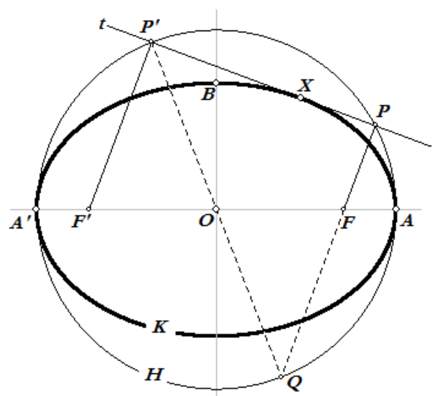
De orthoptische cirkel van een ellips (de Monge-cirkel)

DICK KLINGENS (e-mail: *dklingens@pandd.nl*)
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel (Nederland)
31 januari 2007

In hetgeen volgt zullen we enkele bewijzen bekijken die betrekking hebben op de zogenoemde ***orthoptische cirkel*** [1] van een ellips.
De punten van deze cirkel hebben de eigenschap dat de beide raaklijnen uit zo'n punt (uiteraard gelegen buiten de ellips) loodrecht op elkaar staan (zie Stelling 4 hierna).
De orthoptische cirkel wordt ook wel ***Monge-cirkel*** genoemd, naar Gaspard Monge (1746-1818, Frankrijk). Het is evenwel Philippe de la Hire (1640-1718, Frankrijk) die in 1685 als eerste bedoelde eigenschap vermeldde en bewees (in zijn *Sectiones conicae*; 1704) [2].

1. Eerste bewijs

Hulpstelling 1. *Het product van de afstanden van de brandpunten F, F' van een ellips K tot een raaklijn t aan K is constant.*



Bewijs. De lijn t raakt aan de ellips K in het punt X. Zijn nu FP en $F'P'$ de in de stelling bedoelde afstanden.

We zullen laten zien dat

$$FP \cdot F'P' = b^2$$

waarbij b de lengte is van de halve korte as (OB) van K.

Overigens, en zoals gebruikelijk, stellen we de lengte van de lange as (AA') van K gelijk aan $2a$, en de afstand FF' tussen de brandpunten F en F' gelijk aan $2c$.

Zij H de ***hoofdcirkel*** van K (d.i. de cirkel met middelpunt O waarvan de middellijn gelijk is aan de lange as (de hoofdas AA') van de ellips.
De punten P, P' zijn de loodrechte projecties van F, F' op t, waardoor P en P' beide op H liggen (zie voor het bewijs hiervan Hulpstelling 2).
Het tweede snijpunt van de lijn FP met H is het punt Q. Vanwege de symmetrie is dan:

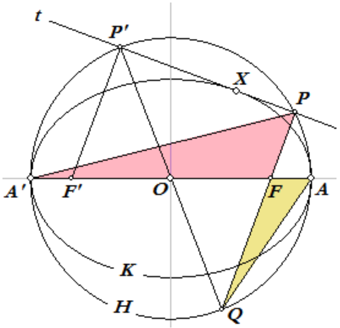
$$FQ = F'P'$$

Voorts kunnen we voor de punten P, Q, A', A van H op twee manieren de ***macht*** van F ten opzichte van de cirkel H berekenen (zie ook de hierna volgende *Opmerking*):

$$FP \cdot FQ = FA \cdot FA'$$

$$FP \cdot F'P' = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$$

En dit is hetgeen we wilden aantonen. □



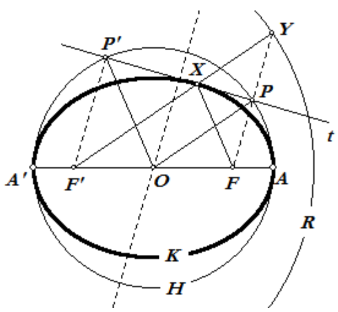
Opmerking. In het bewijs van Hulpstelling 1 is gebruik gemaakt van de macht van het punt F ten opzichte van H. Ook zonder dit begrip is eenvoudig aan te tonen, dat $FP \cdot FQ = FA \cdot FA'$.

Immers, de driehoeken FAQ en FPA' zijn gelijkvormig (*hh*; de hoeken bij F zijn gelijk en $\angle A = \angle P = ½\text{bg}(A'Q)$ op cirkel H). Zodat:

$$FA : FP = FQ : FA' \text{ of } FP \cdot FQ = FA \cdot FA'$$

Hulpstelling 2. *De projecties P, P' van de brandpunten F, F' van K op een willekeurige raaklijn aan K liggen op de hoofdcirkel H van K.*

Bewijs. We zullen deze eigenschap hier op twee manieren, synthetisch en analytisch, bewijzen.



2.1. Synthetisch. We zullen later zien (in het Tweede bewijs; in paragraaf 2) dat het spiegelbeeld Y van F in de raaklijn t (met raakpunt X) op een ***richtcirkel*** R[3] van K ligt, én dat Y op het verlengde ligt van $F'X$.
De bedoelde richtcirkel R is hier de cirkel (F', $AA' = 2a$).
Omdat P en O middens zijn van de zijden FY en FF' van driehoek FYF', en daarbij $F'Y = 2a$ is, geldt:

$$OP = ½\, F'Y = a$$

Verder gaat in het rechthoekige trapezium $FPP'F'$ de middelloodlijn van PP' door het punt O, waaruit direct volgt dat:

$$OP' = OP = a$$

De punten P en P' liggen dus op de cirkel (O, a); en dat is de hoofdcirkel van K. □

2.2. Analytisch. We gaan uit van de standaard vergelijking van K in een rechthoekig assenstelsel *Oxy*:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Een vergelijking van de raaklijn t met *gegeven* richtingscoëfficiënt m is dan:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}\text{ , zodat }\; y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \tag{1.1}$$

Een vergelijking van de lijn FY, loodlijn op t door $F = (c, 0)$, is op basis hiervan:

$$y = -\tfrac{1}{m}x + \tfrac{c}{m}\text{ , zodat }\; my + x = c \tag{1.2}$$

De coördinaten van het snijpunt P (en, analoog te werk gaand, ook van P') voldoen aan (1.1) en aan (1.2), dus ook aan een combinatie van die twee vergelijkingen waarin m niet voorkomt. We elimineren dan ook m uit (1.1) en (1.2).
Kwadrateren van de vergelijkingen (1.1) en (1.2), gevolgd door optelling, geeft dan:

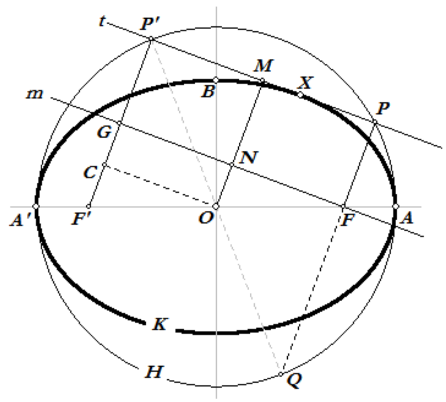
$$\begin{aligned}(1+m^2)y^2 + (1+m^2)x^2 &= a^2m^2 + (b^2 + c^2)\\ &= (1+m^2)a^2\end{aligned}$$

zodat:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

En dit is een vergelijking van de hoofdcirkel van K. □

Hulpstelling 3. *Het kwadraat van de afstand van het middelpunt O van K tot een raaklijn t verminderd met het kwadraat van de afstand van O tot een lijn m door een brandpunt F én evenwijdig met t, is constant.*



Bewijs. Is m de lijn door F evenwijdig met t, en zijn OM en ON de in deze stelling bedoelde afstanden.

We zullen nu aantonen dat:

$$OM^2 - ON^2 = b^2$$

De punten C en G zijn de projecties van opvolgend O en N op de lijn $F'P'$.
Vanwege de congruentie van de driehoeken OCF' en FNO (HZH) is dan (omdat OC // t):

$$F'C = ON$$

En dan is: $F'P' = F'C + C'P = ON + OM$ en $FP = OM - ON$
zodat: $F'P' \cdot FP = (OM + ON)(OM - ON) = OM^2 - ON^2$
met andere woorden (en zie daarvoor Hulpstelling 1):

$$OM^2 - ON^2 = b^2$$

En dit wilden we bewijzen. □

Opmerking. Het bewijs van Hulpstelling 3 kan (natuurlijk) ook worden geleverd volgens de analytische methode, en dan *zonder* gebruik te maken van Hulpstelling 1.
Uitgaande van de standaard vergelijking van K in een loodrecht assenstelsel Oxy:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

is een vergelijking van de raaklijn t aan K in het punt $X = (p, q)$:

$$b^2px + a^2qy = a^2b^2$$

waarbij, vanwege de ligging van X op K:

$$b^2p^2 + a^2q^2 = a^2b^2$$

Voor de berekening van de afstand OM van O tot t schrijven we de vergelijking van t in de zogenoemde ***normaalvorm***:

$$\frac{b^2px + a^2qy - a^2b^2}{\sqrt{b^4p^2 + a^4q^2}} = 0$$

Met $n = \sqrt{b^4p^2 + a^4q^2}$ is dan: $OM = \frac{1}{n} \cdot | -a^2b^2 |$

Voor de lijn t', die evenwijdig is met t en door $F = (c, 0)$ gaat, hebben we dan de vergelijking:

$$b^2px + a^2qy = b^2pc$$

$$\tfrac{1}{n} \cdot (b^2px + a^2qy - b^2pc) = 0$$

zodat voor de afstand ON van O tot t' geldt:

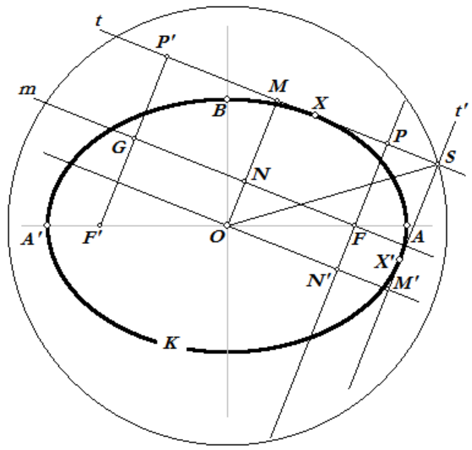
$$ON = \tfrac{1}{n} \cdot | -b^2pc |$$

Dan is:

$$\begin{aligned} OM^2 - ON^2 &= \tfrac{1}{n^2}\cdot(a^4b^4 - b^4p^2c^2) = \tfrac{b^2}{n^2}\cdot\left(a^4b^2 - b^2p^2(a^2-b^2)\right) \\ &= \tfrac{b^2}{n^2}\cdot\left(a^2(b^2p^2 + a^2q^2) - a^2b^2p^2 + b^4p^2\right) \\ &= \tfrac{b^2}{n^2}\cdot(a^4q^2 + b^4p^2) = \tfrac{b^2}{n^2}\cdot n^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

En dit is wat in Hulpstelling 3 is geformuleerd. □

Stelling 4. (***Orthoptische cirkel***) *De meetkundige plaats van de snijpunten S van loodrechte raaklijnen aan een ellips K (met middelpunt O) is een cirkel met O als middelpunt en met een straal die gelijk is aan* $\sqrt{a^2+b^2}$.

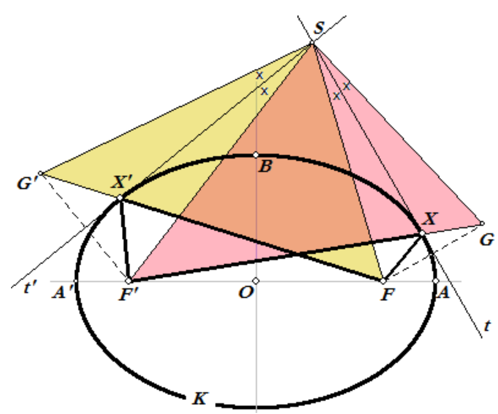


Bewijs. Is t' een raaklijn in X' aan K die in het punt S loodrecht staat op de raaklijn t.
De punten M', N' spelen hier nu dezelfde rol als de punten M, N in Hulpstelling 3.

Dan is: $OM^2 - ON^2 = b^2$ en $OM'^2 - ON'^2 = b^2$.

En dan, via optelling: $OM^2 + OM'^2 = 2b^2 + (ON^2 + ON'^2)$
Nu is: $OM^2 + OM'^2 = OS^2$ en $ON^2 + ON'^2 = OF^2 = c^2$
Dus: $OS^2 = 2b^2 + c^2 = a^2 + b^2$
Het punt S ligt dus op een cirkel met middelpunt O en straal $\sqrt{a^2+b^2}$. □

2. Tweede bewijs



We bekijken allereerst raaklijnen t, t' in X, X' uit een *willekeurig* punt S aan de ellips K.
Zijn G en G' de spiegelbeelden van de punten F en F' in de 'dichtst daarbij gelegen' raaklijnen.
Een gevolg van de (bekende) eigenschap, dat *de raaklijn in een punt van een ellips bissectrice is van de buitenhoek tussen de brandpuntsvoerstralen*, is nu dat de punten G en G' liggen op de verlengden van één van die brandpuntsvoerstralen.
Hier: G ligt op het verlengde van $F'X$ en G' ligt op het verlengde van FX'.
Verder is dan:

$$XF + XF' = 2a = GF' \text{ en } X'F + X'F' = 2a = G'F$$

zodat: $$GF' = G'F$$

Voor de zijden van de driehoeken SFG' en SGF' geldt nu verder:

$$SF = SG \text{ en } SG' = SF'$$

zodat die driehoeken congruent zijn (*ZZZ*). De hoeken bij S in deze driehoeken zijn dan gelijk.
Deze hoeken hebben het hoekdeel FSF' gemeenschappelijk, zodat:

$$\angle FSG = \angle F'SG'$$

Omdat de driehoeken *FGS* en *F'G'S* gelijkbenig zijn, zijn *t* en *t'* bissectrices van de tophoeken in deze driehoeken.

Stel nu dat $\angle XSX' = 90°$.

In driehoek *FSG'* is dan $\angle FSG'$ eveneens gelijk aan 90°.
We hebben nu volgens de ***zwaartelijnformule*** [4] in driehoek *FSF'*:

$$SO^2 = \tfrac{1}{2}SF^2 + \tfrac{1}{2}SF'^2 - \tfrac{1}{4}FF'^2$$

of:
$$SO^2 = \tfrac{1}{2}(SF^2 + SF'^2) - c^2$$

In de rechthoekige driehoek *FSG'* is dan:

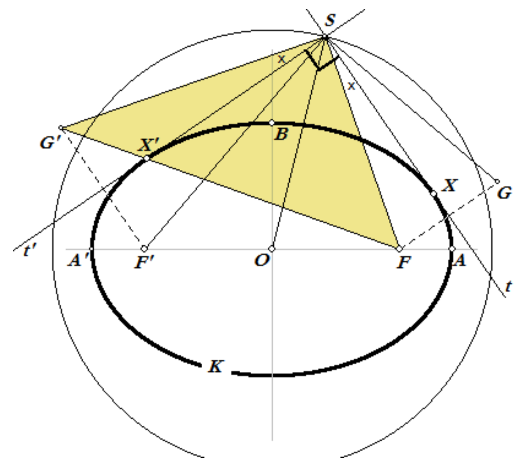
$$SF^2 + SG'^2 = FG'^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

En wegens $SG' = SF'$ is:

$$SF^2 + SF'^2 = 4a^2$$

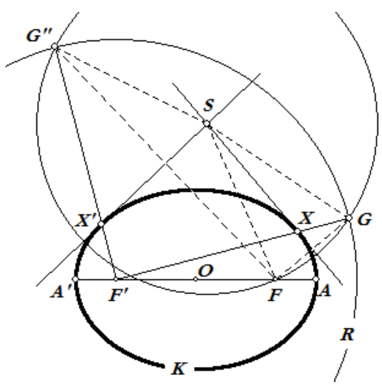
Zodat:

$$SO^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + (a^2 - c^2) = a^2 + b^2$$



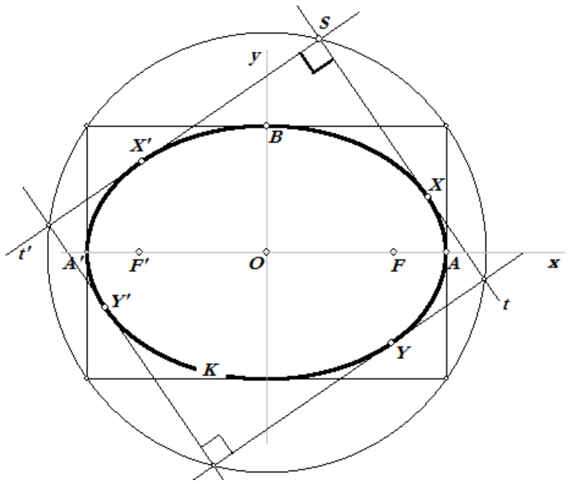
Waarmee wederom bewezen is dat *S* op de cirkel met middelpunt *O* en straal $\sqrt{a^2 + b^2}$ ligt. □

Opmerking. Uit bovenstaand bewijs volgt een ***passer-liniaal-constructie*** van de raaklijnen uit een punt *S* aan een ellips *K* die vastgelegd is door de in ligging gegeven brandpunten *F*, *F'* en de lengte 2*a* (= *AA'*) van de grote as.



Omdat het punt *G* op het verlengde ligt van *F'X*, ligt *G* ook op een richtcirkel van *K*.
In de hiernaast staande figuur is *R* de richtcirkel van *K* met middelpunt *F'* en straal 2*a*.
De cirkel (*S*, *SF*) snijdt *R* in de punten *G* en *G"*. De middelloodlijnen van de lijnstukken *FG* en *FG"* (die uiteraard door *S* gaan) zijn nu de raaklijnen uit *S* aan *K*.

3. Derde bewijs - analytisch



We kiezen weer een loodrecht assenstelsel Oxy waarbij K de standaard vergelijking

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

heeft.

Een vergelijking van een raaklijn t aan K met een gegeven richting m is dan:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad (3.1)$$

(We hebben hier twee raaklijnen, rakend in X en Y'.)

Een vergelijking van een raaklijn (ook weer twee) die hier loodrecht op staat, is dan:

$$y = -\tfrac{1}{m}x \pm \sqrt{\tfrac{a^2}{m^2} + b^2} \qquad (3.2)$$

De coördinaten van het punt S voldoen aan de vergelijkingen (3.1) en (3.2), dus aan iedere combinatie van (3.1) en (3.2), en dan ook aan een combinatie daarvan, waarin m niet voorkomt.
Voor de meetkundige plaats van S elimineren we m uit de vergelijkingen (3.1) en (3.2). Dit geeft allereerst door kwadrateren:

$$\begin{cases} \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} = y - mx \\ \pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2} = y + \frac{1}{m}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2m^2 + b^2 = y^2 - 2mxy + m^2x^2 \\ a^2 + b^2m^2 = m^2y^2 + 2mxy + x^2 \end{cases}$$

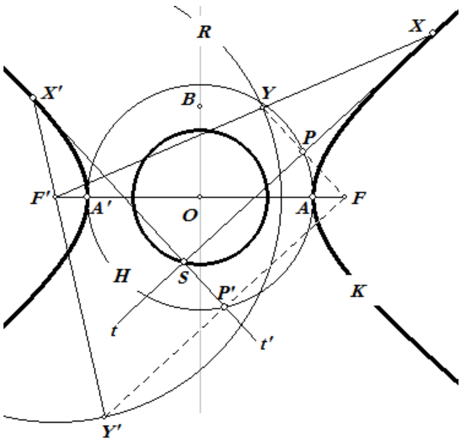
Optelling van beide laatste vergelijkingen leidt dan tot:

$$(1+m^2)x^2 + (1+m^2)y^2 = (1+m^2)a^2 + (1+m^2)b^2$$
$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

En ook nu: de meetkundige plaats van de punten S is een cirkel met middelpunt O en straal $\sqrt{a^2 + b^2}$. □

Opmerking. De cirkel kan ook worden beschouwd als de meetkundige plaats van de hoekpunten van de omgeschreven rechthoeken van de ellips.
De rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de assen, geeft een eenvoudige constructie van de orthoptische cirkel. In bovenstaande figuur is namelijk $a^2 + b^2 = OA^2 + OB^2 = AB^2$.

4. Naschrift

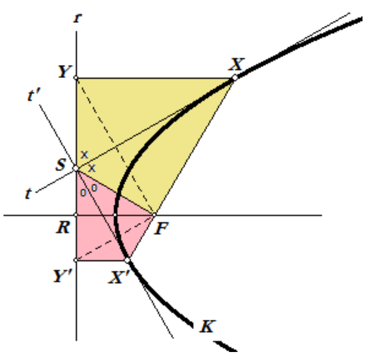


Ook bij een **hyperbool** kunnen we een orthoptische cirkel vinden.
Ook dan heeft een punt van die cirkel de eigenschap dat de raaklijnen daaruit aan de hyperbool loodrecht op elkaar staan.
De bewijzen en de afleiding van de vergelijking verlopen (min of meer) op dezelfde manier als in de hierboven staande paragrafen.
Een vergelijking van de orthoptische cirkel van de hyperbool met standaard vergelijking

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

(met $a > b$) is: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

Dat deze vergelijking juist is, kunnen we eenvoudig nagaan door in de analytische bewijzen hierboven b^2 steeds te vervangen door $-b^2$.



Bij een **parabool** ontaardt de orthoptische cirkel in een rechte lijn, namelijk de **richtlijn** *r* van de parabool.
In de figuur hiernaast zijn immers de vierhoeken *FXYS* en *FX'Y'S* vliegers; de diagonalen van elk staan loodrecht op elkaar, en $XF = XY$, resp. $X'F = X'Y'$ met *Y*, *Y'* op de richtlijn *r* van de parabool. De raaklijnen *t*, *t'* zijn dan (ook) bissectrices van de hoeken *FSY* en *FSY'*.
Is $\angle XSX' = 90°$, dan is $\angle YSY' = 180°$.
Het punt *S* ligt dan noodzakelijk op de lijn *r*.
De richtlijn heet daarom ook wel ***orthoptische lijn*** van de parabool.

Literatuur

- D. Bos e.a.: *Moderne wiskunde, vwo bovenbouw B2, deel 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff (1999), p. 155.
- John Casey (1820-1891): *A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic sections*. London: Longmans & Co. (1893).
  Een overzicht van de inhoud en links naar de pagina's staan op:
  « *http://math-doc.ujf-grenoble.fr/LiNuM/TM/Gallica/S099630.html* »
- Martin Kindt: *Orthoptica*. In: *Euclides*, 77(4), 2002, pp. 172-176.
- Dick Klingens (website): *Twee raaklijnen aan een ellips*; *orthoptische cirkel*.
  Op: « *www.pandd.demon.nl/ellips/orthopt.htm* »

Noten

[1] Grieks: ὀρθός (orthos) = recht, ὀπτικός (optikos) = het zien betreffend. Dus *orthoptisch*: onder een rechte hoek ziende.
Engels: *orthoptic circle*, Frans: *cercle orthoptique*.

[2] Dat de cirkel naar Monge is genoemd, is vermoedelijk gelegen in het feit, dat E. Livet, die leerling van Monge was, in *Correspondance sur l'École polytechnique* (volume 1, 1804-1808, p. 80), het bewijs van Stelling 4 aan Monge toedichtte.

[3] Een richtcirkel van een ellips (of hyperbool) is een cirkel met één van de brandpunten als middelpunt en de lengte van de grote as van die ellips (hyperbool) als middellijn. Een centrale kegelsnede heeft dus in het algemeen *twee* richtcirkels.
(Zie bijvoorbeeld: « *www.pandd.demon.nl/ellips/richtcirkel.htm* ».)

[4] Is z de lengte van de zwaartelijn uit het hoekpunt A van driehoek ABC (met zijden a, b, c), dan volgt uit de Stelling van Stewart:

$$z^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

(Zie bijvoorbeeld: « *www.pandd.demon.nl/stewart.htm* ».)

