)$$

Nu is verder in driehoek $BOO_a$ volgens de stelling van Pythagoras:

$$R^2 - (\tfrac{1}{2}a)^2 = (OO_a)^2 \qquad (5)$$

En volgens lemma 2:

$$AH = x_a = 2 \cdot OO_a \qquad (6)$$

Zodat via (5) en (6) blijkt dat:

$$x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 = 4\cdot(OO_a)^2 + 4\cdot(OO_b)^2 + 4\cdot(OO_c)^2 =$$
$$= 4(R^2 - \tfrac{1}{4}a^2) + 4(R^2 - \tfrac{1}{4}b^2) + 4(R^2 - \tfrac{1}{4}c^2)$$
$$= 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

En dit geeft dan in (4):

$$3(R^2 - OH^2) = (a^2 + b^2 + c^2) - 24R^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

of, na deling door 3:

$$R^2 - OH^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$$

zodat:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad \square$$

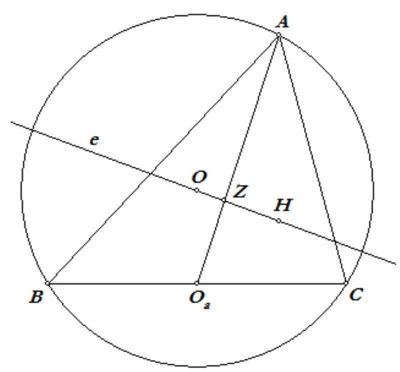
### Bewijs van stelling 1b

Zoals bekend (en zie daartoe ook het gevolg van lemma 2) ligt het zwaartepunt $Z$ van een driehoek op de **Euler-lijn** $e$ ($\equiv OH$) van die driehoek, waarbij $OZ = \tfrac{1}{3}OH$.
Uit stelling 1a volgt dan:

$$9OZ^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

of:

$$OZ^2 = R^2 - \tfrac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \square$$




## 2. De lengte van *OI*

Het punt $I$ is het *incentrum* van driehoek $ABC$; $I$ is het middelpunt van de *incirkel* (ingeschreven cirkel) van de driehoek. We geven de lengte van de straal van de incirkel aan met $r$.
We zullen nu bewijzen [1]:

**Stelling 2.** $OI^2 = R^2 - 2Rr$

***Opmerking.*** Deze formule is voor het eerst bewezen door **Leonard Euler** (1707-1783, Zwitserland), en wordt daarom wel *formule van Euler* (naast de vele andere) genoemd.

In de onderstaande figuur snijdt de lijn $OO_a$ de omcirkel van driehoek $ABC$ in de punten $A'$, $A''$.
Omdat de lijn $AI$ de bissectrice is van hoek $A$, snijdt die lijn de omcirkel in het punt $A'$; dit punt is het midden van bg($BC$).

Het punt $U_a$ is het middelpunt van de *uitcirkel* van de zijde $BC$; d.w.z. dat $U_a$ is het middelpunt van de cirkel die 'inwendig' raakt aan $BC$ en aan de verlengden van de zijden $AB$ en $AC$. Dit houdt in dat de lijn $U_aB$ loodrecht staat op $BI$; met andere woorden: driehoek $BIU_a$ is rechthoekig in $B$ (immers, de binnen- en buitenbissectrice van hoek $B$ staan loodrecht op elkaar).

We bewijzen nu eerst:

**Lemma 3.** *In driehoek* $BIU_a$ *geldt*: $BA' = IA' = U_aA'$.

**Opmerking.** Lemma 3 zegt dus, dat $BA'$ zwaartelijn is naar de schuine zijde $IU_a$ van de rechthoekige driehoek $BIU_a$.

**Bewijs.** In de figuur zijn enkele hoeken aangegeven met de letters $x$, $y$, $z$, $t$, $u$.
We zullen aantonen dat $t = u$. Immers, daaruit volgt het in lemma 3 gestelde ($BA'$ is dan zwaartelijn in driehoek $BIU_a$).
Uit de *stelling van de omtrekshoek* volgt nu $x = z$, immers:

$$x = ½\ \mathrm{bg}(A'C) = z$$

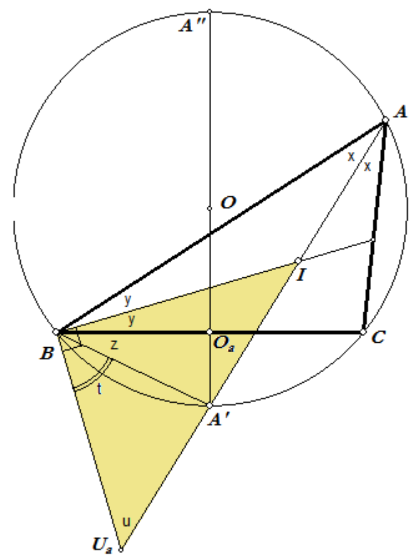
Nu is, omdat $BU_a$ buitenbissectrice is van hoek $B$:

$$t = \tfrac{1}{2}(180° - \angle B) - z = 90° - y - z$$

Voor $u$ vinden we in driehoek $BAU_a$:

$$\begin{aligned} u &= 180° - (t + z + 2y) - x = 180° - t - z - 2y - z = \\ &= 180° - (90° - y - z) - 2y - 2z = \\ &= 90° - y - z \end{aligned}$$

Zodat inderdaad blijkt dat: $t = u$. □




**Gevolg.** In driehoek $BIU_a$ is: $BA' = IA'$. □

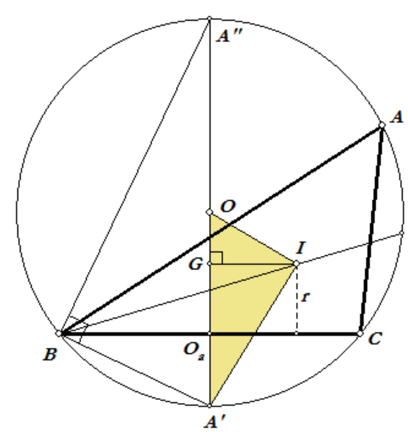
## Bewijs van stelling 2

In de figuur hiernaast is het punt $G$ de projectie van $I$ op $A'A''$, waardoor $GO_a = r$. Verder is driehoek $A'A''B$ rechthoekig in $B$ (*Thales-driehoek*).
We stellen $OI = d$. Verder is natuurlijk $OA' = R$.
In driehoek $OIA'$ is dan volgens de cosinusregel:

$$(IA')^2 = OI^2 + (OA')^2 - 2 \cdot \underline{OI \cdot OA' \cdot \cos \angle IOA'} \qquad (7)$$

Op basis van het gevolg van lemma 3, en omdat in driehoek $GOI$ geldt dat $OI \cdot \cos \angle IOA' = OG$, kunnen we (7) schrijven als:

$$\begin{aligned} (BA')^2 &= d^2 + R^2 - 2R \cdot OG \\ &= d^2 + R^2 - 2R \cdot (OO_a - r) \end{aligned} \qquad (8)$$




In de rechthoekige driehoek $A'A''B$ geldt:

$$(BA')^2 = A'O_a \cdot A'A'' = A'O_a \cdot 2R$$

Zodat daarmee (8) overgaat in:

$$A'O_a \cdot 2R = d^2 + R^2 - 2R \cdot (OO_a - r)$$
$$2R \cdot (A'O_a + OO_a) = d^2 + R^2 + 2Rr$$
$$2R \cdot OA' = d^2 + R^2 + 2Rr$$
$$2R^2 = d^2 + R^2 + 2Rr$$

En uit deze laatste uitdrukking volgt dan:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$ □

## 3. Noot

[1] Zie voor een ander bewijs van stelling 2 eventueel ook:
Dick Klingens: *Om- en incirkel*. Op: *www.pandd.demon.nl/omincirkel.htm* (webpagina).