Cabri-werkblad
Pool en poollijn bij een cirkel

1. Inleiding

In dit werkblad bekijken we enkele eigenschappen van de *pool* en *poollijn* bij cirkels (gedeelten uit de pooltheorie). Ook de *pooldriehoek* bij een cirkel, en daarmee samenhangend de *poolcirkel* van een driehoek, komt aan de orde. Tot slot bekijken we zogenoemde *copolaire driehoeken*.
We gaan er hierbij van uit dat leerling bekend is met de belangrijkste eigenschappen van gelijkvormige driehoeken, en ondermeer ook eigenschappen van omtrekshoeken van een cirkel. Voorts dient de leerling bekend te zijn met het gebruik van het programma Cabri Geometry II (Plus), in het bijzonder van de functie 'Rekenmachine'.

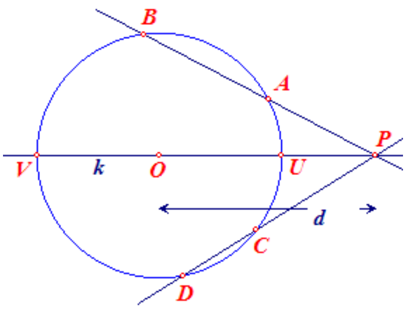
N.b. In de opdrachten staat vaak het teken 🖹. De bedoeling daarvan is dat de uitwerking van zo'n onderdeel *in ieder geval* opgenomen wordt in een verslag (of op een antwoordblad).
Het einde van elke opdracht wordt aangegeven met het teken «.

2. Raaklijnen

Opdracht 1a

In figuur 1 zijn onder meer getekend een cirkel met middelpunt O en een punt P daarbuiten. De straal van de cirkel is k.

figuur 1



De lijn OP snijdt (O) [1] in de punten U en V. De lijn PAB, waarbij A en B op (O) liggen, is een willekeurige lijn door P.

- 🖹 Toon aan dat de driehoeken PUB en PAV gelijkvormige driehoeken zijn.
  Aanwijzing. Gebruik omtrekshoeken.
- 🖹 Laat zien dat uit deze gelijkvormigheid volgt dat
  $$PA \cdot PB = PU \cdot PV$$

Als $OP = d$, leidt dan uit $PA \cdot PB = PU \cdot PV$ af dat $PA \cdot PB = d^2 - k^2$.
De uitdrukking $PA \cdot PB$ is blijkbaar *constant* (voor iedere A, B op de cirkel, en een vast punt P).

- 🖹 Verklaar dat.
- 🖹 Kies door het punt P een derde lijn die de cirkel in C en D snijdt.
  Waarom is nu ook $PA \cdot PB = PC \cdot PD$?
- Je kan met Cabri's Rekenmachine eveneens illustreren dat $PA \cdot PB$ constant is. Beschrijf kort hoe je dat zou kunnen doen. Voeg een afdruk van de constructie die je daarbij gebruikt, toe aan het verslag.«

Opdracht 1b

Als de punten A en B samenvallen, dan is de lijn PAB een raaklijn aan (O).

- 🖹 Waarom is dat zo?
- 🖹 Toon aan dat in dit geval geldt: $(PA)^2 = d^2 - k^2$.«

---

[1] In hetgeen volgt schrijven we in plaats van 'de cirkel met middelpunt O' vaak (O).

Afspraken. De constante $d^2 - k^2$ heet de **macht** van P bij de cirkel. Het lijnstuk tussen het punt P en het raakpunt van de raaklijn uit P aan de cirkel heet **raaklijnstuk**.

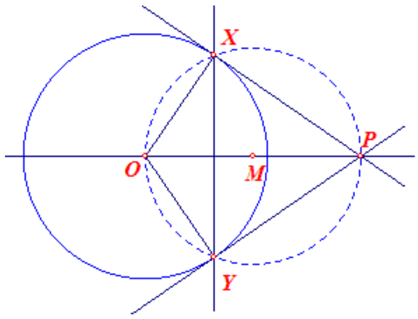
We hebben nu met Opdracht 1b bewezen:

Stelling 1
De macht van een punt (buiten een cirkel) is gelijk aan het kwadraat van een raaklijnstuk uit dat punt aan die cirkel.

Opdracht 2

In figuur 2 zijn we uit gegaan van (O) en weer een punt P dat (vooralsnog) *buiten* die cirkel ligt.

figuur 2



Het punt M is het midden van het lijnstuk OP. De cirkel met middelpunt M die gaat door het punt O, snijdt (O) in de punten X en Y.

- Waarom zijn de hoeken OXP en OYP rechte hoeken?
- Waarom zijn de lijnen PX en PY raaklijnen aan (O)?
- Waarom is de vierhoek $OXPY$ een vlieger?

- Bewijs dat de lijn XY loodrecht staat op de lijn OP.«

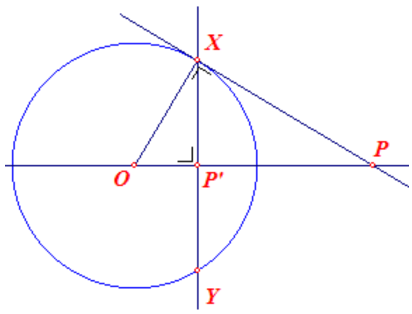
Afspraken. Het lijnstuk XY heet de **gemeenschappelijke koorde** van (O) en (M). De lijn OM heet de **centraal** van die cirkels.

We hebben dus bewezen:

Stelling 2
De centraal van twee cirkels staat loodrecht op de gemeenschappelijke koorde van die cirkels.

Opdracht 3a

figuur 3



In figuur 3 zien we een deel van figuur 2. Het snijpunt van de lijn OP met de lijn XY is het punt P'. De straal van (O) is weer k.

- Toon aan dat geldt:

$$OP \cdot OP' = k^2$$

Aanwijzing. Zoek twee driehoeken waarin OP en OP' als zijden voorkomen, en bewijs dat die driehoeken gelijkvormig zijn.«

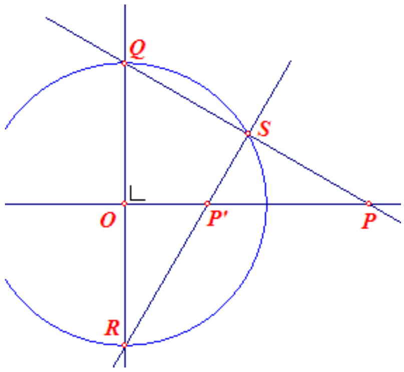
Opdracht 3b

- Maak met Cabri eenzelfde tekening als in figuur 3. Ga daarbij uit van (O) en het punt P buiten die cirkel.
- Verplaats het punt P en let daarbij op de positie van de lijn XY op je tekenblad.
  Bij welke positie(s) van het punt P bestaat de lijn XY niet? Waardoor wordt dat veroorzaakt?«

3. Pool, poollijn, constructie en definitie

Opdracht 4

figuur 4



De figuur hiernaast is als volgt opgebouwd:
- de cirkel O (met straal k) en een punt P buiten die cirkel;
- de lijn OP met in O de loodlijn daarop; deze loodlijn snijdt de cirkel in de punten Q en R;
- de lijn PQ snijdt de cirkel voor de tweede keer in het punt S;
- de lijn RS snijdt de lijn OP in het punt P'.

- Maak met Cabri ook een dergelijke tekening en teken daarin ook de loodlijn p in P' op OP.
- Verander de positie van het punt P op het tekenblad (kies daarbij ook posities van P op en binnen cirkel O).

🗉 De positie van de lijn p is in dit verband van belang.
Wat gebeurt er als het punt P een positie heeft in de buurt van het punt O?
Bij welke positie(s) van het punt P bestaat de lijn p niet?

🗉 Bewijs dat ook hier geldt: $OP \cdot OP' = k^2$.
Aanwijzing. Zoek weer twee driehoeken met OP en OP' als zijden, en bewijs dat die driehoeken gelijkvormig zijn.«

N.b. Merk op dat bij deze constructie, uitgaande van cirkel O en punt P (waarbij P niet samenvalt met O), het punt P' altijd bestaat!

Afspraak. De lijn p heet de **poollijn** van het punt P bij de cirkel O. Het punt P heet de **pool** van de lijn p bij die cirkel.

Opmerking. De poollijn van een punt P bij een cirkel (O, k) is dus de loodlijn op de lijn OP in het punt P' (gelegen op OP) dat bepaald wordt door $OP \cdot OP' = k^2$.

Opdracht 5, macro's?

De objecten in figuur 4 zouden als basis kunnen dienen voor de definitie van een macro, waarmee bij gegeven punt P en cirkel O de poollijn p van P bij die cirkel kan worden geconstrueerd.
Maar het omgekeerde kan natuurlijk ook: gegeven zijn dan een lijn p en een cirkel O.

🗉 Geef de constructiestappen waarmee, op basis van die gegevens, de pool P van de lijn p bij de cirkel kan worden gevonden.
Voeg een afdruk van je constructie toe aan het verslag.«

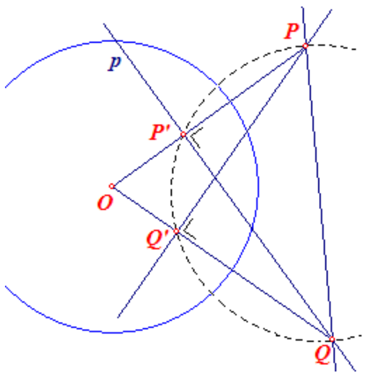
Opmerking. Natuurlijk kan je de bedoelde macro's zelf vastleggen. In hetgeen volgt zullen we echter gebruikmaken van een macro PoolEnPoollijn, waarmee hetzelfde gedaan kan worden als in Opdracht 5 is bedoeld: bij een punt en een cirkel de *poollijn* van dat punt tekenen, óf bij een lijn en een cirkel de *pool* van die lijn tekenen.
Deze macro kan worden gedownload via http://www.pandd.nl/downloads/pplc.zip.
In dat bestand is de bedoelde macro opgenomen, en wel in twee versies: PoolEnPoollijn.1.mac voor versie 1.0 van Cabri en PoolEnPoollijn.2.mac voor de versies 1.2.5 en 1.3 van Cabri Plus.

Opdracht 6a

De lijn p is de poollijn van P bij een gegeven cirkel O (met straal k). Op de lijn p ligt het punt Q.
We willen nu bewijzen dat de poollijn van Q door het punt P gaat (zie figuur 5).

Dat doen we echter *niet* door de poollijn van Q te tekenen! In plaats daarvan tekenen we de loodlijn uit P op de lijn OQ. Die loodlijn snijdt OQ in het punt Q'.
We zullen aantonen dat die loodlijn dan de poollijn is van het punt Q.
We hoeven nu alleen maar te bewijzen dat $OQ \cdot OQ' = k^2$ (immers de loodrechte stand op OQ hebben we via de constructie van PQ' zelf al bewerkstelligd; zie de opmerking na de definitie van poollijn).

figuur 5



De lijn OP snijdt p in het punt P'.

- Waarom is hier $OP \cdot OP' = k^2$? Waarom is hier $p \perp OP$?
- Waarom is vierhoek $PP'Q'Q$ een koordenvierhoek?
- Waarom geldt nu: $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$?
  Aanwijzing. Kijk nog eens naar Opdracht 1a.
- Waarom is de lijn PQ' inderdaad de poollijn van Q?«

Je kan hetgeen je gevonden hebt in Opdracht 6a formuleren als:

Stelling 3
Ligt het punt Q op de poollijn van het punt P bij een cirkel, dan ligt P op de poollijn van Q.

Opmerking. Stelling 3 wordt wel de *hoofdstelling van de pooltheorie* genoemd. De stelling is voor het eerst vermeld door Philippe de la Hire (1640-1718, Frankrijk). Daarom heet Stelling 3 ook wel de *stelling van De la Hire*.

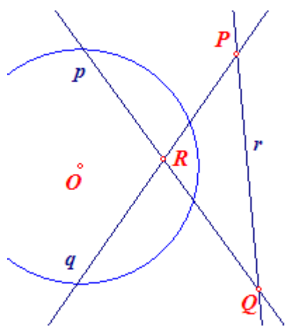
Opdracht 6b

Gegeven zijn een cirkel O en een punt P. Een lijn door P (niet gaande door O) snijdt de cirkel in de punten A en B. De raaklijnen in A en B aan (O) snijden elkaar in het punt S.

- Maak een Cabri-tekening op basis van het bovenstaande. Kies het punt P daarbij (eerst) buiten de cirkel.
- Bewijs dat het punt S op de poollijn van het punt P ligt.
  Aanwijzing. Gebruik Stelling 3.
- Geldt deze eigenschap ook als het punt P binnen de cirkel ligt? En als P op de cirkel ligt? Licht je antwoorden toe met een afdruk van een figuur.«

Opdracht 7a

figuur 6



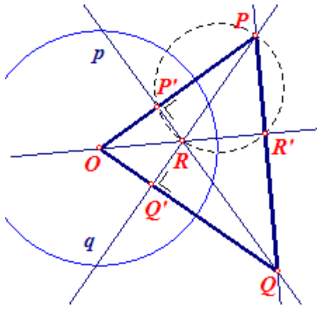
De poollijnen p, q van de punten P, Q bij cirkel (O) snijden elkaar in het punt R (zie figuur 6).

- Toon met behulp van Stelling 3 aan, dat de lijn PQ de poollijn is van het punt R.«

Opmerking. De poollijnen van P en Q bij (O) zijn bijzondere lijnen van driehoek OPQ. Die bijzonderheid stelt je in staat om ook, *zonder* gebruik te maken van Stelling 3, te bewijzen dat PQ de poollijn is van het punt R.

Opdracht 7b

figuur 7



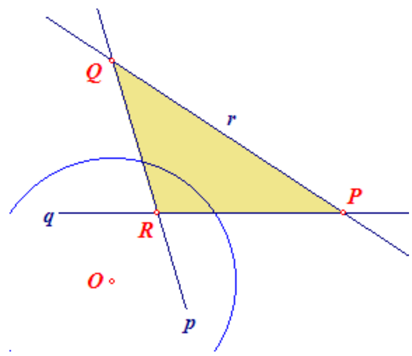
Zie figuur 7. De lijnen *PQ'* en *QP'* zijn hoogtelijnen van driehoek *OPQ*. Het punt *R*, het snijpunt van die lijnen, is dan het hoogtepunt van de driehoek. De lijn *OR* is dus ook een hoogtelijn, zodat $OR \perp PQ$ (met als voetpunt *R'* op *PQ*).

🖹 Bewijs nu dat $OR \cdot OR' = k^2$.
Aanwijzing. Bekijk vierhoek *PP'RR'* en pas eenzelfde redenering toe als in Opdracht 6a.«

4. Pooldriehoek en poolcirkel

In Opdracht 7 hebben we gezien, dat de poollijnen van de hoekpunten *P*, *Q*, *R* van een driehoek bij dezelfde cirkel de zijden van die driehoek vormen (zie ook figuur 8).

figuur 8



Afspraak. Een driehoek heet **pooldriehoek** bij een cirkel als elk hoekpunt van die driehoek de pool is van de overstaande zijde.

We zullen in de volgende opdrachten kijken naar wat eigenschappen van zo'n pooldriehoek (hoeveel pooldriehoeken bestaan er eigenlijk bij een gegeven cirkel?). We gaan daarbij steeds uit van een cirkel met middelpunt *O* en straal *k*.

Er geldt:

Stelling 4
1. *Het hoogtepunt van een pooldriehoek bij een cirkel valt samen met het middelpunt van die cirkel.*
2. *Een pooldriehoek bij een cirkel is noodzakelijkerwijs stomphoekig.*
3. *Bij een stomphoekige driehoek bestaat een cirkel waarbij die driehoek pooldriehoek is.*

Opmerking. De cirkel in Stelling 4.3 wordt wel de **poolcirkel** van de (stomphoekige) driehoek genoemd.

Opdracht 8

- Maak in Cabri eenzelfde figuur als figuur 8. Gebruik daarbij de macro PoolEnPoollijn.

🖹 Bewijs dan Stelling 4.1.
Voeg een afdruk van de gebruikte Cabri-figuur toe aan het verslag. In die figuur moeten de hoogtelijnen van driehoek *PQR* duidelijk zijn aangegeven.«

Het bewijs van Stelling 4.2 leveren we door te laten zien dat je *geen* rechthoekige of scherphoekige pooldriehoeken kan *construeren* (het kan ook wel anders, maar een dergelijk bewijs valt buiten het bestek van dit werkblad).

Opdracht 9

🗎 Is het mogelijk een *rechthoekige* pooldriehoek bij een gegeven cirkel (O, k) te construeren? Verklaar je antwoord. Voeg aan het verslag een afdruk van een Cabri-constructie toe, waaruit je antwoord blijkt.
Aanwijzing. Natuurlijk is het antwoord op de vraag 'nee' (zie Stelling 4.2). Het gaat dus uiteindelijk om de 'onmogelijkheid' van de constructie!

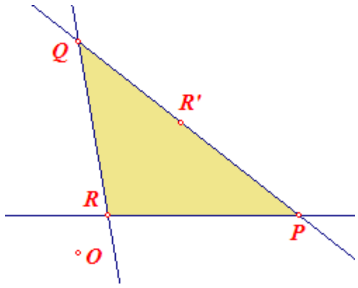
🗎 Dezelfde vraag voor een *scherphoekige* pooldriehoek.

🗎 Bestaat er een pooldriehoek waarvan precies één hoekpunt buiten de cirkel ligt. Verklaar je antwoord en voeg weer een afdruk van de Cabri-constructie aan het verslag toe.«

Ook Stelling 4.3 zullen we *constructief* bewijzen: bij een gegeven stomphoekige driehoek construeren we de bijbehorende poolcirkel.

Opdracht 10

figuur 9



- Teken op een nieuw Cabri-tekenblad een stomphoekige driehoek PQR. Teken ook de lijnen PQ, QR, RP.
- Construeer eerst het middelpunt O van de cirkel.
  Aanwijzing. Zie Stelling 4.1.
- Construeer dan het punt R' op de lijn PQ.
  Aanwijzing. Zie bijvoorbeeld Opdracht 7b.
- En construeer tot slot de poolcirkel zelf.
  Aanwijzing. Zie Opdracht 2 en Opdracht 3a.

🗎 Voeg een afdruk van de gehele constructie toe aan het verslag. Geef daarbij duidelijk aan hoe je de poolcirkel (in de laatste stap) geconstrueerd hebt.
Aanwijzing. Je kan de constructie natuurlijk controleren door, als je klaar bent, met de macro PoolEnPoollijn de poollijnen van de punten P, Q, R bij de poolcirkel te construeren. Die lijnen moeten dan natuurlijk samenvallen met de lijnen QR, RP, PQ.«

5. Tot slot

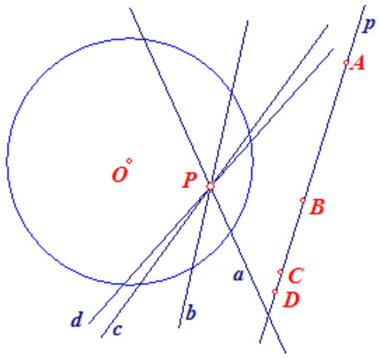
Vooruitlopend op een (wellicht) onverwachte eigenschap, bewijzen we eerst nog:

Stelling 5
De poollijnen van de punten van een lijn, bij een vaste cirkel, gaan door een vast punt.

Zie voor dit bewijs Opdracht 11a. In Opdracht 11b staan mogelijke bijzondere gevallen van Stelling 5.
Voorts bekijken we in Opdracht 12 e.v. zogenoemde copolaire driehoeken.

Opdracht 11a

figuur 10



Op de lijn *p* liggen de (willekeurige) punten *A*, *B*, *C*, *D*. De poollijnen van die punten bij (*O*) zijn opvolgend *a*, *b*, *c*, *d* (zie figuur 10).

🖹 Bewijs dat *a*, *b*, *c*, *d* door een vast punt *P* gaan.
Aanwijzing. Kijk nog eens naar Stelling 3.

Dat punt *P* is natuurlijk een bijzonder punt in de figuur.

🖹 Welke bijzonderheid heeft het punt *P*?«

Opdracht 11b

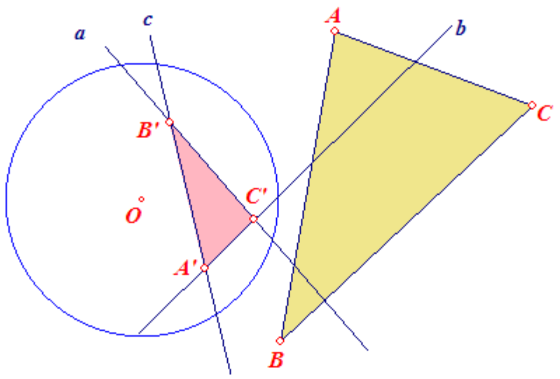
- Maak nu ook een tekening als in figuur 10 met op de lijn *p alleen* het punt *A* en een punt *X*. Construeer het punt *P* en de poollijn *x* van *X* bij (*O*).

🖹 Verplaats dan het punt *X* over de lijn *p*. Wat kan je zeggen van de lijn *x* als het punt *X* redelijk ver (zeg *oneindig* ver) van *A* op de lijn *p* ligt? Geef zo mogelijk twee 'bijzonderheden'.

🖹 Teken ook de lijn *OP*. Wat is de pool van die lijn, denk je?«

Opdracht 12, copolaire driehoeken

figuur 11



In figuur 11 is driehoek *ABC* een willekeurige driehoek. De lijnen *a*, *b*, *c* zijn de poollijnen van *A*, *B*, *C* bij (*O*). Deze lijnen sluiten een driehoek *A'B'C'* in.

- Maak met Cabri eenzelfde figuur als figuur 11. Construeer ook de poollijnen van *A'*, *B'*, *C'*.
Aanwijzing. Gebruik bij je constructie weer de macro PoolEnPoollijn.

🖹 Wat merk je op? Op basis van welke stelling kan je dat resultaat verklaren? Geef een korte verklaring.

De driehoeken *ABC* en *A'B'C'* worden wel **copolaire driehoeken** genoemd; de zijden van de ene driehoek zijn de poollijnen van de hoekpunten van de andere driehoek.

Copolaire driehoeken hebben in ieder geval nog twee andere bijzondere eigenschappen…

- Teken ook de lijnen *AA'*, *BB'*, *CC'*.

🖹 Wat is er aan de hand met deze lijnen?

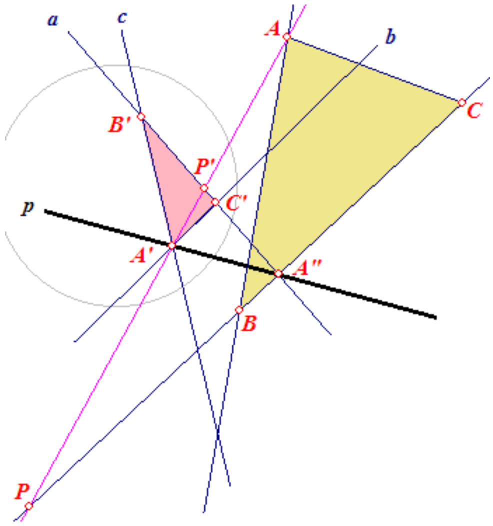
🖹 Kijk ook eens naar de snijpunten van *a* met *BC*, van *b* met *AC*, van *c* met *AB*.
Wat valt je op? Voeg weer een afdruk van je constructie toe aan het verslag.«

Het zou natuurlijk leuk zijn als we deze eigenschappen (de laatste twee uit Opdracht 12) zouden kunnen bewijzen (het gaat immers niet alleen om mooie plaatjes…).

Een eerste begin van het bewijs zien we in Opdracht 13, via figuur 12.

Opdracht 13a

figuur 12



Basis voor de hiernaast staande figuur is figuur 11.
N.b. Heb je zelf al meer lijnen getekend, dan kan je deze, indien gewenst, met de Cabri-functie 'Verbergen' voorlopig onzichtbaar maken.

(*) De lijn AA' snijdt de lijn BC in P en de lijn $B'C'$ in P'.
(*) De lijnen BC en $B'C'$ snijden elkaar in het punt A''.

- Bewijs dat de lijn $A'A''$ de poollijn is van het punt P.
  Aanwijzing. Gebruik een aantal keren Stelling 3 (deze stelling heet niet voor niets de hoofdstelling van de pooltheorie).
- Welke lijn is de poollijn van P' ?
- Welk punt is de pool van de lijn AA' ?«

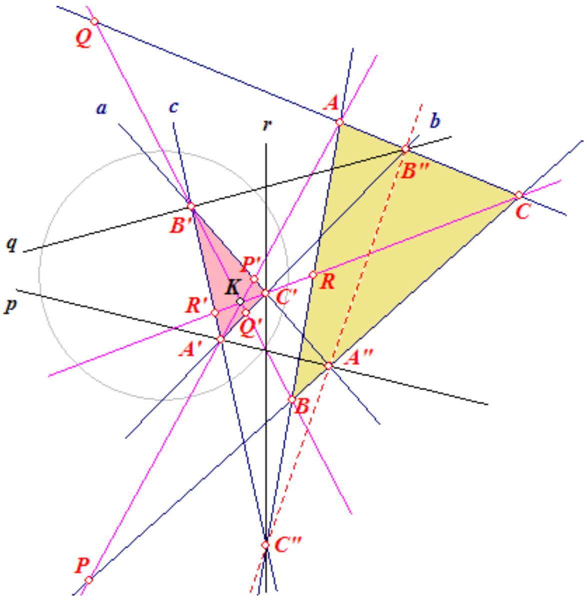
Opdracht 13b

- Teken volgens het in Opdracht 13a staande 'recept' – dat zijn de regels aangegeven met (*) – via de lijn BB' ook de punten Q, Q' en B''.
- Van welke lijn is het punt Q de pool? Geef een korte verklaring van je antwoord.

De lijnen AA' en BB' snijden elkaar in het punt K.

- Toon aan dat de lijn $A''B''$ de poollijn is van het punt K.
  Aanwijzing. Pas ook nu weer enkele keren Stelling 3 toe.

figuur 13



In figuur 13 is de lijn $A''B''$ – dat is de poollijn van het punt K – getekend.
Verder ook de lijn CC', met de 'bijbehorende' punten R, R', C'' (weer volgens het recept in Opdracht 13a).
Het lijkt erop dat CC' door het punt K gaat, en dat het punt C'' op de lijn $A''B''$ ligt.

- Toon aan:
  Als CC' door K gaat (we hebben dat niet bewezen!), dan ligt het punt C'' op de lijn $A''B''$.«

Auteur: **Dick Klingens**
Titel: Cabri-werkblad / Pool en poollijn bij een cirkel
Versie: 1.0 / november 2005