Een bol die raakt aan de zijden van een scheve vierhoek

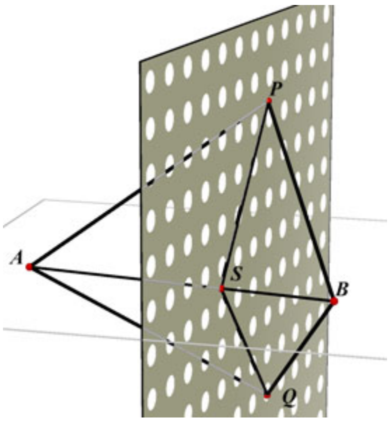
Dick Klingens
Krimpenerwaard College, Krimpen aan den IJssel
oktober 2005

We bewijzen allereerst de volgende hulpstelling:

Hulpstelling 1
De meetkundige plaats van de punten P waarvoor $AP^2 - BP^2 = c^2$, waarbij A, B gegeven punten zijn en c (de lengte van) een gegeven lijnstuk, is een vlak loodrecht op AB.

Bewijs:

Figuur 1



(1) Zij P een punt waarvoor geldt: $AP^2 - BP^2 = c^2$. Is nu PS de loodlijn uit P op AB. Dan geldt:

$$\begin{aligned} AP^2 - BP^2 &= (AS^2 + XS^2) - (BS^2 + XS^2) \\ &= AS^2 - BS^2 = (AS + SB)(AS - SB) \\ &= AB(AS - SB) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

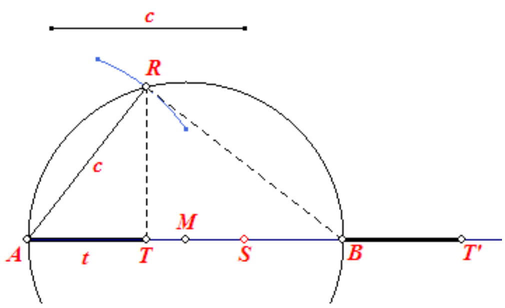
Dus is $AS - SB$ constant, immers AB is constant. En omdat $AS + SB = AB$ constant is, is ook AS constant.
Bij elk punt P hoort dan hetzelfde punt S op AB, waarbij $PS \perp AB$.
Met andere woorden: P ligt in het loodvlak in S op AB.

(2) Stel Q is een punt van het loodvlak in S op AB. Dan is: $QA^2 - QB^2 = AS^2 - BS^2 = c^2$.
Waarmee het gestelde bewezen is.□

Opmerking. Blijft de vraag hoe we een dergelijk punt S op AB, bij gegeven c, construeren.
In het bewijs hierboven zagen we dat $(AS - SB) \cdot AB = c^2$.
We kunnen dus het lijnstuk $AS - SB = t$ volgens een bekende eigenschap uit de vlakke meetkunde construeren in een cirkel met middellijn AB (**zie Figuur 2**).

Nu is $\begin{cases} AS - SB = t \\ AS + SB = AB \end{cases}$, waaruit volgt dat $AS = \dfrac{AB + t}{2}$.

Figuur 2



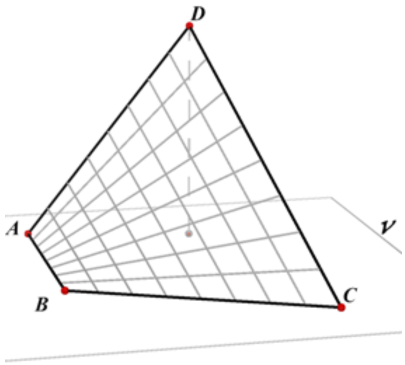
In de figuur hiernaast geldt in de rechthoekige driehoek ABR waarvan M het middelpunt is van de omcirkel:

$$AT \cdot AB = AR^2 = c^2$$

Met $AT = t = BT'$ is het punt S het midden van het lijnstuk AT'.
Waarmee het lijnstuk AS is gevonden.

Definitie
Een **scheve vierhoek** is een vierhoek waarvan de hoekpunten niet in hetzelfde vlak liggen.

Figuur 3



We bekijken de voorwaarden waaronder een bol kan worden beschreven *in* een scheve vierhoek.
We zoeken dus naar een bol die raakt aan de zijden van die vierhoek: de **ingeschreven bol** (*inbol*) van een scheve vierhoek.

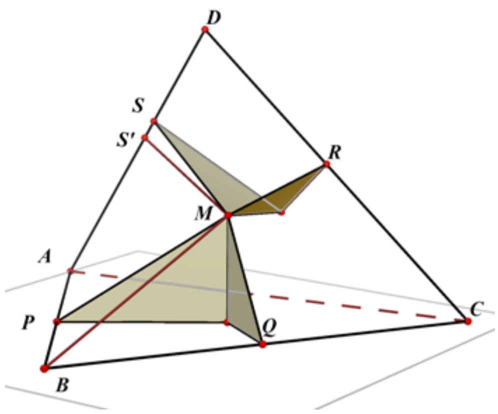
N.b. We spreken *alleen* van een ingeschreven bol van een scheve vierhoek $ABCD$ als de raakpunten *op* de lijnstukken AB, BC, CD, DA liggen, en dus *niet* op de verlengden daarvan.

Hierbij kunnen we gebruik maken van de volgende stelling.

Stelling 2
Zijn P, Q, R, S de projecties van een punt M op de zijden AB, BC, CD, DA van de scheve vierhoek ABCD, dan geldt:

$$AP^2 - PB^2 + BQ^2 - QC^2 + CR^2 - RD^2 + DS^2 - SA^2 = 0$$

Figuur 4



Bewijs:
Zie Figuur 4. Volgens hulpstelling 1 hebben we nu:

$$AP^2 - PB^2 = AM^2 - MB^2$$
$$BQ^2 - QC^2 = BM^2 - MC^2$$
$$CR^2 - RD^2 = CM^2 - MD^2$$
$$DS^2 - AS^2 = DM^2 - AM^2$$

Optelling van de linker en rechter leden geeft het gestelde.□

En de omgekeerde stelling van stelling 2:

Stelling 3
Liggen de punten P, Q, R, S opvolgend op de zijden AB, BC, CD, DA van een scheve vierhoek en geldt

$$AP^2 - PB^2 + BQ^2 - QC^2 + CR^2 - RD^2 + DS^2 - SA^2 = 0$$

dan snijden de vlakken in P, Q, R, S loodrecht op AB, BC, CD, DA elkaar in hetzelfde punt M.

Bewijs:
We bekijken de in de stelling bedoelde loodvlakken door P, Q, R. Deze snijden elkaar in een punt M.
Zij nu S' de projectie van dat punt M op DA.
Volgens stelling 2 hebben we dan: $AP^2 - PB^2 + BQ^2 - QC^2 + CR^2 - RD^2 + DS'^2 - S'A^2 = 0$.
Nu geldt ook: $DS'^2 - S'A^2 = DS^2 - SA^2$, waaruit met $DS' + S'A = DS + SA$ volgt:

$$DS' - S'A = DS - SA$$

En dus is $SS' = S'S$, hetgeen inhoudt dat S en S' samenvallen.□

Stel nu dat M het middelpunt is van de bol die raakt aan de zijden van de scheve vierhoek.
We hebben dan – zie opnieuw **in Figuur 4**: $AP = AS$, $BP = BQ$, $CQ = CR$, $DR = DS$. Dan is inderdaad:

$$AP^2 - PB^2 + BQ^2 - QC^2 + CR^2 - RD^2 + DS^2 - SA^2 = 0$$

Uit stelling 3 volgt nu dat de loodvlakken in de betreffende raakpunten op AB, BC, CD, DA door het punt M gaan.
Wegens (bijvoorbeeld) $BP = BQ$ zijn de driehoeken MPB en MQB congruent (*ZZR*), zodat $MP = MQ$. En we vinden via een analoge redenering: $MP = MQ = MR = MS$; het punt M is dan het middelpunt van de bol die in de betreffende punten aan de zijden van de scheve vierhoek raakt.

Of we een dergelijke bol daadwerkelijk kunnen vinden bij een gegeven scheve vierhoek $ABCD$, waarbij $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, hangt dus af van het feit of er lijnstukken $AP = x$, $BQ = y$, $CR = z$, $DS = u$ kunnen worden bepaald uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + u = c \\ u + x = d \end{cases} \quad \ldots\ldots(S_1)$$

Door optelling van de eerste en derde vergelijking en van de tweede en vierde vergelijking van S_1 vinden we:

Stelling 4
Een scheve vierhoek $ABCD$ met $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ heeft een ingeschreven bol indien

$$a + c = b + d$$

Met andere woorden: *indien de sommen van de overstaande zijden gelijk zijn.*

Als hieraan is voldaan, is het stelsel S_1 echter afhankelijk. Kiezen we een van de raaklijnstukken, bijvoorbeeld nu $AP = x$ willekeurig maar met $x \in [0; a]$), dan hebben we vervolgens:

$$\begin{cases} y = a - x \\ z = b - a + x \\ u = d - x \end{cases} \quad \ldots\ldots(S_2)$$

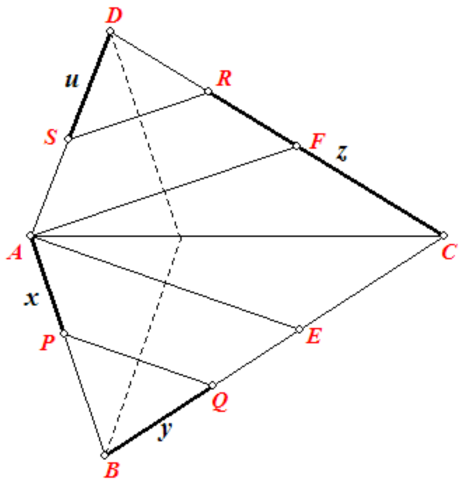
Er zijn dus duidelijk *meerdere* punten M die als middelpunt kunnen optreden van een bol die raakt aan de (niet-verlengde) zijden van de scheve vierhoek.

We bekijken nu de situatie in een uitslag van de scheve vierhoek in het vlak van driehoek ABC; **zie Figuur 5**.

We nemen een willekeurig punt P op AB. Hierdoor zijn ook de raakpunten Q, R, S bepaald.
Zij nu verder E het punt op BC met $BE = BA$ en F het punt op CD met $DF = DA$, dan is steeds (d.w.z. voor *iedere* positie van het punt P op AB) PQ // AE en RS // FA.

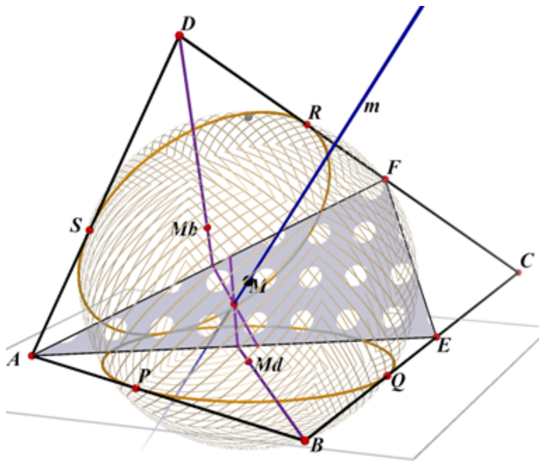
Het vlak *PQRS* (het vlak dat de raakpunten bevat) is dan voor iedere positie van het punt *P* evenwijdig met het *vaste* vlak *AEF*.

Figuur 5



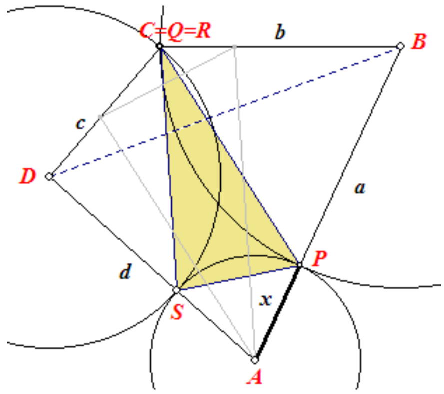
De bollen die in *P* aan *AB* en in *Q* aan *BC* raken, hebben hun middelpunt in het bissectriceloodvlak van hoek *B*; en dat is het middelloodvlak van *AE*.
De bollen die in *R* aan *CD* en in *S* aan *AD* raken, hebben hun middelpunt in het bissectriceloodvlak van hoek *D*; en dat is het middelloodvlak van *AF*.
De bollen die raken in *P*, *Q*, *R*, *S*, hebben hun middelpunt dus op de snijlijn van beide middelloodvlakken; en dat is een lijn *m* die loodrecht staat op het vaste vlak *AEF* (**zie Figuur 6**).

Figuur 6

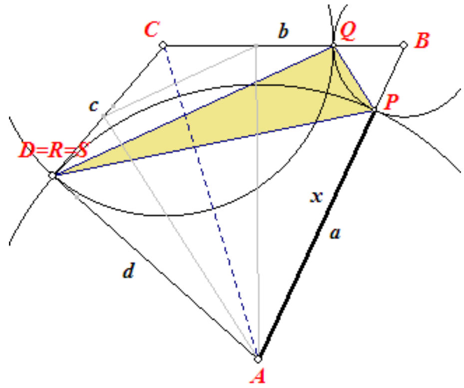


Echter, *niet* de gehele lijn *m* is de meetkundige plaats van de middelpunten van bedoelde bollen.
De voorwaarde uit stelling 4 (samen met het feit dat de raakpunten *niet op de verlengden* van de zijden mogen liggen) legt beperkingen op aan de waarde van $x = AP$ en daardoor ook aan de plaats van het punt *M* op de lijn *m*.

Figuur 7 - *x* mininaal



Figuur 8 - *x* maximaal

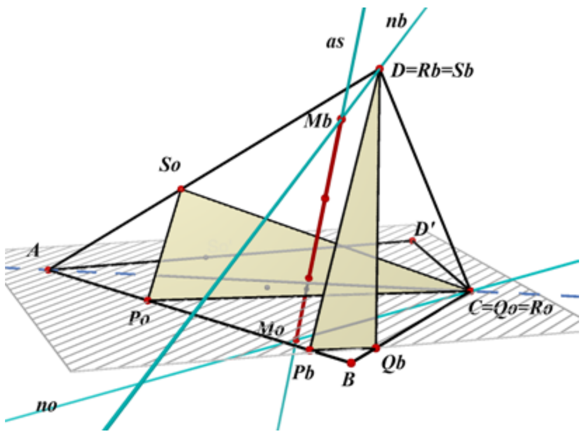


In Figuur 7 (waarin de uitslag van *ABCD* is weergeven in het vlak van driehoek *ABD*) is $a > d$.
Dan volgt uit $a + c = b + d$ (met als gevolg $a - d = b - c$) dat $b > c$.
Verder kiezen we: $d > c$.
De ondergrens x_o van $x = AP = AS$ is in dit geval $x_o = d - c$.
De raakpunten *Q* en *R* vallen dan met *C* samen. Het middelpunt M_o van de bol die de zijden van de scheve vierhoek in *P*, $Q = R = C$ en *S* raakt, ligt dan op de as van de omcirkel van driehoek *PCS* en op de loodlijn in *C* op het vlak *BCD*.

Voor de bovengrens x_b van *x* vinden we in dit geval: $x_b = d$, waarbij dan $BP = BQ = a - d$ (**zie Figuur 8**).
De raakpunten *R* en *S* vallen nu samen met het punt *D*. Het middelpunt M_b van de bol die de zijden van de scheve vierhoek in *P*, *Q*, $R = S = D$ raakt, ligt dan op de as van driehoek *PQD* en op de loodlijn in *D* op het vlak *ACD*.

Het lijnstuk M_oM_b is dan de meetkundige plaats van de bollen die raken aan de (niet-verlengde) zijden van de scheve vierhoek *ABCD.*

Figuur 9



In Figuur 9 is de uitslag *ABCD'* van de scheve vierhoek *ABCD* weergegeven in het vlak *ABC*.
Merk op dat de assen van de driehoeken P_oCS_o en P_bQ_bD (in de figuur aangegeven met '*as*') samenvallen. Deze as is tevens de as *m* van driehoek *AEF* in Figuur 6.
De lijnen n_o en n_b staan loodrecht in *C* op vlak *BCD* en in *D* op vlak *ACD*.

