Over de tritangent stralen van een driehoek

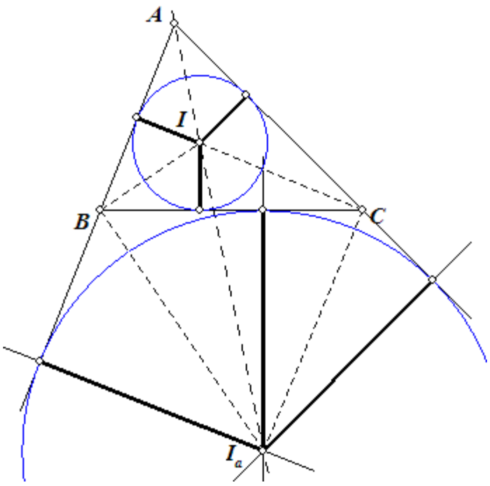
Dick Klingens
maart 2004

Inleiding. Het bijvoeglijk naamwoord 'tritangent' gebruiken we als we spreken over de *incirkel* (ingeschreven cirkel) en de *uitcirkels* (aangeschreven cirkels) van een driehoek. Deze cirkels noemen we de *tritangent cirkels* van de driehoek.
De uitcirkel die raakt aan de zijde a, wordt wel aangegeven met A-uitcirkel; enz.
De *tritangent stralen* zijn de stralen van deze cirkels, aangegeven met:

r :	straal van de incirkel;
r_a, r_b, r_c :	stralen van opvolgend de A-uitcirkel, B-uitcirkel, C-uitcirkel.

We gebruiken verder nog de volgende afkortingen:

F :	de functie die de oppervlakte van een figuur bepaalt;
O :	de oppervlakte van de basisdriehoek;
s :	de halve omtrek van de basisdriehoek; dus $2s = a + b + c$;
R :	de straal van de omcirkel van de basisdriehoek;
h_a, h_b, h_c :	de hoogtelijnen van de basisdriehoek;
M, I :	het middelpunt van de omcirkel en het middelpunt van de incirkel;
I_a, I_b, I_c :	de middelpunten van de aancirkels.



Stelling 1. $r = \dfrac{O}{s}$

Bewijs:

$$\begin{aligned} O &= F(ABC) = F(ABI) + F(BCI) + F(CAI) \\ &= \tfrac{1}{2}ra + \tfrac{1}{2}rb + \tfrac{1}{2}rc \\ &= r(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c) \\ &= rs \end{aligned}$$

Waaruit de stelling volgt. □

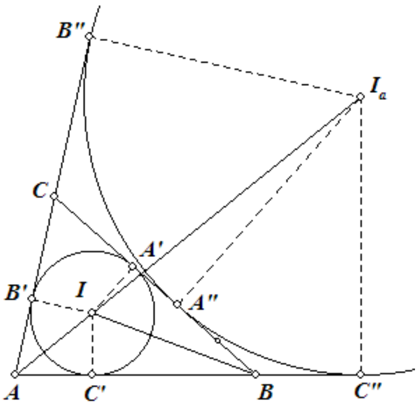
Stelling 2. $r_a = \dfrac{O}{s-a}$, *enz.*

Bewijs:

$$\begin{aligned} O &= F(ABC) = F(ABI_a) + F(ACI_a) - F(BCI_a) \\ &= \tfrac{1}{2}r_a c + \tfrac{1}{2}r_a b - \tfrac{1}{2}r_a a \\ &= r_a(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}a) = r_a(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a - a) \\ &= r_a(s-a) \end{aligned}$$

Waaruit de stelling volgt. □

Lemma 1 (Formule van Heron; 1e eeuw v. Chr., Egypte). $O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



Bewijs:
Wegens de gelijkheid van de raaklijnstukken uit A, B, C aan cirkel (I) is:

$AB' + BC' + CB' = s$

Dus: $BC' = s - b$ en (evenzo) $AC' = s - a$.
Op analoge wijze vinden we bij cirkel (I_a):

$AC'' = s$ en $BC'' = s - c$

Uit de gelijkvormigheid van $AC'I$ en $AC''I_a$ leiden we af dat: $IC' : I_aC'' = AC' : AC''$.
Zodat:
(i)…… $r : r_a = (s - a) : s$

De gelijkvormigheid van $IC'B$ en $BC''I_a$ levert dan: $IC' : BC'' = BC' : I_aC''$.
Zodat:
(ii)…… $r : (s - c) = (s - b) : r_a$

Vermenigvuldiging van de leden van (i) en (ii) geeft dan:

$r^2 : r_a(s - c) = (s - a)(s - b) : sr_a$

Zodat

$r^2s = (s - a)(s - b)(s - c)$

waaruit we vinden

$r^2s^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$

en dus met $O = rs$ (zie Stelling 1):

$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ □

Gevolg 1. Uit Stelling 2 en Lemma 1 volgt $rr_ar_br_c = \dfrac{O^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \dfrac{O^4}{O^2} = O^2$, zodat:

$$O = \sqrt{rr_ar_br_c}$$

Gevolg 2

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{O} = \frac{3s-(a+b+c)}{O} = \frac{s}{O} = \frac{1}{r}$$

Stelling 3. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

Bewijs:

$2O = 2rs = ah_a = bh_b = ch_c$, of: $2rs = 2s : \dfrac{1}{r} = a : \dfrac{1}{h_a} = b : \dfrac{1}{h_b} = c : \dfrac{1}{h_c}$, zodat:

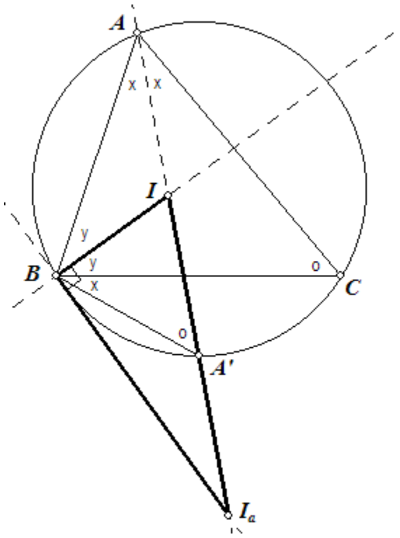
$$2s : \frac{1}{r} = (a+b+c) : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)$$

En wegens $2s = a + b + c$ volgt daaruit de stelling. □

Gevolg 3. Met Gevolg 2 vinden we uit Stelling 3:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Stelling 4. *Het midden van het lijnstuk I_aI ligt op de omcirkel van driehoek ABC.*



Bewijs:
A' is het (van A verschillend) snijpunt van I_aI met de omcirkel. Nu is BIA' een buitenhoek van driehoek ABI, zodat:

$BIA' = IAB + IBA$

Driehoek BIA' is dus gelijkbenig, zodat in de rechthoekige driehoek BI_aI geldt:

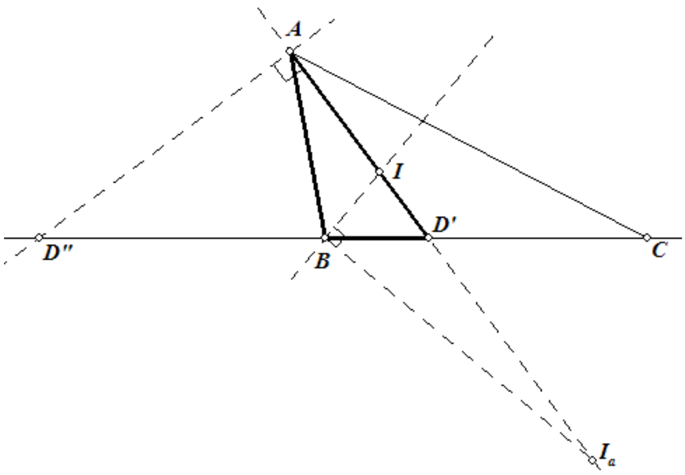
$IA' = I_aA'$

Waarmee de stelling bewezen is. □

Stelling 5

a. *De binnen- en buitenbissectrice van een hoek van een driehoek snijden de overstaande zijde in punten die harmonisch liggen met de hoekpunten op die zijde.*

b. *De puntenparen (A, D') en (I, I_a) zijn harmonische puntenparen op de lijn AI_a; daarbij is D' het snijpunt van de lijn AI met de zijde BC.*



Bewijs:
a. D' en D'' zijn opvolgend de snijpunten van de binnen- en buitenbissectrice van hoek A met de lijn BC.
Volgens de bissectricestelling hebben we:

$BD' : CD' = BA : CA$
$BD'' : CD'' = BA : CA$

Zodat:

$BD' : BD'' = CD' : CD''$

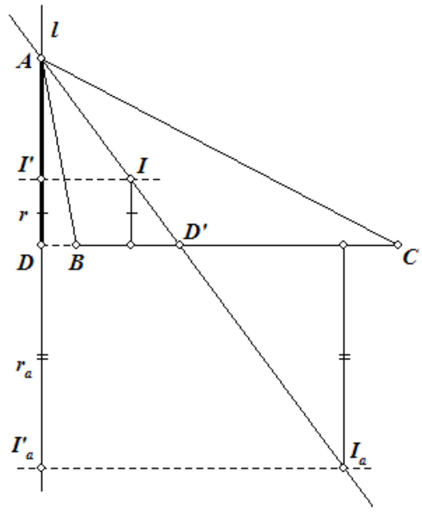
en dus:

$BD'/BD'' : CD'/CD'' = (D'D''BC) = -1$

De paren (D', D'') en (B, C) zijn dus harmonische puntenparen.

b. In driehoek ABD' zijn BI en BI_a de binnen- en buitenbissectrice van hoek B. Volgens Stelling 5a zijn de puntenparen (A, D') en (I, I_a) harmonisch.
Waarmee de stelling bewezen is. □

Stelling 6. *Als op een lijn l ter weerszijden van een punt D lijnstukken worden afgezet ter grootte van r en r_a, dan is de lengte van het lijnstuk AD – waarbij A het vierde harmonische punt is bij het punt D en het puntenpaar dat gevormd worden door de van D verschillende eindpunten van die lijnstukken – gelijk aan de lengte van de hoogtelijn h_a van de basisdriehoek.*



Bewijs:
In de hiernaast staande figuur is $(AD'II_a) = -1$ (volgens Stelling 5b).
Door loodrechte projectie op de lijn l door A loodrecht op BC hebben we:
$(ADI'I_a') = -1$
en daarbij is $I'D = r$ en $I'_aD = r_a$.
Waarmee de stelling bewezen is. □

Gevolg 4. Uit $(ADI'I_a') = -1$ (zie Stelling 6) volgt direct: $\dfrac{I'A}{I'D} = \dfrac{I'_aA}{I'_aD}$, of

$$\frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a + r_a}{r_a}$$

$$r_a h_a - r r_a = r h_a + r r_a$$

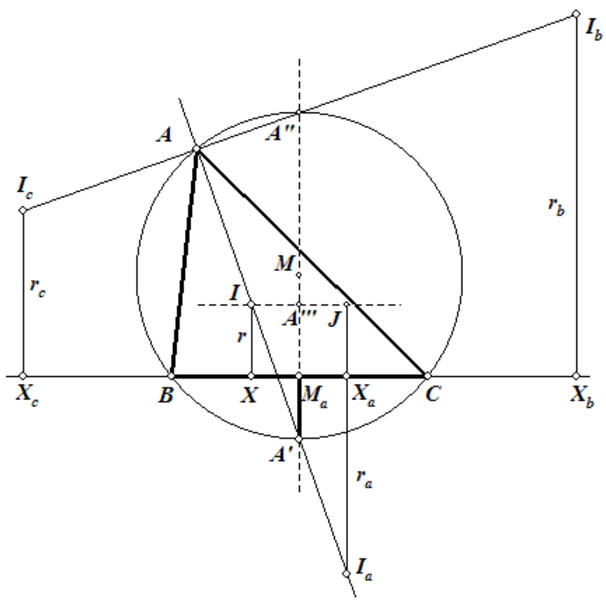
$$h_a(r_a - r) = 2 r r_a$$

zodat we vinden:

$$h_a = \frac{2 r r_a}{r_a - r}$$

Stelling 7. *In driehoek ABC waarin de bissectrice van hoek A de omcirkel tevens snijdt in het punt A' en waarin M_a het midden is van BC, geldt:*

$$A'M_a = \tfrac{1}{2}(r_a - r)$$



Bewijs:
Zijn X, X_a, X_b, X_c opvolgend de projecties van I, I_a, I_b, I_c op de lijn BC.
De lijn door I evenwijdig met BC snijdt $A'M_a$ in A''' en I_aX_a in het punt J.
$A'M_a$ snijdt de omcirkel ook nog in A'', welk punt ook ligt op de lijn I_bI_c; immers $AA'A''$ is een Thales-driehoek waardoor AA'' loodrecht staat op de bissectrice van hoek A en dus buitenbissectrice van die hoek is.
A' is het midden van I_aI (zie Stelling 4).
Dus:
$A'A''' = ½\, JI_a = ½\,(I_aX_a + X_aJ) = ½\,(r_a + r)$
en ook:
$A'A''' = A'M_a + r$

Zodat $A'M_a + r = ½\,(r_a + r)$ waaruit volgt: $A'M_a = ½\,(r_a - r)$
Hetgeen bewezen moest worden. □

Gevolg 5. A'' is het midden van I_bI_c (zie Appendix, Stelling A), zodat in het rechthoekige trapezium $I_bI_cX_cX_b$ geldt:

$$M_aA'' = \tfrac{1}{2}(r_b + r_c)$$

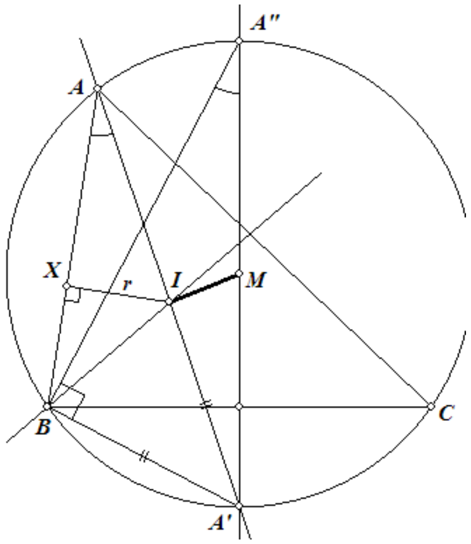
Dan hebben we verder (zie Stelling 7):

$$2R = A'A'' = A'M_a + M_aA'' = \tfrac{1}{2}(r_a - r) + \tfrac{1}{2}(r_b + r_c) = \tfrac{1}{2}(r_a + r_b + r_c) - \tfrac{1}{2}r$$

Zodat

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

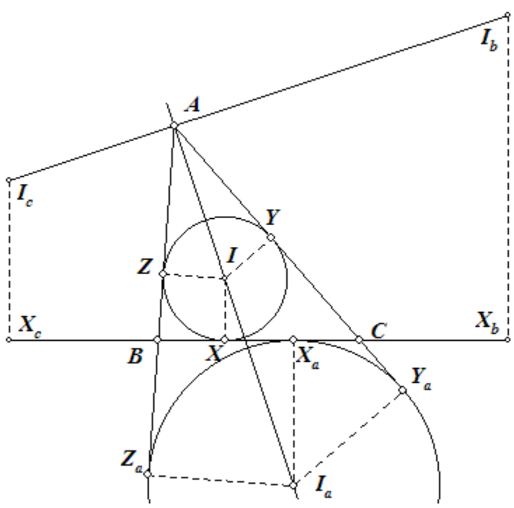
Stelling 8 (Formule van Euler; 1707-1783, Zwitserland). $d^2 = R(R-2r)$ *waarbij* $|IM| = d$.



Bewijs:
Voor de macht m van het punt I tov. van de omcirkel geldt:
(i)…… $m = R^2 - d^2$
(ii)…… $m = AI \cdot A'I$
Nu is, zoals we in Stelling 4 hebben gezien:
$A'I = A'B$
waardoor (ii) samen met (i) overgaat in:
(iii)…… $R^2 - d^2 = AI \cdot A'B$
De rechthoekige driehoeken AXI en $A''BA'$ zijn gelijkvormig, zodat
$AI : A''A' = XI : BA'$
Hieruit volgt voor (iii), omdat $XI = r$:
$R^2 - d^2 = r \cdot 2R$
Waaruit het gestelde volgt. □

Afstanden tot de raakpunten. We geven de projecties van I, I_a, I_b, I_c op de zijde BC aan met opvolgend: X, X_a, X_b, X_c (als in Stelling 7), en we gebruiken de letters Y en Z bij projecties op opvolgend de zijden CA en AB.

Stelling 9.
$AZ = AY = s - a$ $\quad BZ = BX = s - b$ $\quad CX = CY = s - c$
$AZ_a = AY_a = s$ $\quad BX_b = BZ_b = s$ $\quad CX = CY = s$
$BX_a = BZ_a = s - c$
$CX_a = CY_a = s - b$
en analoog voor de andere zijden van de driehoek.



Bewijs:
$AZ = AY$, $BZ = BX$, $CX = CY$
Nu is:

$$\begin{aligned} AZ + AY &= AB + AC - BZ - CY \\ &= AB + AC - BX - CX \\ &= AB + AC - BC \\ &= 2s - 2a \end{aligned}$$

Dus:
$AZ = AY = s - a$
Enzovoorts.
En ook: $AZ_a = AY_a$, $BX_a = BZ_a$, $CX_a = CY_a$
Dan is:

$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \end{aligned}$$

$AZ_a + AY_a = AB + AC + BC = 2s$

En dus: $AZ_a = AY_a = s$
En verder geldt dan:
$BX_a = BZ_a = AZ_a - AB = s - c$ en $CX_a = CY_a = AY_a - AC = s - b$
Waarmee de stelling bewezen is. □

Definitie. Twee punten P en P' op dezelfde zijde van een driehoek, met midden M_z, zijn **isotomische punten** als $PM_z = P'M_z$.

Gevolg 6

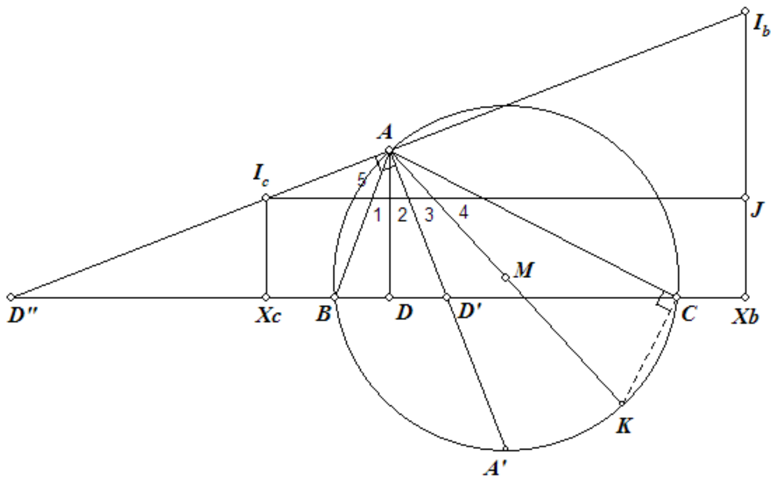
a. *De raakpunten van de in- en uitcirkel aan dezelfde zijde van een driehoek zijn isotomische punten.*
b. *De raakpunten aan een zijde van twee uitcirkels aan de beide andere zijden zijn isotomische punten.*
c. *In dit laatste geval is de afstand tussen die raakpunten gelijk aan de som van de lengtes van die beide andere zijden.*

Bewijs:
a. Dit volgt direct uit $BX = s - b$ en $CX_a = s - b$.
b. Dit volgt direct uit $BX_c = s - a$ en $CX_b = s - a$.
c. $X_bX_c = X_bC + BC + BX_c = (s - a) + a + (s - a) = b + c$ □

Stelling 10. *In onderstaande figuur is:*

$$\angle A_1 = \angle A_4 \qquad \angle A_2 = A_3$$
$$\angle A_{23} = B - C \qquad \angle D'' = \tfrac{1}{2}(B - C)$$

hierbij zijn AD' en AD'' de binnen- en buitenbissectrice van hoek A, is K het van A verschillend eindpunt van de middellijn van de omcirkel en is AD de hoogtelijn uit A.



Bewijs:

$$\left.\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2} bg(AC) \\ AKC &= \tfrac{1}{2} bg(AC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AKC = B$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 90° - B \\ A_4 &= 90° - B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 = A_4$$

$A_{12} = A_{34}$, zodat ook $A_2 = A_3$
Verder geldt nu:

$$
\begin{aligned}
A_{23} &= A - 2(90° - B) = A - 180° + 2B \\
&= A - 180° + B + B + C - C \\
&= B - C
\end{aligned}
$$

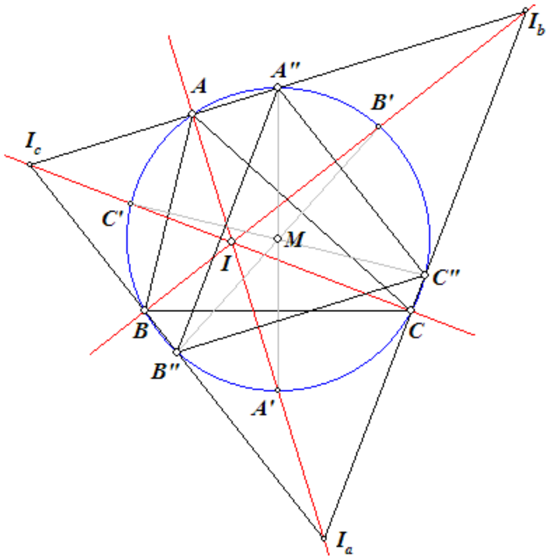
En $A_5 = 90° - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B + C)$, waaruit:

$D'' = B - A_5 = B - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(B - C)$ ☐

Gevolg 6. $\angle I_b I_c J = \frac{1}{2}(B - C)$, omdat $I_c J \,//\, BC$.

Appendix

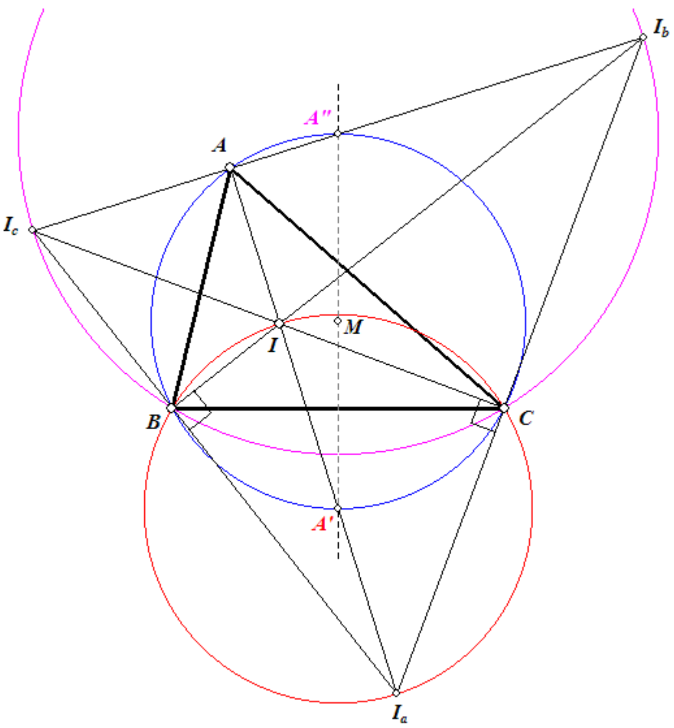
Stelling A. *De omcirkel van driehoek ABC is de negenpuntscirkel van driehoek* $I_aI_bI_c$.



Bewijs:
De binnenbissectrices van *ABC* zijn de hoogtelijnen van driehoek $I_aI_bI_c$; immers de zijden van $I_aI_bI_c$ zijn de buitenbissectrices van *ABC*.
ABC is *dus* de voetpuntsdriehoek van $I_aI_bI_c$.
De omcirkel van driehoek *ABC* is dan de negenpuntscirkel van $I_aI_bI_c$. □

Gevolg A. *De omcirkel van driehoek ABC gaat door de middens A", B", C" van de lijnstukken* I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

Het gevolg van Stelling A wordt ook bewezen in de volgende stelling.

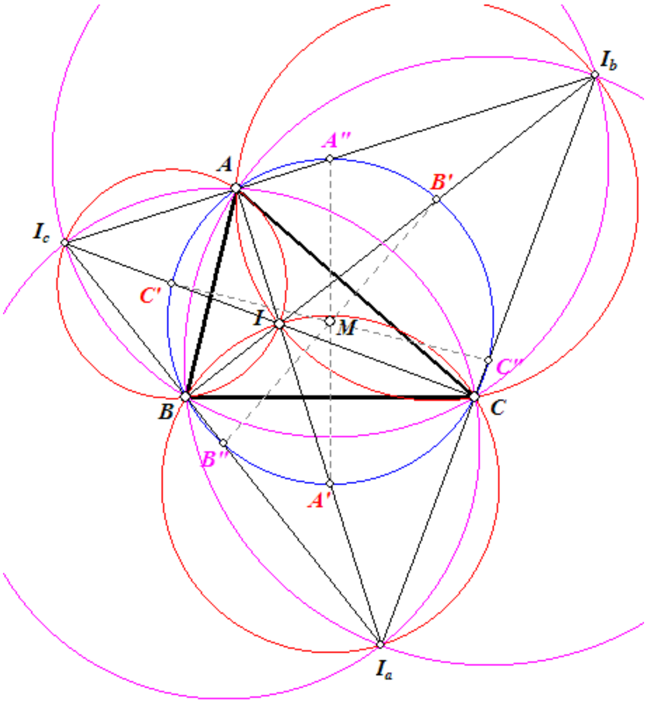


Stelling B. *Twee tritangent middelpunten zijn de eindpunten van een middellijn van een cirkel die gaat door de hoekpunten van de basisdriehoek, waarbij die hoekpunten niet collineair zijn met de beschouwde middelpunten.*

Bewijs:
a. Beschouw de punten *I* en I_a. Nu is IBI_aC een koordenvierhoek (zie de rechte hoeken bij *B* en bij *C*).
Het middelpunt van de omcirkel van de koordenvierhoek is dan het midden van I_aI.
Omdat de cirkel ook door *B* en *C* gaat ligt dat middelpunt ook op de middelloodlijn van *BC*.
Het middelpunt is dus het punt *A'*, het tweede snijpunt van de bissectrice van hoek *A* met de omcirkel van driehoek *ABC* (zie ook Stelling 4).

b. Beschouw de punten I_b en I_c. De vierhoek I_bI_cBC is eveneens een koordenvierhoek. Het middelpunt – noem het even *X* – is het midden van het lijnstuk I_bI_c. Omdat de omcirkel van de koordenvierhoek ook door *B* en *C* gaat ligt *X* eveneens op de middelloodlijn van *BC*. Maar $XAA' = 90°$, zodat *X* samenvalt met het punt *A"*, het tweede snijpunt van de middellijn *A'M* met de omcirkel van driehoek *ABC*. □

Gevolg B1. *De vier tritangent middelpunten van een driehoek liggen op zes cirkels die gaan door de paren hoekpunten van de driehoek. De middelpunten van die cirkels zijn de middens van de bogen die worden opgespannen door de bijbehorende zijde van de driehoek en diens omcirkel.*



Gevolg B2. *Als een driehoek een vaste basis heeft en een vaste omcirkel, dan bestaat de meetkundige plaats van de tritangent middelpunten uit twee cirkels die door de vaste hoekpunten gaan en die de eindpunten van de middellijn van de omcirkel die loodrecht staat op de vaste zijde, als middelpunt hebben. Dit alles als het derde (variabele) hoekpunt de omcirkel doorloopt.*