Cabri werkblad – Lineaire transformaties met Cabri

Doel

Introductie tot lineaire transformaties in het platte vlak op basis van *matrices*, met gebruikmaking van het programma Cabri Geometry II (of Plus). Daarbij wordt ervan uit gegaan, dat de leerling bekend is met de basisconstructies van Cabri, en in het bijzonder met het plaatsen van getallen op het tekenblad (via de functie 'Getallen' in het *Extra*-menu) en het gebruik van Cabri's Rekenmachine (in het *Reken*-menu).

In de opdrachten staat soms het teken 🗎. De bedoeling daarvan is dat je de daarbij vermelde vragen e.d. op een *antwoordblad* uitwerkt.

1. Inleiding

Opdracht1

Gegeven zijn de lijnen l en m met vergelijkingen:

$$l:\; y = x + 1$$

$$m:\; y = -2x + 4$$

🗎 Teken deze lijnen in een rechthoekig assenstelsel.
🗎 Bereken de coördinaten van het snijpunt van die lijnen.
🗎 Ga na, dat de vergelijkingen:

$$x - y = -1$$

$$2x + y = 4$$

hetzelfde (snij)punt bepalen.

De combinatie van beide laatste vergelijkingen zullen we in hetgeen volgt schrijven als:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De vorm $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ noemen we een matrix (meervoud: matrices). De vormen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ noemen we vectoren (enkelvoud: vector).

In dit geval hebben we dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een matrix geven we vaak aan met een hoofdletter, meestal de letter A of de letter M; een vector geven we aan met een kleine letter (met een streepje er boven, zeker in geschreven tekst, of vet ***cursief*** gedrukt.).

Is $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, dan schrijven we wel: $A\overline{x} = \overline{b}$ of ook $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Opdracht 2

Ga na, dat de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gevonden kan worden met de vermenigvuldigingen:

$$1\cdot 1 \;-\; 1\cdot 2 = \cdots$$

$$2\cdot 1 \;+\; 1\cdot 2 = \cdots$$

Let hierbij op de manier waarop de getallen gekozen worden uit de matrix en uit de vector!

We vermenigvuldigen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, de eerste rij van de matrix A, dus met $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, de tweede rij van de matrix A, eveneens met $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een dergelijke vermenigvuldiging noemen we *matrixvermenigvuldiging*.
Algemeen geldt voor een matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+cq \\ bp+dq \end{pmatrix}$$

De getallen a, b, c, d in de matrix worden wel de *elementen van de matrix* genoemd.

Bereken nu:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} =$

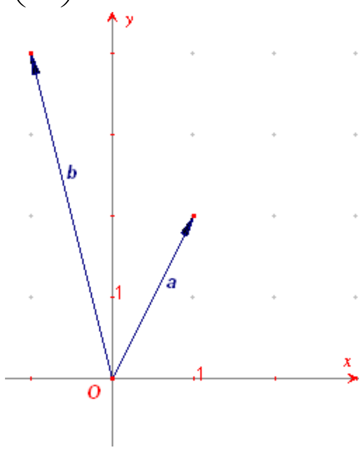
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} =$

Bereken ook:

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

2. Vectoren tekenen

We kunnen vectoren ook tekenen in een rechthoekig assenstelsel. Hieronder is dat gedaan voor de vectoren $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



De vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is dus een lijnstuk dat steeds begint in het punt O, het *beginpunt* van de vector, en dat eindigt in het punt met coördinaten (x, y), het *eindpunt* van de vector. In het eindpunt van een vector tekenen we een pijlpunt.

Heeft het punt S de coördinaten (p, q), dan is de vector $\bar{s} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Opdracht 3

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

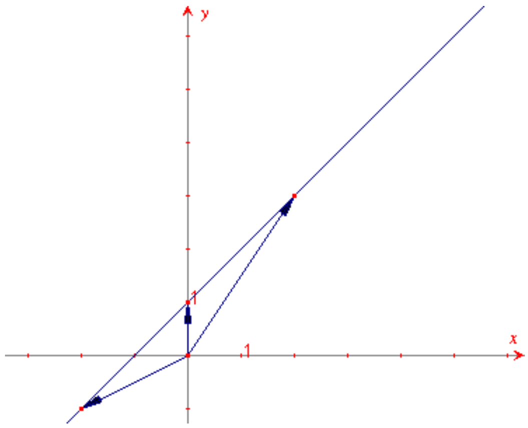
🗎 Teken in hetzelfde rechthoekig assenstel telkens de vector ***b*** = *A**a***, waarbij ***a*** opvolgend gelijk is aan:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

🗎 Wat valt je op als je kijkt naar de bij elkaar horende vectoren ***a*** en ***b***?

Opdracht 4

Gegeven is de lijn *l* met vergelijking $y = x + 1$.

🗎 Ga na dat de punten (0, 1), (-2, -1) en (2, 3) op deze lijn liggen.



Voorts is gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

🗎 Teken de vectoren $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in een rechthoekig assenstelsel. Teken daarin ook de lijn *l* en de drie gegeven vectoren.
Liggen de eindpunten van de 'nieuwe' vectoren ook op een rechte lijn?

3. Lineaire transformaties

Blijkbaar kunnen we een matrixvermenigvuldiging opvatten als een machientje. Je onderwerpt een vector aan zo'n vermenigvuldiging en het resultaat is weer een vector.

$$\bar{a} \rightarrow \boxed{\text{vermenigvuldigen met } A} \rightarrow \bar{b}$$

We noemen een dergelijk machientje een lineaire transformatie (ook wel lineaire afbeelding). De vector ***b*** heet in dit verband het beeld (beeldvector) van de vector ***a*** bij de betreffende transformatie.
Lineaire transformaties worden (hier) steeds uitgevoerd in een plat vlak waarin een rechthoekig assenstelsel is aangebracht.
Merk op dat er niet veel verschil is tussen de notaties die je ook bij functies gebruikt. Vergelijk daartoe de notatie $f(x) = y$ (bij functies) met de notatie $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (bij lineaire transformaties).

Deze transformaties heten lineair omdat rechte lijnen worden afgebeeld op rechte lijnen. Het woord 'lineair' wordt in hetgeen volgt weggelaten.

Opdracht 5

In Opdracht 4 heb je de beelden bepaald van drie vectoren waarvan de eindpunten lagen op de lijn l met vergelijking $y = x + 1$.
Het bleek dat eindpunten van de beeldvectoren ook op een rechte lijn – noem die lijn m – lagen.
De lijn m heet daarom ook wel het beeld van de lijn l bij de transformatie met matrix A.
We schrijven: $A(l) = m$ (we gebruiken nu weer haakjes, alleen om de l; en, l en m zijn niet vet gedrukt).

Gegeven is nu de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Teken het beeld $n = A(l)$ van de lijn l bij de transformatie met matrix A.
- Bepaal ook een vergelijking van de lijn n (in de vorm: $y = \ldots$).
- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen l en n.

Opdracht 6

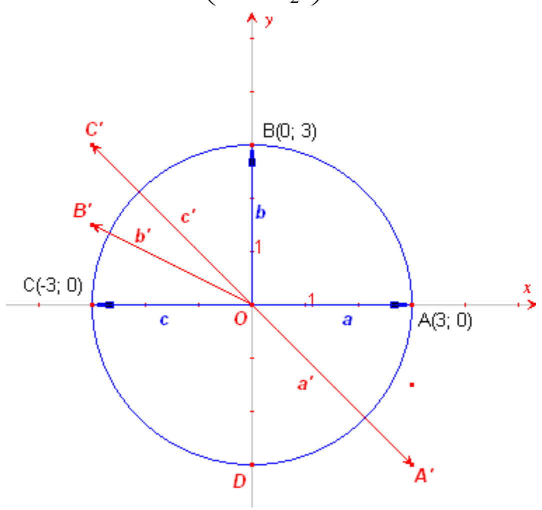
Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en de lijn p met vergelijking $2x + y = 2$.

- Bepaal een vergelijking van de lijn $A(p)$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt S (met bijbehorende vector $\boldsymbol{s}$) van de lijnen p en $A(p)$.
- Bereken A$\boldsymbol{s}$.

Opdracht 7 – een 'bewijs' met Cabri

Gegeven is de cirkel met middelpunt O en straal 3. Deze cirkel gaat, onder andere, door de punten $A(3,0)$, $B(0,3)$ en $C(-3,0)$.

Gegeven is verder de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



- Bereken de vectoren $\boldsymbol{a'} = M\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b'} = M\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c'} = M\boldsymbol{c}$.
- Waarom liggen de eindpunten van de vectoren $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{b'}$, $\boldsymbol{c'}$ op een cirkel? Noem deze cirkel K.

De gegeven cirkel gaat ook door het punt $D(0,-3)$.
- Bereken $\boldsymbol{d'} = M\boldsymbol{d}$.
- Ligt het eindpunt van $\boldsymbol{d'}$ ook op de cirkel K? Licht je antwoord kort toe.

Neem bovenstaande tekening over op een nieuw Cabri-tekenblad.

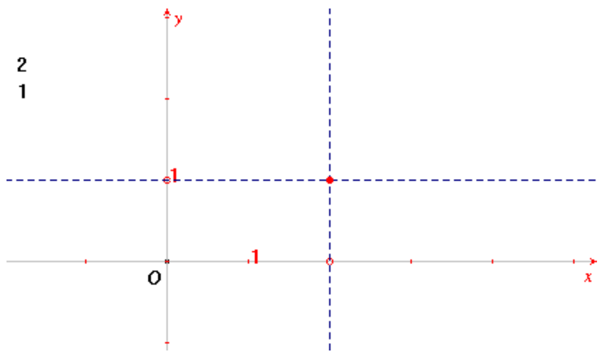
- Construeer daarop het middelpunt van de cirkel *K* en teken vervolgens ook de cirkel *K*.
- Bepaal (met de Cabri-functie 'Vergelijking en coördinaten') de coördinaten van het middelpunt van de cirkel *K*.
- 🖹 Bereken dan met behulp van de nu beschikbare gegevens de lengte van de straal van *K* (antwoord: 5,30).
- 🖹 Bewijs, door middel van een berekening, dat het eindpunt van ***d'*** inderdaad *niet* op de cirkel *K* ligt.
- 🖹 Lever ook een afdruk in van de gemaakte tekening.

4. Macro's in Cabri Geometry

Met Cabri kunnen we hetgeen hierboven met betrekking tot transformaties geschreven is, redelijk snel in beeld brengen.
Daartoe zullen we allereerst enkele macro's behandelen die het tekenwerk vergemakkelijken cq. versnellen.
We zullen Cabri steeds gebruiken met een rechthoekig assenstelsel (via de functie 'Toon assen' in het *Layout*-menu).

Opmerking - De macro's die in Opdracht 8 worden gedefinieerd, zijn eventueel ook te downloaden via de website van de auteur van dit werkblad.
Op de webpagina www.pandd.nl/werkbladen/transfcabri.htm staat een link naar het betreffende bestand.

Opdracht 8a – de macro:PuntCoord



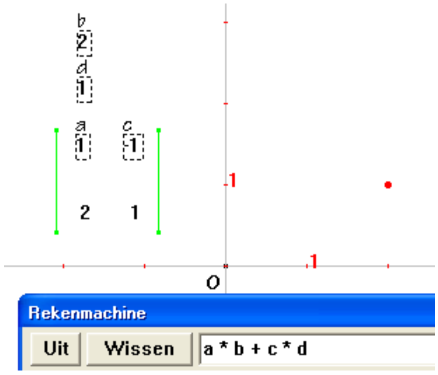
Ga uit van een leeg Cabri-tekenblad met daarop alleen een assenstelsel ('Toon assen').
Plaats twee getallen, bijvoorbeeld 2 en 1, op het tekenblad. Deze getallen zullen dienst doen als coördinaten van een nog te construeren punt.
Kies de functie 'Maat overbrengen' (in het *Constructie*-menu) en selecteer het eerste getal (de *x*-coördinaat); selecteer daarna de *x*-as.
Hierdoor wordt, bij bovenstaand gegeven, het punt (2,0) op de *x*-as getekend.
Doe hetzelfde met het tweede getal, maar selecteer nu de *y*-as. Je krijgt dan het punt (0,1) op de *y*-as.
Construeer met behulp van twee loodlijnen het punt met coördinaten (2,1).
We kunnen nu de macro PuntCoord definiëren, die op basis van de gegeven getallen direct het gewenste punt op het tekenblad zet.
Kies de functie 'Beginobjecten' (in het *Macro*-menu) en selecteer het eerste getal (de *x*), het tweede getal (de *y*) en een coördinaatsas (*Deze assen*).
Kies 'Eindobjecten' en selecteer het snijpunt van de beide loodlijnen.
Kies 'Definieer macro' en bewaar de macro op disk onder de naam **`PuntCoord`**.
Controleer vervolgens de juiste werking van deze macro!

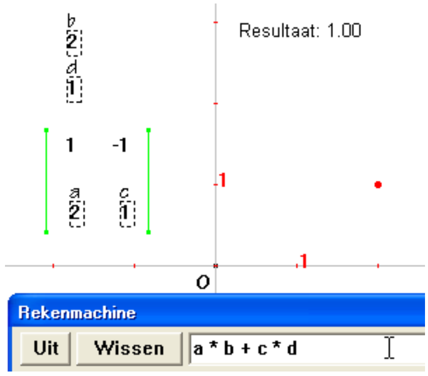
Opdracht 8b – de macro:MatrixVerm

Plaats vervolgens de vier elementen van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ op het tekenblad (zie de figuur hieronder).

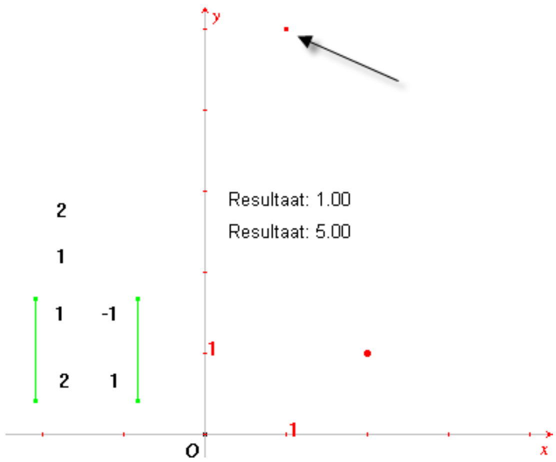
We zullen nu met Cabri's Rekenmachine de matrixvermenigvuldiging $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ uitvoeren.

Kies de functie 'Rekenmachine' in het *Reken*-menu. We gebruiken nu de getallen 1 (a) en –1 (c) uit de eerste rij van de matrix en de getallen 2 (b) en 1 (d) van de vector. Maar er moeten natuurlijk ook bewerkingstekens worden gebruikt!
Bekijk voor de juiste bewerkingstekens en de volgorde van selectie van de getallen de linker figuur hieronder.
Plaats het resultaat (in dit geval het getal 1,00) op het scherm.

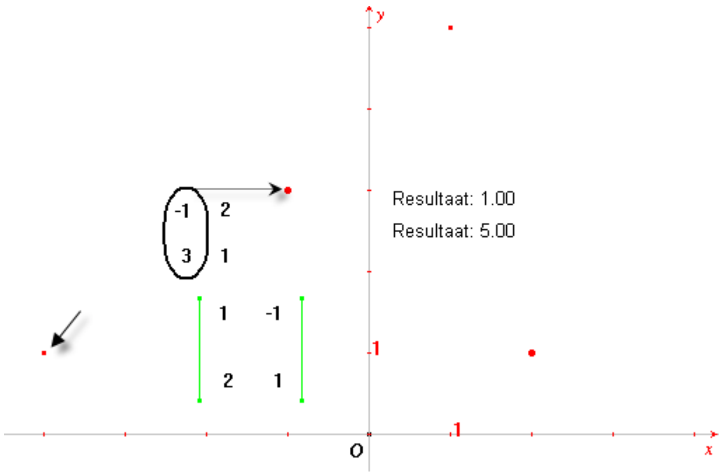




Doe nu hetzelfde voor de getallen 2 (a) en 1 (c) in de tweede rij van de matrix. Zie de rechter figuur hierboven.
Plaats het resultaat, in dit geval is dat het getal 5,00, eveneens op het scherm.



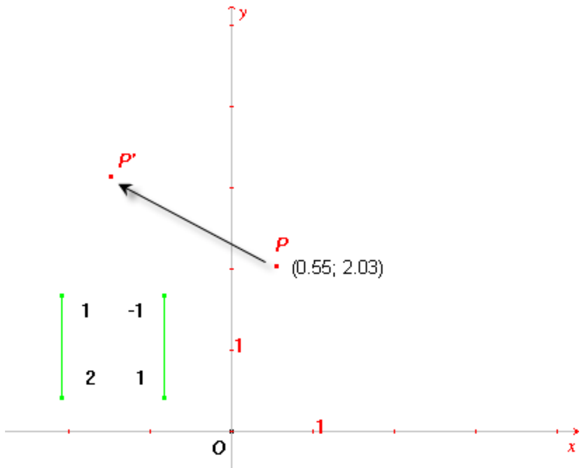
Gebruik dan de macro PuntCoord met de getallen 1,00 en 5,00 om het beeldpunt (1,5) van het punt (2,1) op het scherm te zetten (zie de zwarte pijl in de figuur hierboven).
Kies nu de functie 'Beginobjecten' en selecteer de getallen in de eerste rij van de matrix, dan de getallen in de tweede rij van de matrix en vervolgens de *x*-coordinaat 2 en de *y*-coordinaat 1 van het gegeven punt. Selecteer ook een as van het assenstelsel.
Kies dan de functie 'Eindobjecten' en selecteer het beeldpunt, het punt (1,5) bij de zwarte pijl in de figuur hierboven.
Kies 'Definieer macro' en bewaar de macro op disk onder de naam **`MatrixVerm`**.



Controleer de juiste werking van deze macro, bijvoorbeeld met de getallen –1 en 3 behorend bij het punt (-1,3), dat als beeldpunt het punt (-4,1) heeft.

Opdracht 8c – de macro:Ax

In Opdracht 8b zijn we uitgegaan van een matrix en *twee getallen*. Met de macro MatrixVerm kunnen we op basis van de matrix en die getallen het beeldpunt van het door die getallen bepaalde punt tekenen.
We zullen nu de macro Ax definiëren die op basis van een matrix en *een gegeven punt* het beeldpunt construeert.
Wis op het tekenblad de getallen die punten bepalen. Laat alleen de matrix staan.
Teken nu een willekeurig punt P op het tekenblad.



Kies de functie 'Vergelijking en coördinaten' en selecteer het punt P. De coördinaten van het punt P worden dan op het tekenblad geplaatst (zie de figuur hierboven).

N.b. Jouw punt P hoeft niet hetzelfde te zijn als het punt P in de figuur.

En nu kunnen we de macro MatrixVerm toepassen om het beeldpunt P' van P te tekenen.
Kies, als je dan gedaan hebt, weer de functie 'Beginobjecten'. Selecteer de getallen van de matrix (per rij), het punt P en één van de assen.
Kies 'Eindobjecten' en selecteer het punt P'.
Kies 'Definieer macro' en bewaar de macro op disk onder de naam **Ax**.
Ter controle.

🖹 Voer zelf de matrixvermenigvuldiging uit, in dit geval is dat $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,55 \\ 2,03 \end{pmatrix}$, en vergelijk de uitkomst daarvan met de coördinaten van het punt P'; in dit geval is P'

(-1,48 ; 3,14).
Jouw punten P en P' zullen wellicht verschillen van die in de figuur hierboven. Je krijgt dan zeker andere uitkomsten. Maar die moeten natuurlijk wel kloppen met de uitkomst van je berekening!

5. Het beeld van een rechte lijn bij een transformatie

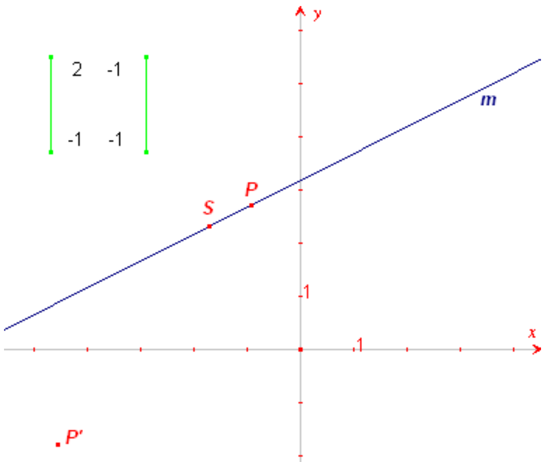
N.b.
Als we in hetgeen volgt spreken over het beeld van een punt P, dan bedoelen we daarmee het eindpunt P' van de beeldvector van de vector $\boldsymbol{p}$.

Opdracht 9

Begin met een nieuw Cabri-tekenblad met daarop alleen een assenstelsel.
Zorg ervoor, dat de macro Ax geladen is.
Opmerking - Is dat niet het geval, laad dan die macro via Bestand | Openen met als Bestandstype 'Macrobestanden (*.MAC)'.

Teken nu een willekeurige lijn m op het tekenblad. Kies ook een (willekeurig) punt P op m.

Plaats ook de elementen van de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ op het tekenblad (zie onderstaande figuur).
Construeer met behulp van de macro Ax het beeld P' van het punt P bij de transformatie met matrix A.



In bovenstaande figuur is S het steunpunt van de lijn m (S is het punt dat je bij het tekenen van de lijn m als eerste op het tekenblad zet).
De lijn m kan om het punt S worden gedraaid.
Teken met de macro Ax ook het beeld S' van het punt S.
Kies dan de functie 'Meetkundige plaats' (in het *Constructie*-menu) en selecteer eerst het punt P' en dan het punt P.
🖹 Beschrijf je bevindingen zo nauwkeurig mogelijk.
Als je de lijn m om het punt S laat draaien, draait ook de lijn $m' = A(m)$ om een punt.
🖹 Welk punt is dat? Geef hiervoor een verklaring.

🖹 Als de door jou getekende lijn m de vergelijking $y = 2x + 6$ heeft, wat is dan de vergelijking van de lijn m' ?

Als je het punt P over de lijn m verplaatst, doorloopt het punt P' uiteraard de lijn m'.

Je zal daarbij zien, dat in het algemeen de punten P en P' *niet* samenvallen met het snijpunt van m en m'.

🖹 Denk je dat het mogelijk is lijnen m te vinden waarvoor dat *wel* het geval is?
Zo ja, welke lijnen m zijn dat dan? Geef kort aan hoe je dat onderzocht hebt. Maak een afdruk van je tekening en lever die afdruk samen met het antwoordblad in.
Zo nee, geef dan ook aan hoe je dat in de Cabri-figuur onderzocht hebt.

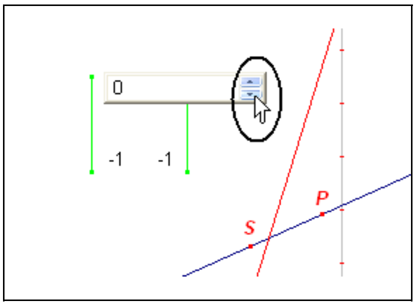
🖹 Denk je dat het mogelijk is lijnen m te vinden waarvoor geldt dat m en m' samenvallen?
Onderzoek dit en beschrijf kort je bevindingen.
Aanwijzing - Zoek eerst eens naar lijnen m waarvoor geldt dat m en m' evenwijdig zijn!

Opdracht 10

Iemand formuleert nu de volgende stelling:
Het beeld van een rechte lijn bij een transformatie met matrix A is een rechte lijn.

🖹 Is deze stelling volgens jou juist?

Als je het antwoord op deze vraag hebt gegeven, doe dan eens het volgende.
Dubbelklik op een van de elementen van de matrix. Er opent zicht dan een venster waarin je de waarde van het betreffende getal kan veranderen via twee knoppen rechts in het venster (zie de figuur hiernaast).
Wijzig op deze manier alle elementen van de matrix in 0.



🖹 Beschrijf kort je bevindingen (Wat gebeurt er met het punt S'? Wat gebeurt er met het punt P'? …)

Opmerking - De matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wordt wel de nulmatrix genoemd. We zullen in hetgeen volgt geen transformaties bekijken waarvan de matrix de nulmatrix is.

6. Het beeld van een driehoek bij een transformatie

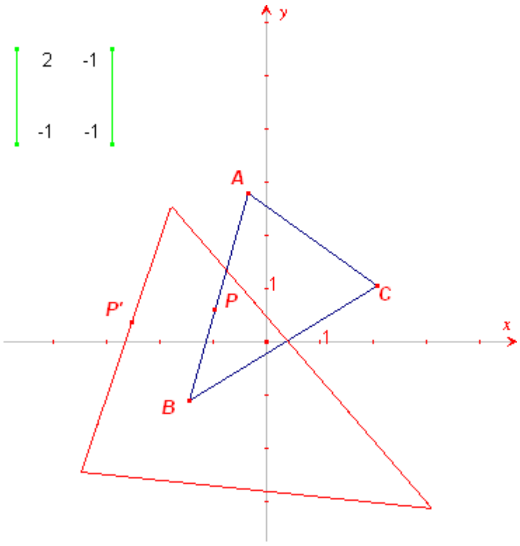
In deze paragraaf zullen we het beeld van een driehoek bij een transformatie onderzoeken. Dat gaat met Cabri uiterst eenvoudig, omdat we van een punt op de omtrek van een driehoek (die getekend is met de functie 'Driehoek' in het *Teken*-menu) met de macro Ax snel het beeld kunnen tekenen. Maar er is meer, zeker als we naar de oppervlakte van de driehoek en diens beelddriehoek kijken!

Opdracht 11

We gaan weer uit van een Cabri-tekenblad met daarop alleen een assenstelsel.
Ook de macro Ax moet geladen zijn (zie eventueel de Opmerking in Opdracht 9).
Teken nu met de functie 'Driehoek' een willekeurige driehoek ABC op het tekenblad.
Kies een (willekeurig) punt P op de omtrek van de driehoek.

Als matrix voor de transformatie kiezen we voorlopig weer $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Construeer ook het beeld P' van P met behulp van de macro Ax.
Bepaal het beeld van driehoek ABC door de meetkundige plaats van P' te construeren als P de omtrek van ABC doorloopt.
Je krijgt dan een figuur als onderstaand.

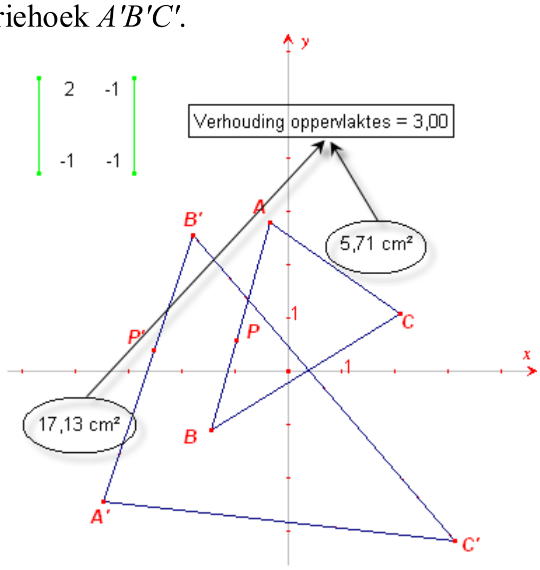


🗎 Eens of oneens met de stelling:
Het beeld van een driehoek bij een transformatie is weer een driehoek.

We zullen de juistheid deze stelling in Opdracht 12 nader onderzoeken.

🗎 Zijn de originele driehoek en diens beelddriehoek gelijkvormig? Licht je antwoord toe.
Aanwijzing - Kijk eens of een rechthoekige driehoek ook weer een rechthoekige driehoek als beelddriehoek heeft.

Van *ABC* kunnen we nu gemakkelijk de oppervlakte bepalen (met de functie 'Oppervlakte' in het *Reken*-menu). Doe dat!
Dat gaat met de oppervlakte van de beelddriehoek echter nog niet. We hebben immers nog geen driehoek (maar slechts een meetkundige plaats).
Construeer nu met de maco Ax de beeldpunten *A'*, *B'*, *C'* van *A*, *B*, *C* en bepaal dan de oppervlakte van driehoek *A'B'C'*.



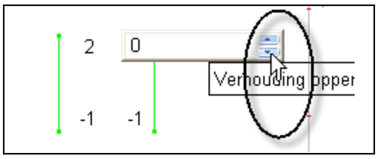
Bekijk de oppervlaktes van beide driehoeken als je een van de punten *A*, *B* of *C* verplaatst.
🗎 Wat valt je op als je de verhouding van die oppervlaktes bekijkt?

Blijkbaar is de verhouding tussen de oppervlaktes van de driehoek en diens beelddriehoek constant. Maar waar komt die constante waarde vandaan?
🗎 Enig idee waardoor de verhouding tussen de oppervlaktes in ons geval steeds gelijk is aan 3?

- Overigens, valt je ook op dat de *oriëntatie* van beide driehoeken anders is? Laat P eens tegen de wijzers van de klok in over de omtrek van driehoek ABC lopen (eventueel met behulp van de functie 'Animatie' in het *Extra*-menu).
  In welke richting loopt P' dan?

Opmerking - We zeggen dat de beide driehoeken nu tegengestelde oriëntaties hebben. Is dat niet zo, dan hebben ze dezelfde oriëntatie. In plaats van oriëntatie spreekt men ook wel eens van omloopszin.

Opdracht 12



Verander nu het element rechtsboven in de matrix M (het getal -1) eens in een 0.

- Hoe groot is de verhouding van de oppervlaktes dan?
- Maar ga ook eens verder met wijzigen.
- Wat gebeurt er als $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$?
  Wat vind je nu van de in Opdracht 11 genoemde stelling?
- Bekijk de verhouding van de oppervlaktes als de matrix M gelijk is aan $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  Hoe zit het nu met de verhouding van de oppervlaktes en met de oriëntatie van beide driehoeken?
- En hoe als $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Afspraak

Onder de determinant van een matrix $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ verstaan we het getal $det(M)$ waarvoor geldt: $det(M) = ad - bc$.

In plaats van $det(M)$ schrijven we ook wel $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, of voluit: $det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Dus: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Oefenopdracht

- Bereken:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$

Opgave 13 – vervolg van Opgave 12

- Is er een verband tussen de verhouding van de oppervlaktes van een driehoek en diens beelddriehoek en de waarde van de determinant van de matrix van de transformatie?
  Zo ja, beschrijf dat verband.

- Is er een verband tussen de oriëntatie van een driehoek en diens beelddriehoek en de waarde van de determinant van de matrix van de transformatie?
  Zo ja, beschrijf dat verband.
- We hebben een transformatie waarbij geldt $det(M) = 0$.
  Verklaar waarom de omtrek van een driehoek ABC wordt afgebeeld op een lijnstuk dat (zo nodig verlengd) door de oorsprong van het assenstel gaat.

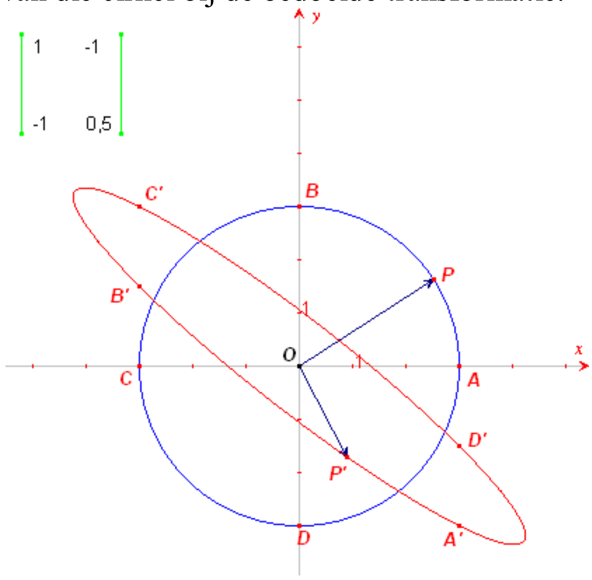
7. Het beeld van een cirkel bij een transformatie

Opdracht 14

Teken op een nieuw tekenblad een cirkel met middelpunt O en straal van (ongeveer) 3.

We hebben verder de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, waarmee we een transformatie uitvoeren (zie ook Opdracht 7).

Teken het beeld van die cirkel bij de bedoelde transformatie.



Teken ook de beelden A', B', C', D' van de snijpunten A, B, C, D van de assen en de cirkel.

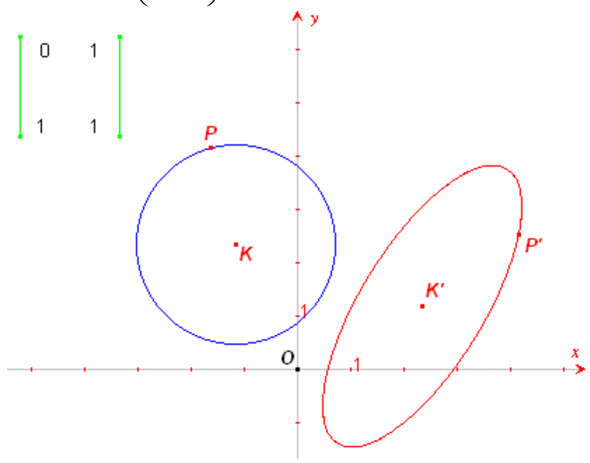
- Bereken $det(M)$.
- Kloppen ook hier de eigenschappen van de verhouding van de oppervlaktes van de figuur en diens beeldfiguur? En die van de oriëntatie van de figuur en de beeldfiguur?
  Aanwijzing - Er liggen vijf punten op de meetkundige plaats. Die vijf punten kan je gebruiken om een kegelsnede te construeren (met de functie 'Kegelsnede' in het *Cirkel*-menu).

De beeldfiguur van een cirkel bij een transformatie is (in het algemeen) een ellips.
Er zijn matrices M waarvoor de beeldfiguur ook een cirkel is (een 'cirkelvormige' ellips).

- Geef een voorbeeld van zo'n matrix.
  Geef, indien mogelijk, ook de algemene gedaante van een matrix waarbij het beeld van een cirkel weer een cirkel is.

Opdracht 15

In de figuur hieronder is het beeld van een willekeurige cirkel K getekend bij de transformatie met matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.



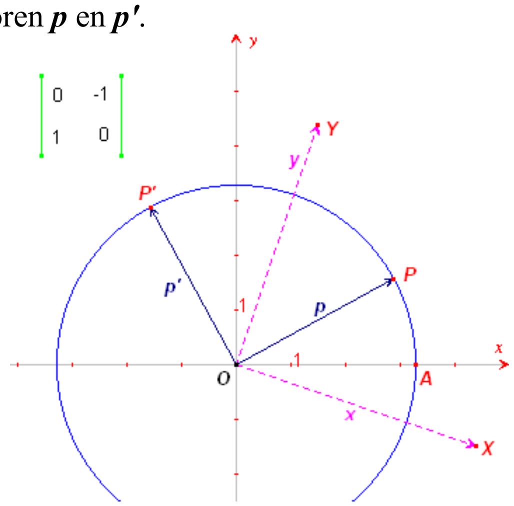
🗎 Beschrijf hoe je met behulp van Cabri aannemelijk kan maken, dat het binnengebied van de cirkel wordt afgebeeld op het binnengebied van het beeld van die cirkel (van de ellips dus).
Merk op dat het middelpunt K van de cirkel wordt afgebeeld op het middelpunt K' van de ellips.

Opdracht 16

We hebben de (bijzondere) matrix $R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

🗎 Bereken $R_{90}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $R_{90}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

We kiezen nu een punt A op de x-as en tekenen een cirkel met middelpunt O die door A gaat.
Construeer het beeld van deze cirkel bij de transformatie met matrix R_{90} (weer via een willekeurig punt P op die cirkel).
🗎 Wat merk je op?
Teken ook de vectoren $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{p'}$.



🗎 Bewijs dat $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{p'}$.

Teken een willekeurig punt X en bepaal het beeldpunt Y van X bij de transformatie met matrix R_{90}.

- Bewijs dat ook $OX \perp OY$. Bewijs dat $|OX| = |OY|$.

De transformatie met matrix R_{90} is een rotatie (draaiing) om het punt O over een hoek van 90° (tegen de wijzers van de klok in; in *tegenwijzerrichting*).

- R_{-90} is de matrix van een rotatie om het punt O over een hoek van -90° (90° in *wijzerrichting*; met de wijzers van de klok mee).
  Waaraan is de matrix R_{-90} gelijk?

Opdracht 17

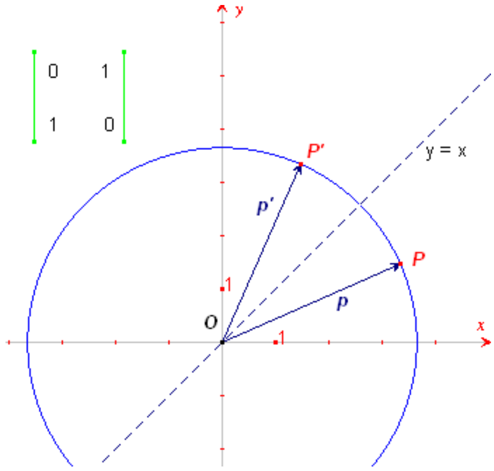
Ook de transformatie met matrix $S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

beeldt een cirkel die de oorsprong O als middelpunt heeft, op zichzelf af (zie ook Opdracht 3).

- Ga dat na. Geef kort aan wat je gedaan hebt.
- Bewijs dat er hier sprake is van een spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$.

S_- is de matrix van de spiegeling in de lijn met vergelijking $y = -x$.

- Waaraan is de matrix S_- gelijk?



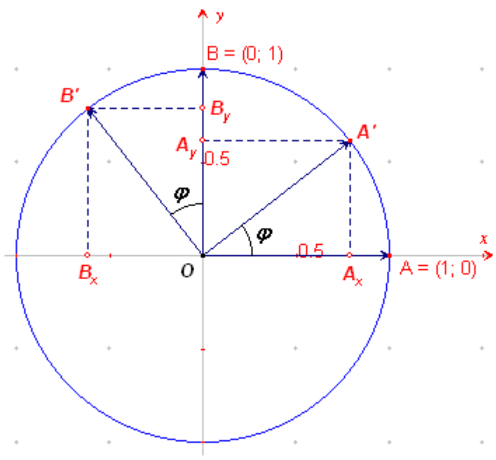
Opdracht 18

Onderzoek de transformatie met matrix $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Maak een kort verslag van je onderzoek; geef in ieder geval de naam van deze (bekende) afbeelding.

8. Rotaties over een willekeurige hoek

Opdracht 19



In bovenstaande figuur zijn de punten $A(1,0)$ en $B(0,1)$ geroteerd om het punt O over een hoek φ. De beeldpunten van A en B zijn opvolgend A' en B'.
De projecties van A' op de x-as en de y-as zijn opvolgend A_x en A_y. Die van B' zijn B_x en B_y.

🖹 Toon aan, dat $OA_x = \cos\varphi$.

🖹 Waarom is nu ook $OB_y = \cos\varphi$?

Aanwijzing - Onderzoek de congruentie van de driehoeken OA_xA' en OB_yB'.

🖹 Toon aan dat $OA_y = OB_x = \sin\varphi$.

🖹 Wat zijn op basis hiervan de coördinaten van de punten A' en B'?

Bekijk nu de matrix $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

🖹 Bereken $\det(R_\varphi)$.

🖹 Hoe ziet R_φ er uit als $\varphi = 90^\circ$? En hoe als $\varphi = -90^\circ$?
Vergelijk deze matrices met R_{90} en R_{-90} in Opdracht 16.

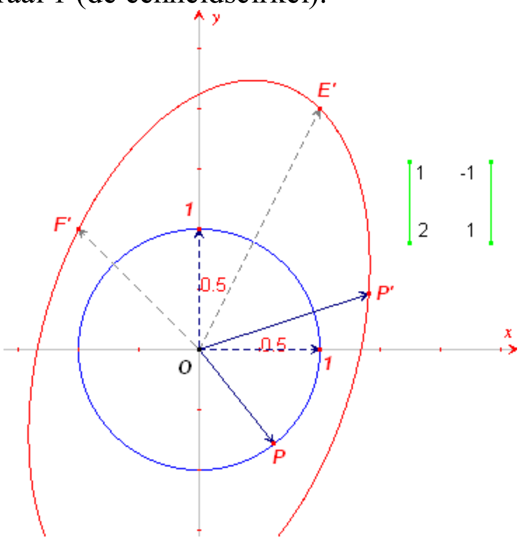
🖹 Bereken de matrix van R_{180}. Vergelijk deze uitkomst met de matrix P in Opdracht 18.

🖹 Verklaar, indien mogelijk, waarom R_φ de matrix is van een rotatie over de hoek φ om het punt O.

9. Eigenwaarden van een matrix

Opdracht 20a

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. We bekijken nu de transformatie met deze matrix.
Teken op een nieuw tekenblad (voorzien van een assenstelsel) de cirkel met middelpunt O en straal 1 (de eenheidscirkel).



Teken met behulp van de macro Ax de beelden E' en F' van de punten (1,0) en (0,1).
Teken ook het beeld van de eenheidscirkel (via de punten P en P').

🖹 Ga na dat je de coördinaten van de punten E' en F' als kolommen terug kunt vinden in de matrix. Hoe vind je ze terug?

🖹 Wat is het beeld van de x-as bij deze transformatie? En wat is het beeld van de y-as?

De x-as en de y-as staan loodrecht op elkaar.

🖹 Is dat ook het geval met het beeld van de x-as en het beeld van de y-as?

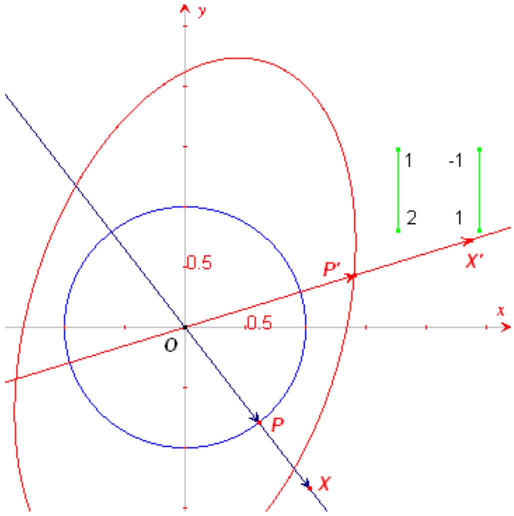
De lijn OP wordt afgebeeld op de lijn OP'.

- Onderzoek of er een positie van het punt P op de eenheidscirkel is waarvoor de lijnen OP en OP' samenvallen.

Aanwijzing - Voor het beantwoorden van de volgende vragen volgt kan je de coördinaten van de punten X, X', P, P' natuurlijk direct met Cabri vinden. Gebruik daarvoor de functie 'Vergelijking en coördinaten' voor elk punt.

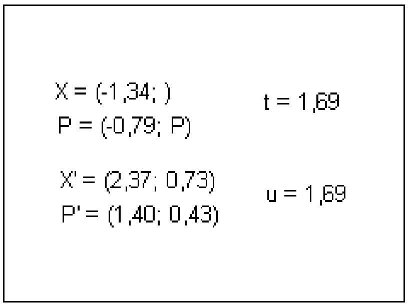
Kies nu op de lijn OP een punt X, en construeer het beeldpunt X' (dat uiteraard op de lijn OP' ligt).
Nu is er op de lijn OP een verband tussen de vector $\boldsymbol{p}$ en de vector $\boldsymbol{x}$.

- Bereken het reële *getal* t, waarvoor geldt $\boldsymbol{x} = t \times \boldsymbol{p}$.



Ook op de lijn OP' is er een verband tussen de vector $\boldsymbol{p'}$ en de vector $\boldsymbol{x'}$.

- Bereken het reële *getal* u waarvoor geldt $\boldsymbol{x'} = u \times \boldsymbol{p'}$.
- Valt je nu iets op? Zo ja, wat dan?
- Is een dergelijk verband steeds (bij veranderende positie van het punt P op de eenheidscirkel) aanwezig?



Zoals je in Opdracht 20a hebt gezien, geldt bijvoorbeeld: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, of algemeen:

$$t\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tp \\ tq \end{pmatrix}$$

Een eigenschap van de matrixvermenigvuldiging die hierop is gebaseerd, is de volgende.

Stelling – *Voor iedere matrix M en iedere vector* $\overline{x}$ *geldt* $M(t \cdot \overline{x}) = t \cdot M(\overline{x})$*; hierbij is t een reëel getal ongelijk aan 0.*

Opdracht 20b

- Bewijs bovenstaande stelling voor $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, en $t \neq 0$.

In Opdracht 20a hebben we ook gezien dat $\boldsymbol{x} = t \times \boldsymbol{p}$ en ook $\boldsymbol{x'} = u \times \boldsymbol{p'}$ (voor twee reële getallen t en u).
De laatste formule kunnen we ook schrijven als $M\boldsymbol{x} = uM\boldsymbol{p}$.

- Gebruik nu de genoemde stelling om de volgende uitdrukking verder aan te vullen:
  $\boldsymbol{x}' = M\boldsymbol{x} = M(t\boldsymbol{p}) = \ldots$
  Waarom volgt hieruit dat t gelijk moet zijn aan u ?

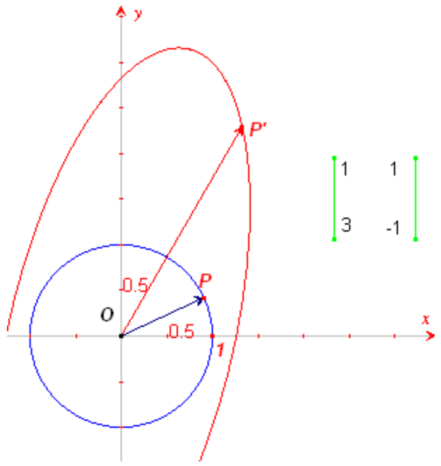
We gaan in de volgende opdracht op zoek naar vectoren $\boldsymbol{x}$ (én getallen t) die bij een transformatie M er voor zorgen dat:

$$\boldsymbol{x'} = M\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$$

Met andere woorden: het beeld X' van een punt X ligt ook op de lijn OX.
Of ook: de lijnen OX en OX' moeten samenvallen.
Je hebt in de vierde vraag van Opdracht 20a al gezien, dat je zulke vectoren $\boldsymbol{x}$ niet bij alle matrices kan vinden.

Opdracht 21

We kiezen dit keer de matrix M gelijk aan $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ en voeren met die matrix de transformatie uit op de eenheidscirkel. Ook nu krijg je (bij gebruik van de punten P en P') een ellips als beeldfiguur. (Wijzig de matrix in de figuur van Opdracht 20a.)



- Bij hoeveel posities van het punt P op de eenheidscirkel vallen de lijnen OP en OP' samen?
- Wat zijn de coördinaten van de punten P en P' in dit geval?
  Hoe groot is dan telkens de daarbij behorende waarde van het getal t ?
  Hoeveel *verschillende* waarden van t heb je gevonden? (Antwoord: 2.)

Iemand beweert, dat je, als je bijvoorbeeld weet dat $t = 2$, heel eenvoudig **alle** vectoren $\boldsymbol{x}$ kunt berekenen waarvoor geldt dat $M\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$.
Hij schrijft daartoe de volgende vectorvergelijking op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

N.b. Een vectorvergelijking is een vergelijking waarin een vector de onbekende is.

- Welk verband bestaat er in dit geval tussen p en q? Schrijf vijf vectoren $\boldsymbol{x}$ op die voldoen aan $M\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$.
  Hoeveel vectoren $\boldsymbol{x}$ voldoen aan de vectorvergelijking $M\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$?
- Schrijf ook vijf vectoren $\boldsymbol{x}$ op die voldoen aan de vectorvergelijking $M\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$.
  Hoeveel vectoren $\boldsymbol{x}$ voldoen aan $M\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$?

In de laatste vragen van Opdracht 21 is uitgegaan van de waarden $t = 2$ en $t = -2$ om de vectoren $\boldsymbol{x}$ te vinden die voldoen aan $M\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$.

Afspraak De getallen 2 en -2 worden de eigenwaarden van de matrix M genoemd.
En ook: Als we uitdrukkingen bekijken zoals $M\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$, dan is altijd $\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Maar wat te doen als we de eigenwaarden van een matrix *niet* weten? Hebben we dan steeds een Cabri-figuur nodig om die eigenwaarden te vinden? Overigens zal dat niet altijd gemakkelijk gaan, bijvoorbeeld niet als de eigenwaarden geen gehele getallen (wortels) zijn.

Opdracht 22a

We hebben de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ en we stellen ons daarbij de vraag wat de eigenwaarden van de matrix M zijn.

- Maak eerst toch maar een Cabri-tekening, en kijk of je de eigenwaarden van de matrix M met behulp van die tekening kunt vinden (antwoord: $t = 2$ en $t = 3$).

Maar hoe gaan we te werk *zonder* eerst een tekening te maken?
Uit $M\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$ volgt nu eenvoudig:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Hierin zijn de getallen p, q, en t dus onbekend.
Uitwerking van de matrixvermenigvuldiging geeft:

$$\begin{pmatrix} p+q \\ -2p+4q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tp \\ tq \end{pmatrix}$$

of

$$\begin{cases} p+q = tp \\ -2p+4q = tq \end{cases}$$

Wanneer we beide vergelijkingen rechts op 0 herleiden, krijgen we:

$$\begin{cases} (1-t)p+q = 0 \\ -2p+(4-t)q = 0 \end{cases}$$

Tja, en hoe vind je hieruit nu de t ?
We kunnen, zoals we in Opdracht 1 hebben gedaan, de laatste twee vergelijkingen schrijven als:

$$\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ -2 & 4-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opdracht 22b

- Laat zien dat uit $det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ -2 & 4-t \end{pmatrix} = 0$ volgt: $t^2 - 5t + 6 = 0$.
- Los de laatste vergelijking op.
- Geef bij elke gevonden eigenwaarde t een vector $\boldsymbol{x}$ die voldoet aan $M\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$.

Zie je de overeenkomst tussen de matrix van de transformatie en de matrix waarmee je de eigenwaarden van die matrix kunt vinden?

- (facultatief) Formuleer kort wanneer een matrix *geen* eigenwaarden heeft.

Opdracht 23

- Bereken nu, zo ze bestaan, de eigenwaarden van de volgende matrices.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

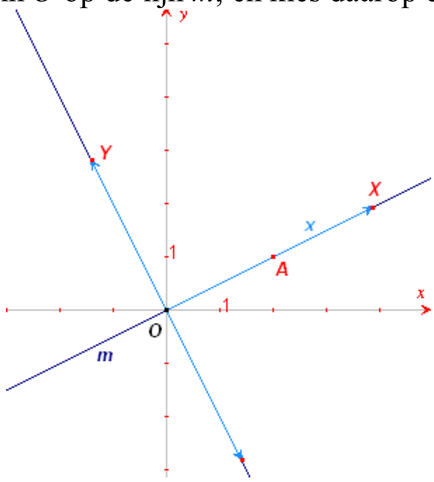
$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Opdracht 24

Teken op een nieuw Cabri-tekenblad (voorzien van een assenstel) de lijn m door het punt $O(0,0)$ en het punt $A(2,1)$.
We bekijken de spiegeling in de lijn m. De matrix die bij die transformatie hoort, noemen we S.

- Kies een willekeurig punt X op de lijn m. Waar ligt nu het beeldpunt X' van X?
- Waarom geldt: $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$?
  Welke eigenwaarde van de matrix S volgt hieruit?

Teken ook de loodlijn in O op de lijn m, en kies daarop een punt Y.



- Waar ligt nu het beeldpunt Y' van Y?
- Waarom geldt nu $S\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}$?
  Welke eigenwaarde van de matrix S volgt hieruit?

De matrix van de spiegeling in de lijn m is $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

- *Bereken* nu de eigenwaarden van de matrix S.

Opdracht 25

In Opdracht 19 hebben we gezien, dat voor de matrix R_φ van een rotatie om O over de hoek φ geldt:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

We gaan ervan uit dat φ niet gelijk is aan 0° of aan 180°.

- Waar of niet waar: R_φ heeft *geen* eigenwaarden? Verklaar je antwoord.
- (moeilijk) Laat dit ook zien door een berekening.

- Beantwoord de volgende twee vragen eerst zonder te rekenen, maar wel met een toelichting.
  Welke eigenwaarde(n) heeft R_0? Welke eigenwaarde(n) heeft R_{180}?
  Geef daarna voor deze beide gevallen een berekening van de eigenwaarden.

Opdracht 26

Gegeven is de transformatie met matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Bereken de eigenwaarde(n) van de matrix Q.

- Geef bij elke gevonden eigenwaarde t twee vectoren $\boldsymbol{x}$ die voldoen aan $Q\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}$.
- Beschrijf deze transformatie zo volledig mogelijk.

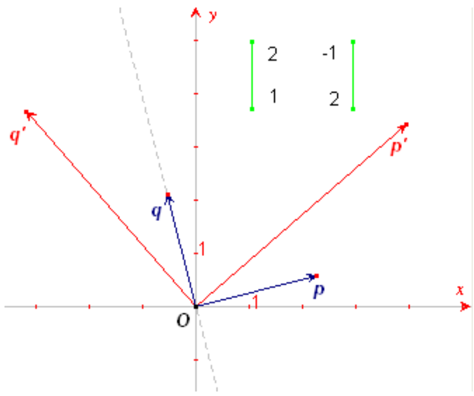
10. Orthogonale afbeelding

Opdracht 27

- Teken (op papier) de vectoren $\overline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Staan deze vectoren loodrecht op elkaar? Waarom?
- Waarom staan de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar? En waarom ook $\begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -ub \\ ua \end{pmatrix}$?

We bekijken nu de afbeelding met matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Bereken de vectoren $\overline{e}' = M\,\overline{e}$, $\overline{f}' = M\,\overline{f}$.
- Bereken de lengtes van de vectoren $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{e}'$, $\overline{f}'$.
  Bereken ook $det(M)$.
  Is er een verband tussen de lengtes van $\overline{e}$, $\overline{e}'$ en het getal $det(M)$, en tussen de lengtes van $\overline{f}$, $\overline{f}'$ en het getal $det(M)$? Formuleer op basis hiervan een vermoeden.
- Teken nu op een nieuw Cabri-tekenblad (voorzien van een assenstelsel) een willekeurig punt P en een punt Q, zodat de lijnen OP en OQ loodrecht op elkaar staan.



- Bepaal met de macro Ax de beeldpunten P' en Q' van P en Q bij de afbeelding met matrix M.
- Verplaats nu het punt P en ook het punt Q. Onderzoek met Cabri (via de functie 'Loodrecht?' in het *Eigenschappen*-menu, het vierde menu van rechts) of de lijnen OP' en OQ' loodrecht op elkaar staan. Wat is je conclusie?
- Waarom heeft de matrix M geen eigenvectoren?

De afbeelding die we hier bekijken, beeldt onderling loodrechte lijnen (of vectoren) af op lijnen (of vectoren) die ook weer loodrecht op elkaar staan. Een dergelijke afbeelding noemen we orthogonale afbeelding.

Een orthogonale afbeelding heeft meer eigenschappen; zie de vierde vraag in Opdracht 27. Het daar bedoelde verband bekijken we nog eens algemeen in Opdracht 28.

Opdracht 28

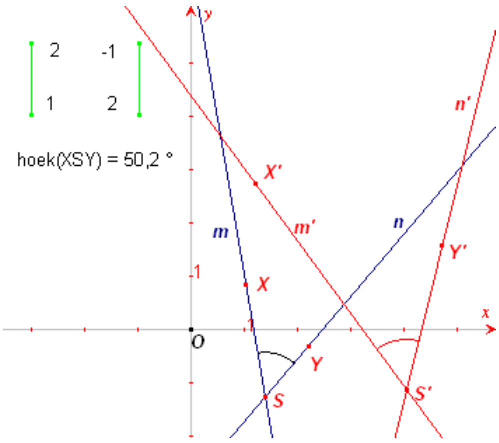
Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ en de vector $\overline{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

We geven de waarde van de determinant van M aan met Δ.

- 🖹 Dus $\Delta = \cdots$
- 🖹 Bereken de lengte d van de vector $\overline{x}$.
- 🖹 Toon aan dat de lengte d' van de vector $\overline{x}' = M\,\overline{x}$ gelijk is aan $\sqrt{(ap-bq)^2 + (bp+aq)^2}$
- 🖹 Werk deze laatste uitdrukking verder uit, en laat daarmee zien dat $d' = \sqrt{\Delta} \cdot d$.

We hebben ook de volgende stelling.
Stelling – *Bij een orthogonale afbeelding is de hoek tussen twee lijnen (vectoren) gelijk aan de hoek tussen de beeldlijnen van die lijnen (vectoren).*

Opdracht 29 – nog een 'bewijs' met Cabri



Teken op een nieuw Cabri-tekenblad twee snijdende lijnen, m en n. Hun snijpunt is het punt S.
Kies het punt X willekeurig op de lijn m en het punt Y op de lijn n, zodat $\angle XSY$ een scherpe hoek is (althans niet stomp).

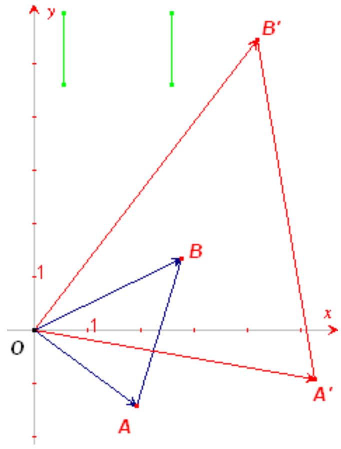
De beeldlijnen m' en n' van die lijnen bij de orthogonale afbeelding kunnen we construeren met (alleen) de beeldpunten S', X', Y' van de punten S, X, Y (dus *zonder* de Cabri-functie 'Meetkundige plaats' te gebruiken).

- 🖹 Waarom zijn de lijnen $S'X'$ en $S'Y'$ nu de bedoelde m' en n'?
  Waarom hoeven we de Cabri-functie 'Meetkundige plaats' niet te gebruiken?
- 🖹 Meet (met de functie 'Hoek' in het *Reken*-menu) de grootte van $\angle XSY$ en de grootte van $\angle X'S'Y'$.
- 🖹 Wat stel je in dit verband vast als je de positie van het punt S wijzigt?
  Wat stel je vast als je de lijn m en/of de lijn n om het punt S draait?

- 🖹 Waarom geldt de stelling ook voor de hoek tussen twee vectoren en hun beeldvectoren?

Opdracht 30

Bij een willekeurige orthogonale afbeelding met matrix M is het lijnstuk $A'B'$ het beeld van het lijnstuk AB.
Verder is $det(M) = \Delta$.



- Bewijs dat $|A'B'| = \sqrt{\Delta} \cdot |AB|$.
  Aanwijzing - Waarom zijn de driehoeken OAB en $OA'B'$ gelijkvormig?
  Hoe groot is de gelijkvormigheidsfactor, als je bijvoorbeeld kijkt naar $|OA|$ en $|OA'|$? Zie Opdracht 28.
- Bewijs dat bij een orthogonale afbeelding altijd geldt:
  $\Delta > 0$

Opdracht 31

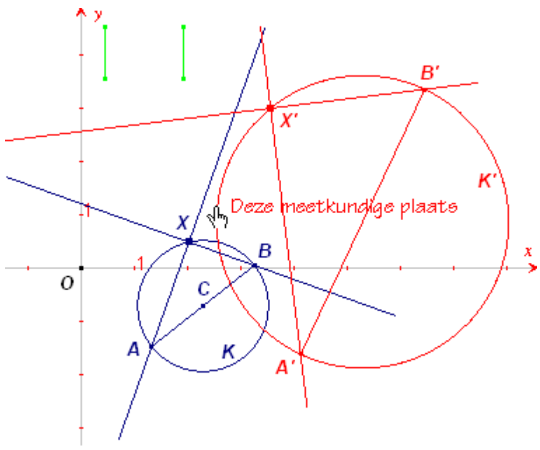
In Opdracht 11 heb je gekeken naar het verband tussen de oppervlaktes van een driehoek ABC en van diens beelddriehoek $A'B'C'$ bij een lineaire afbeelding.

- Bewijs dat bij een *orthogonale* afbeelding in ieder geval geldt:
  $Opp(A'B'C') = \Delta \cdot Opp(ABC)$

Ook geldt:
Stelling –*Het beeld van een cirkel bij een orthogonale afbeelding is weer een cirkel.*

Opdracht 32

In deze opdracht ga je die stelling bewijzen.
In onderstaande figuur zijn bij een willekeurige orthogonale afbeelding enkele constructies uitgevoerd.



De gegeven cirkel noemen we K (met middelpunt C). We willen dus bewijzen dat het beeld K' van K ook een cirkel is.
K' is geconstrueerd met de macro Ax, gebruik makend van het op K gelegen (willekeurige) punt X, met beeld X', onder toepassing van de functie 'Meetkundige plaats'.
AB is een middellijn van K. Het beeld van A is A', het beeld van B is B'.

- Bewijs nu dat $\angle A'X'B' = 90°$.
- Bewijs dat K' inderdaad een cirkel is.

Verantwoording

Dit werkblad is geschreven naar aanleiding van een minicursus op de **3e Cabri World conferentie** die gehouden is van 9 t/m 12 september 2004 in Rome.

Auteur: Dick Klingens
Versie: 2.1 (november 2004)
Copyright © 2004, PandD Software, Rotterdam

Cabri Geometry II® en Cabri Geometry II Plus® zijn geregistreerde handelsmerken van Cabrilog, Grenoble (Frankrijk).