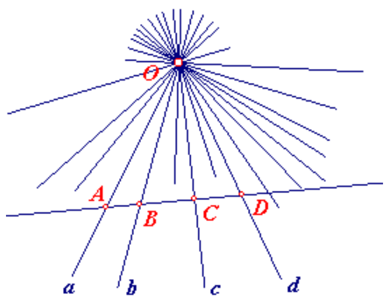
Cabri-werkblad
Projectieve meetkunde: lijnenbundels, harmonie, involutie

1. Inleiding
Dit Cabri-werkblad is een vervolg op het werkblad '*Projectieve meetkunde, enkele eerste stappen*'.
Er wordt van uit gegaan dat de leerling dit eerste werkblad heeft doorgewerkt, en zich de daarin behandelde onderwerpen heeft eigen gemaakt.
In dit werkblad komen ondermeer lijnenbundels, harmonische ligging, dualiteit, de stellingen van Pappos en Desargues en de involutie aan de orde. Ook wordt de volledige vierhoek behandeld.

N.b. In de opdrachten staat soms het teken 🗎. De bedoeling daarvan is dat de uitwerking van zo'n onderdeel *in ieder geval* opgenomen wordt in je verslag (of op een antwoordblad).
Het einde van elke opdracht wordt aangegeven met het teken «.

2. Lijnenbundel en dubbelverhouding daarin
Afspraken. Lijnen die door hetzelfde punt gaan, zijn 'elementen' of **stralen** van een **lijnenbundel** (ook wel **stralenbundel** genoemd). Het gemeenschappelijk punt van die lijnen heet **centrum** (oorsprong) van de lijnenbundel.
Vier van dergelijke lijnen heten een **vierstraal**.

figuur 1



Definitie dubbelverhouding. Snijden we de stralen (lijnen) van een vierstraal a, b, c, d met een lijn die niet door het centrum gaat, dan definiëren we

$$(abcd) = (ABCD)$$

waarbij A, B, C, D de snijpunten zijn van de vierstraal met die snijdende lijn (zie figuur 1).
We spreken in dit geval van de **dubbelverhouding** van de vierstraal.

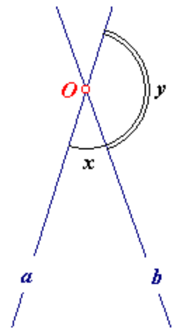
We gaan eerst op zoek naar het verband tussen de hoeken die de lijnen van een vierstraal met elkaar maken, en de gedefinieerde dubbelverhouding.
We gebruiken daarbij zogenoemde 'gerichte hoeken' of 'geöriënteerde hoeken'.

Onder de **gerichte** hoek $\measuredangle(a,b)$ tussen de lijnen a en b verstaan we de hoek waarover de lijn a geroteerd moet worden om samen te vallen met de lijn b (waarbij het snijpunt van a en b het rotatiecentrum is), en wel de *kleinste* hoek in *positieve* draairichting (tegen de wijzers van de klok in; in *tegenwijzerrichting*).

Voor $\varphi = \measuredangle(a,b)$ geldt dan $0° \le \varphi < 180°$ (ga dit na!). We laten bij het rekenen met gerichte hoeken veelvouden van 180° dus buiten beschouwing; dit heet '*rekenen modulo* 180°'.

Als er verder geen verwarring kan ontstaan, schrijven we in plaats van $\measuredangle(a,b)$ ook wel (ab).

figuur 2



In figuur 2 geldt dan op basis van deze afspraken:

$$x = \measuredangle(a,b)$$
$$y = \measuredangle(b,a)$$

Nu is $x + y = \measuredangle(a,b) + \measuredangle(b,a) = \measuredangle(a,a) = 0°$

We zouden ook kunnen concluderen dat $x + y = 180°$. Omdat we bij gerichte hoeken rekenen mod 180° (modulo 180°), betekent dit dat we het antwoord van een berekening beschouwen $\pm k \cdot 180°$ (de uitkomst daarmee reducerend tot een waarde tussen 0° en 180°)

We zien dus $\measuredangle(a,b) + \measuredangle(b,a) = 0°$, zodat geldt:

Stelling 1
Voor een gerichte hoek tussen de snijdende lijnen a en b geldt: $\measuredangle(a,b) = -\measuredangle(b,a)$.

N.b. Als de lijnen a en b evenwijdig zijn, dan is $\measuredangle(a,b) = 0°$.

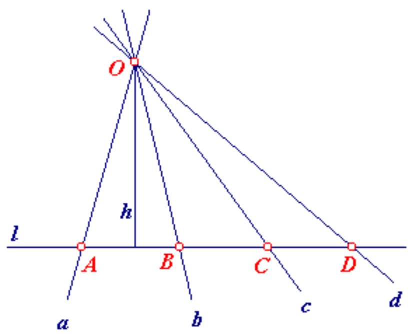
Opdracht 1

Van een driehoek ABC zijn de dragers van de zijden de lijnen a, b, c.

🖹 Bereken de waarde van $\measuredangle(a,b) + \measuredangle(b,c) + \measuredangle(c,a)$, in graden.«

Opdracht 2

figuur 3



Bekijk figuur 3 waarin a, b, c, d lijnen zijn van een vierstraal met centrum O. Deze vierstraal wordt door de lijn l gesneden in de punten A, …, D. De afstand van het punt O tot de lijn l is gelijk aan h.

Nu is **per definitie**: $(abcd) = (ABCD) = \dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB}$.

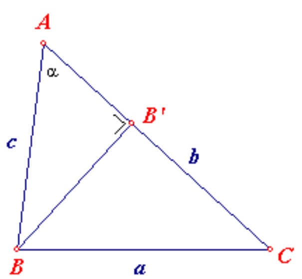
Met $[XYZ]$ bedoelen we in hetgeen volgt de *oppervlakte* van driehoek XYZ.

🖹 Bewijs nu: $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{[OCA]}{[OCB]}$ en $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{[ODB]}{[ODA]}$.

Aanwijzing. De gebruikelijke formule voor de oppervlakte van een driehoek is …«

Opdracht 3

figuur 4



Gegeven is de driehoek ABC (zie figuur 4) met zijden a, b, c.
Ook geldt: $[ABC] = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

🖹 Bewijs dat.

🖹 Geef overeenkomstige formules voor $[ABC]$ met $\sin\beta$ en met $\sin\gamma$.«

Opdracht 4

🖹 Laat zien dat, op basis van hetgeen je gevonden hebt in Opdracht 3, nu voor de uitdrukking $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{[OCA]}{[OCB]}$ in Opdracht 2 geschreven kan worden $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{OA\sin(ac)}{OB\sin(bc)}$.

🖹 Toon vervolgens aan dat dan in figuur 3 geldt: $(abcd)=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$.

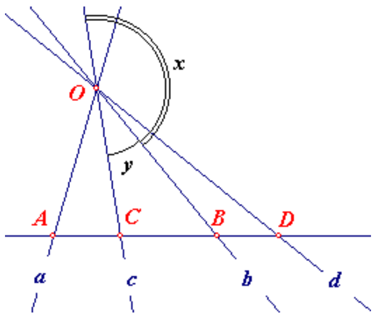
Uit deze laatste formule zien we dat (*abcd*) onafhankelijk is van de snijdende lijn *l*.

🖹 Verklaar dit kort.«

Afspraak. We spreken hier van de **sinus-verhoudingen** van de dubbelverhouding (*abcd*).

Opdracht 5

figuur 5



Zoals we eerder gezien hebben, kan de dubbelverhouding van vier op dezelfde lijn gelegen punten negatief zijn. Dat geldt dan natuurlijk ook, vanwege de definitie, voor de dubbelverhouding van vier lijnen in een vierstraal.
In figuur 5 geldt nu eveneens:

$$(abcd)=(ABCD)=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

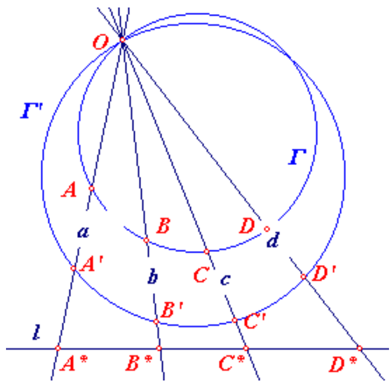
🖹 Waarom is dat zo?

Bij de oppervlaktebepaling van driehoek *OBC* maken echter gebruik van hoek $y=(cb)=-(bc)$, terwijl in de formule door de dubbelverhouding $\sin(bc)$ staat.

🖹 Verklaar nu waarom in dit geval (*abcd*) < 0.«

De dubbelverhouding van een vierstraal is nu ook overdraagbaar op punten van een cirkel die gaat door het centrum van de vierstraal. We doen dat op een manier zoals is weergegeven in figuur 6.

figuur 6



Opdracht 6

🖹 Verklaar kort waarom gesteld kan worden dat (*abcd*) = (*ABCD*), waarbij *A*, …, *D* de snijpunten zijn van de vierstraal *abcd* met de cirkel *Γ*.
Aanwijzing. Omtrekshoeken op een cirkel …

De cirkel *Γ '* gaat ook door *O*. De snijpunten van *Γ '* met de stralen van de vierstraal zijn *A'*, …, *D'*.

🖹 Waarom is nu (*ABCD*) = (*A'B'C'D'*)?

De centrale projectie met centrum O van de punten van Γ (waaronder dus A, B, C, D) op de punten van een lijn l (de beeldpunten van A, …, D zijn A^*, …, D^*) is een projectieve afbeelding.
Waarom is die centrale projectie ook hier een projectieve afbeelding?«

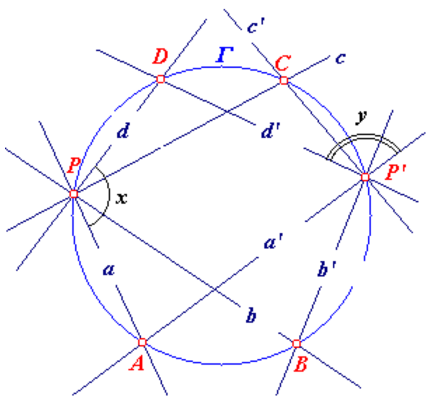
Afspraak. De cirkels Γ en Γ' zijn zogenoemde **Steiner-cirkels**.

Stelling 2
Op een cirkel Γ liggen twee vaste punten P en P' en vier variabele punten A, B, C, D met $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, $d = PD$ en $a' = P'A$, $b' = P'B$, $c = P'C$, $d = P'D$.
Dan is $(abcd) = (a'b'c'd')$.

In Opdracht 7 bewijzen we Stelling 2.

Opdracht 7
We zullen allereerst aantonen dat $(acbd) = (a'c'b'd')$; let op de volgorde van de letters!
In de sinus-verhoudingen van deze dubbelverhoudingen komen onder meer $\sin(ab)$, $\sin(a'b')$, $\sin(ad)$ en $\sin(d'a')$ voor.

figuur 7



Waarom is $(ab) = (a'b')$?
Wat weet je dan van $\sin(ab)$ en $\sin(a'b')$?

We hebben verder $x = (ad)$ en $y = (a'd')$.
Waarom is $x = y$?
- Ga na dat de voor de dubbelverhouding in de vierstraal met centrum P' geldt:

$$(a'c'b'd') = \frac{\sin(a'b')}{\sin(c'b')} : \frac{\sin(d'a')}{\sin(c'd')}$$

Aanwijzing. Let op de hoeken van de driehoeken die gebruikt worden bij de oppervlaktebepaling.

Waarom is $\sin(c'd') = \sin(cd)$?
Toon aan dat $\sin(c'b') = -\sin(bc)$ en dat $\sin(d'a') = -\sin(ad)$.
Is nu $(acbd) = (a'c'b'd')$? Verklaar je antwoord kort.

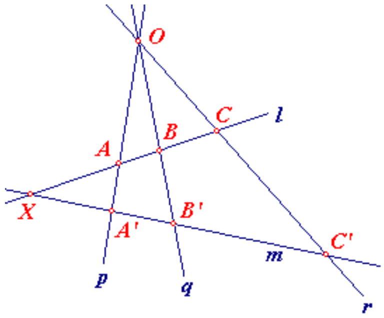
Waarom is dan ook $(abcd) = (a'b'c'd')$?«

Opdracht 8, een constructie
De punten A, B, C liggen op een cirkel.
Construeer het punt D op die cirkel zo, dat $(ABCD) = -1$.
Voeg een afdruk van je constructie toe aan je verslag. Geef ook een korte beschrijving van de door jou uitgevoerde constructie.«

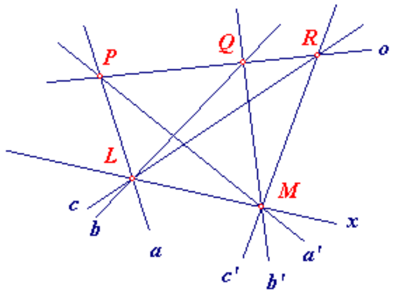
3. Dualiteit, de stelling van Pappos en die van Desargues

Opdracht 9
Bekijk onderstaande figuren. We zullen ontdekken dat deze figuren projectief gezien veel met elkaar te maken hebben.

figuur 8



figuur 9



– In figuur 8 zijn de volgende uitspraken juist:

(1) De punten A, B, C liggen op de lijn l.
(2) De punten A', B', C' liggen op de lijn m.
(3) Het punt X is het gemeenschappelijk punt van de lijnen l en m.
(4) De lijnen $p = AA'$, $q = BB'$, $r = CC'$ gaan door hetzelfde punt O.
(5) De puntenrij op l is perspectief met de puntenrij op m, of ook de lijnen l en m zijn *perspectief verwant* met centrum O.

- Ga de juistheid van de uitspraken (1)…(5) na.

– In figuur 9 geldt in ieder geval:

(1*) De lijnen a, b, c gaan door het punt L.

🗎 Doe nu min of meer dezelfde uitspraken als in (2), (3), (4) voor de objecten in figuur 9. Vervang daarbij het woord '*punt*' door '*lijn*', en omgekeerd, en het begrip '*liggen op*' door '*gaan door*', en omgekeerd.«

We zeggen dat er **dualiteit** bestaat tussen figuur 8 en figuur 9, als we uitspraken als hierboven over zulke figuren kunnen doen. We spreken wel van **duale figuren**.

De duale uitspraak bij uitspraak (5) luidt voor figuur 9:
(5*) De afbeelding van de lijnenbundel L is perspectief met de lijnenbundel M, of ook de lijnenbundels L en M zijn perspectief verwant met als *perspectiviteitsas* de lijn o.

N.b. 'Punt' en 'lijn' zijn *duale begrippen*; en dat is ook het geval met de begrippen 'liggen op' en 'gaan door'. En dat geldt ook voor de begrippen 'puntenrij' en 'lijnenbundel'.

Opdracht 10

🗎 Welk begrip is duaal met het begrip 'centrum' als het om lijnenbundels gaat?

In figuur 9 is de lijn $x = LM$ een element van de lijnenbundel L. Maar de lijn $x = ML$ is ook een exemplaar van de lijnenbundel M.

🗎 Als je de afbeelding van de lijnenbundel L op de lijnenbundel M bekijkt, op welke lijn wordt de lijn x dan afgebeeld?
Aanwijzing. Kijk eens 'duaal' naar figuur 8. Op welk punt wordt het punt X afgebeeld bij de perspectieve afbeelding van l op m?«

Er geldt nu:

Stelling 3a
Is de lijn LM bij een projectieve afbeelding van een lijnenbundel L op een lijnenbundel M een dubbellijn *(de lijn LM wordt op zichzelf afgebeeld), dan is die afbeelding een perspectieve afbeelding.*

en ook

Stelling 3b
Wordt een lijnenbundel perspectief afgebeeld op een andere lijnenbundel, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige stralen op eenzelfde lijn, de perspectiviteitsas.

Opdracht 11

🖹 Geef een verklaring voor de juistheid van Stelling 3b.«

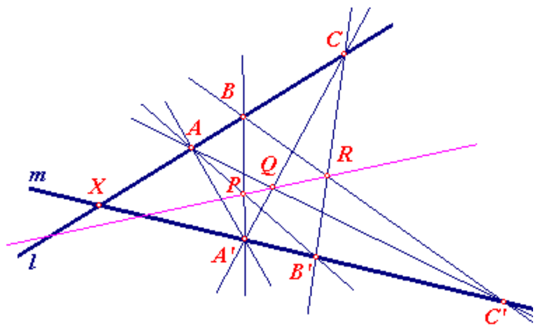
We zullen nu twee belangrijke stellingen uit de projectieve meetkunde bewijzen, nl. de Stelling van Pappos (naar *Pappos van Alexandrië*, ± 300, Egypte) en de Stelling van Desargues (naar *Girard Desargues*, 1591-1661, Frankrijk, gepubliceerd in 1636).

Stelling 4 (stelling van Pappos)
Als de punten A, B, C liggen op een lijn l en de punten A', B', C' liggen op een lijn m, dan liggen de snijpunten P, Q, R van AB' en A'B, van AC' en A'C, van BC' en B'C op dezelfde rechte lijn.

Opmerking. De Stelling van Pappos wordt ook wel als volgt geformuleerd:
Liggen de hoekpunten van de zeshoek AA'BB'CC' afwisselen op twee lijnen l en m, dan liggen de snijpunten van de overstaande zijden van die zeshoek, op dezelfde rechte lijn.

Opdracht 12a, stelling van Pappos

figuur 10



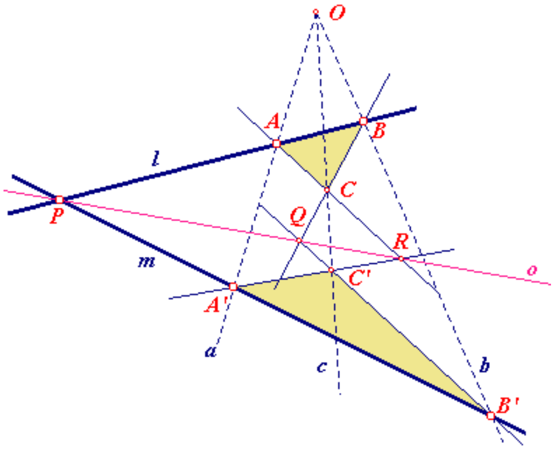
🖹 Waarom is de afbeelding vastgelegd door de puntenparen (A, A'), (B, B'), (C, C') een projectieve afbeelding van de lijn l op de lijn m?
Kies de punten A en A' elk als centrum van een lijnenbundel.
🖹 Welke lijnen behoren in ieder geval tot bundel A; en welke tot bundel A'?
🖹 Welke lijn is dubbellijn van beide bundels?

🖹 Waarom is de afbeelding tussen beide bundels een perspectieve afbeelding?
🖹 Waarom liggen dan de punten P, Q, R op dezelfde lijn?
N.b. Deze lijn gaat niet noodzakelijk door het snijpunt X van de lijnen l en m!«

Stelling 5 (stelling van Desargues)
Zijn twee driehoeken puntperspectief, dan zijn die driehoeken ook lijnperspectief.

De begrippen 'puntsperspectief' en 'lijnperspectief' hebben we nog niet eerder gebruikt.
Puntperspectief wil evenwel zeggen, dat verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door hetzelfde punt gaan (het perspectiviteitscentrum); in figuur 11 gaan AA', BB', CC' door het punt O.
Lijnperspectief wil zeggen, dat overeenkomstige zijden elkaar snijden op dezelfde lijn (de perspectiviteitsas); in figuur 11 liggen de snijpunten P, Q, R van AB en $A'B'$, van BC en $B'C'$, van CA en $C'A'$ op de lijn o.

figuur 11



Opdracht 12b, stelling van Desargues

We gaan uit van de lijnenbundel *O* (zie figuur 11). De lijnen van deze bundel bepalen een perspectieve afbeelding van de lijn *l* op de lijn *m*. Het snijpunt van de lijnen *l* en *m* is het punt *P*.

🖹 Welke drie puntenparen behoren in ieder geval tot die perspectieve afbeelding?
Is deze perspectieve afbeelding volledig bepaald? Verklaar kort je antwoord.

We vatten vervolgens de punten *C* en *C'* elk op als centrum van een lijnenbundel. Exemplaren van die lijnenbundels zijn respectievelijk *CA*, *CB, CP* en *C'A'*, *C'B', C'P*.

🖹 Waarom liggen de snijpunten *P*, *Q*, *R* van de overeenkomstige zijden van de driehoek *ABC*, *A'B'C'* nu op dezelfde rechte lijn (in dit geval is dat de lijn *o*)?
Aanwijzing. Is er een stelling die zegt dat…?

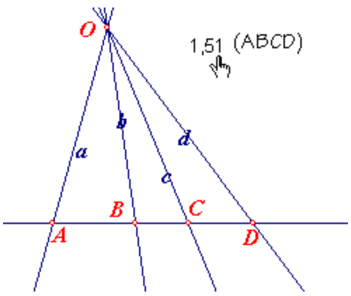
- Teken nu zelf met Cabri een figuur als die in figuur 11. Kies daarbij in ieder geval het punt *O* en de lijnen *a* (waarop *A* en *A'*), *b* (waarop *B* en *B'*), *c* (waarop *C* en *C'*) als onafhankelijke objecten.
- Ga dan na dat bij verplaatsing van objecten er steeds sprake is van collineariteit op de lijn *o*.«

4. Constructief intermezzo

Opdracht 13, macro:DubbelverhStralen

In figuur 12 zijn *a*, *b*, *c*, *d* lijnen van een lijnenbundel *O*. Het punt *A* is een willekeurig punt van de lijn *a*, *D* is een willekeurig punt van de lijn *d*. De lijn *AD* de andere lijnen in *B*, *C*.
In het werkblad '*Projectieve meetkunde, enkele eerste stappen*' heb je de macro Dubbelverhouding vastgelegd door vier punten op een rechte lijn. Deze macro kunnen we gebruiken om een macro te definiëren voor een vierstraal.

figuur 12



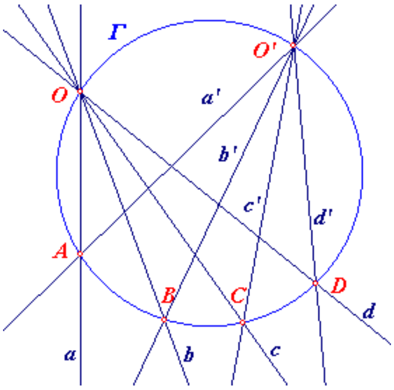
- Laad de macro:Dubbelverhouding in Cabri en construeer daarna eenzelfde figuur als figuur 12.
- Bepaal met de macro Dubbelverhouding de waarde van (*ABCD*).
Opmerking. In de figuur hiernaast is die waarde 1,41; maar dat hoeft in jouw figuur natuurlijk niet het geval te zijn.
- Leg nu met de volgende vijf stappen de macro DubbelverhStralen vast.

1. Beginobjecten.
2. Selecteer de lijnen *a*, *b*, *c*, *d* (in deze volgorde).

3. Eindobjecten.
4. Selecteer het getal dat waarde van de dubbelverhouding (*ABCD*) weergeeft.
5. DefinieerMacro; bewaar daarbij de macro onder de naam 'DubbelverhStralen' op disk.«

Opdracht 14

figuur 13



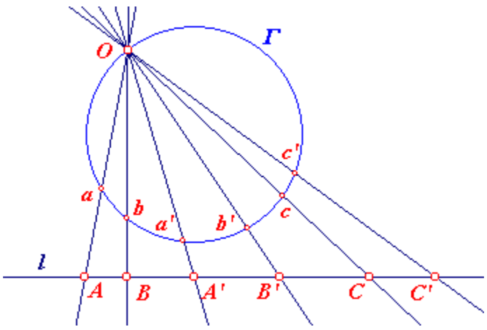
In figuur 13 liggen de punten *A*, *B*, *C*, *D* op de cirkel *Γ*.
De punten *O* en *O'* zijn elk centrum van een lijnenbundel, die opvolgend de lijnen *a*, *b*, *c*, *d* en *a'*, *b'*, *c'*, *d'* als element hebben.

- Maak zelf ook zo'n tekening.
- Gebruik de macro DubbelverhStralen om met Cabri de waarde van (*abcd*) en van (*a'b'c'd'*) te berekenen.
- Verplaats de punten *O*, *O'*, *A*, *B*, *C*, *D* over de cirkel.
- Geef een korte beschrijving van je waarnemingen.
  Op grond waarvan (welke stelling of welke opdracht) had je dit resultaat inderdaad kunnen verwachten?«

In figuur 14 is op de lijn *l* een projectieve afbeelding van *l* op zichzelf vastgelegd door de puntenparen (*A*, *A'*), (*B*, *B'*), (*C*, *C'*).
Via het punt *O* op een Steiner-cirkel *Γ* is die projectieve afbeelding overgebracht op de lijnenbundel *O*: we hebben daardoor een projectieve afbeelding van die lijnenbundel op zichzelf.
Maar via het punt *O* hebben we eveneens een projectieve afbeelding van *Γ* op zichzelf!
De punten *a*, *a'*, … in de figuur geven niet alleen de lijnen in de bundel *O* aan, maar ook de punten van *Γ*.

We zullen van beide 'nieuwe' projectieve afbeeldingen (men spreekt wel van *geïnduceerde* projectieve afbeeldingen) in de volgende opdracht gebruik maken.

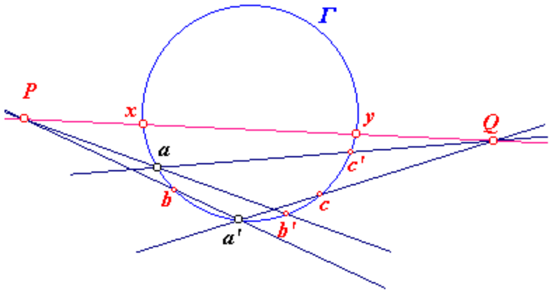
figuur 14



Opdracht 15, dubbelpunten

Eerst bekijken we de projectieve afbeelding van *Γ* op zichzelf. In figuur 15 is voortgebouwd op figuur 14; daarbij zijn vooralsnog niet terzake doende objecten verborgen.

figuur 15



We kiezen de punten a en a' elk als centrum van een lijnenbundel.

- Waarom is er nu sprake van een *perspectieve* afbeelding van bundel a op bundel a' ?
- Maak zelf een tekening die ongeveer overeenkomt met die in figuur 15.
  Aanwijzing. Plaats de punten in ieder geval in de volgorde a, b, a', b', c, c' op Γ.

Het punt P in de figuur is het snijpunt van de lijnen ab' en $a'b$; het punt Q is het snijpunt van de lijnen ac' en $a'c$.

- Waarom is de lijn PQ nu de perspectiviteitsas van de afbeelding van bundel a op bundel a' ?

De lijn PQ snijdt de cirkel Γ in de punten x en y.

- Waar op Γ liggen de punten x' en y' ?
  Aanwijzing. Probeer x' en y' indien nodig te construeren.
  Wat zijn de punten x en y dus van de afbeelding?

Uiteraard vinden de punten x en y van Γ hun oorsprong in punten X en Y van de lijn l.

- Construeer de punten X en Y op l.
- Zijn de punten X en Y bijzondere punten van de afbeelding van l op zichzelf? Licht je antwoord toe.
- Voeg een afdruk van de gehele constructie toe aan je verslag.

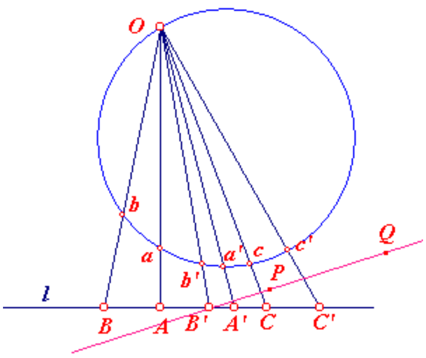
We bekijken tenslotte nog even de projectieve afbeelding van de bundel O op zichzelf.
Bij de gegeven ligging van de lijnen a, a', … (zie figuur 14) heeft deze bundel twee zogenoemde *dubbellijnen*.

- Welke lijnen zijn dat?«

Opdracht 16

De gehele constructie zoals je die in Opdracht 15 hebt gemaakt, geeft de mogelijkheid te onderzoeken of een projectieve afbeelding van een lijn l op zichzelf twee, één, of geen enkel dubbelpunt heeft.

figuur 16

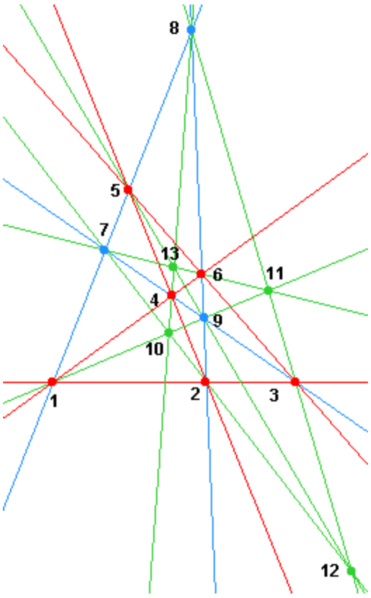


In figuur 16 zien we een situatie waarin de afbeelding van l op zichzelf *geen* dubbelpunten heeft.

- Voeg een afdruk aan je verslag toe waarin de projectieve afbeelding van l op l precies één dubbelpunt heeft.
  Aanwijzing. Indien je opnieuw een constructie moet maken, kies dan als uitgangspunt voor die constructie een lijn l met daarop de punt A, A', B, …
  Overigens zal je de precieze ligging van de punten A, A', … niet zo makkelijk kunnen bepalen om juist één dubbelpunt te krijgen.

Opdracht 17, een duale constructie

figuur 17



Teken 4 rode lijnen die elkaar twee aan twee snijden. Je krijgt dan 6 rode snijpunten (1, …, 6).
Niet elk tweetal van die rode punten is door een lijn verbonden. Om dat te bewerkstelligen kan je 3 blauwe lijnen tekenen. Deze snijden elkaar in 3 blauwe punten (7, 8, 9).
Alle tot nu toe getekende punten kunnen nu verbonden worden met 6 extra groene lijnen. Door elk rood punt gaan dan vier lijnen (twee rode, een blauwe, een groene). De groene lijnen snijden elkaar in 4 groene punten (10, 11, 12, 13).
De constructie (zie figuur 17) bestaat dan uit 13 (4 + 3 + 6) lijnen en 13 punten; deze heet daarom de *13-13-constructie*).

- Maak nu zelf met Cabri de duale figuur van figuur 16 door een nieuwe figuur te tekenen uitgaande van 4 groene punten, die verbonden worden door 6 groene lijnen, …

Merk op dat de nieuwe figuur hetzelfde is als de figuur die hierboven staat; dergelijke figuren heten *zelfduaal*.
Om dit te verifiëren is het aantal lijnen door de punten van figuur 17, onderscheiden naar kleur, in de volgende tabel gezet.

lijn/punt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
rood	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
blauw	1	1	1	1	1	1	2	2	2	0	0	0	0
groen	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3

🖹 Maak zo'n tabel voor de door jou getekende figuur. Geef daarbij ook aan welke begrippen er duaal zijn in beide tekeningen.

Opdracht 18, nog eens twee duale constructies

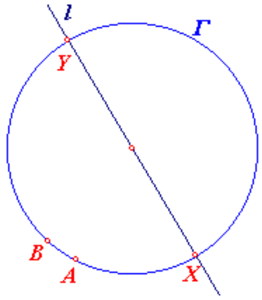
In figuur 10 staat een figuur die behoort bij de Stelling van Pappos.
🖹 Maak een duale tekening van die figuur.
In figuur 11 staat een figuur die behoort bij de Stelling van Desargues.
🖹 Maak een duale tekening bij die figuur.
Is er bij de Desargues-figuren sprake van zelfdualiteit? Verklaar je antwoord.

5. Involutie

Opdracht 19

Op een cirkel Γ liggen de punten A en B. De lijn l is een middellijn van die cirkel die niet door A of B gaat. We maken nu een afbeelding van Γ op zichzelf door de punten van de cirkel te spiegelen in de lijn l.

figuur 18



- Maak zelf een tekening als in figuur 18 en geef ook de punten A' en B' in die tekening aan.

Zoals je weet ligt een projectieve afbeelding vast als je van *drie* punten hun beeldpunten weet.
Iemand beweert nu dat *hier* de puntenparen A, A' en B, B' *meer dan* voldoende zijn voor het bepalen van de bedoelde projectieve afbeelding van Γ op zichzelf.

🖹 Ben je het met die 'iemand' eens? Verklaar je antwoord, en zeker ook waarom het 'meer dan voldoende' is.
🖹 Wat zijn de dubbelpunten van deze afbeelding?«

We geven een projectieve afbeelding soms aan met een (Griekse) letter. Is φ bovenstaande projectieve afbeelding, dan vertalen we de zin 'het punt A heeft bij de afbeelding φ het punt A' als beeldpunt' met

$$\varphi(A) = A'$$

Opdracht 20

Zie weer figuur 18.
🖹 Vul nu aan: $\varphi(X) = \ldots$ en $\varphi(Y) = \ldots$
🖹 Vul eveneens aan: $\varphi(\varphi(A)) = \ldots$
Het punt P is een willekeurig punt van de cirkel Γ.
🖹 Geldt voor alle punten P van Γ: $\varphi(\varphi(P)) = P$? Zo ja, verklaar kort je antwoord. Zo nee, waarom niet?

Afspraken.
- We schrijven $\varphi(\varphi(P))$ vaak als $\varphi^2(P)$.
- Een projectieve afbeelding φ waarvoor geldt dat $\varphi^2(P) = P$ voor ieder punt P, heet **involutie.**

🖹 Is de hierboven bedoelde afbeelding φ van Γ op zichzelf, een involutie? Verklaar je antwoord.«

Op grond van het bovenstaande kunnen we nu stellen:

Stelling 6
Een involutie is volledig bepaald door het geven van twee punten en hun beeldpunten.

Opdracht 21

Ga uit van de bij Opdracht 19 gemaakte tekening. Kies op Γ vervolgens een punt O en teken de lijnen $x = OX$, $y = OY$, $a = OA$, $b = OB$, $a' = OA'$, $b' = OB'$.
- Open nu in Cabri de macro DubbelverhStralen en bereken met deze macro in de stralenbundel O de waarde van $(abxy)$ en van $(a'b'xy)$.

🖹 Voeg aan je verslag een afdruk toe waaruit deze berekeningen blijken.
🖹 Waarom zijn die berekende waarden aan elkaar gelijk?

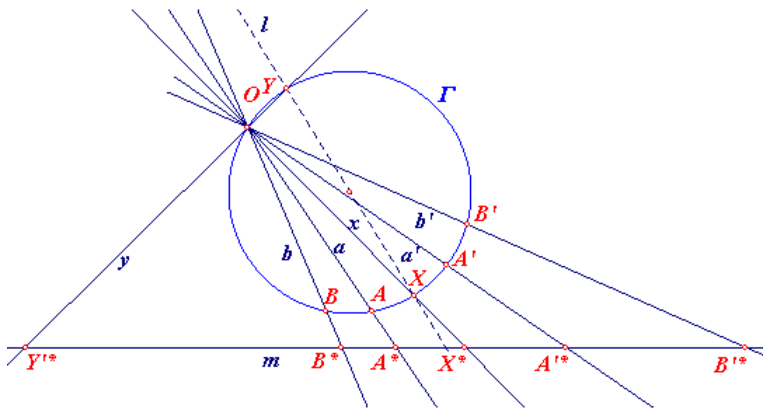
Via het punt O en de betreffende stralen van de bundel O kunnen we de projectieve afbeelding φ die vastgelegd is op Γ, overbrengen op een rechte lijn m; zie figuur 19.
- Doe dat ook in je eigen tekening. Voeg ook weer een afdruk aan je verslag toe waarop de door jou uitgevoerde constructie is opgenomen.

🖹 Waarom hebben we nu ook op de lijn m een involutie?

N.b. De overeenkomstige punten op de lijn m zijn in figuur 19 voorzien van een [*] (sterretje). In de tekst hieronder gebruiken we voor de naamsaanduiding van de punten op m letters zonder dat sterretje.

- Waarom geldt op de lijn m: $(AA'XY) = (A'AXY)$?

figuur 19



- Open vervolgens de macro:Dubbelverhouding en controleer hiermee dat op de lijn m geldt: $(AA'XY) = (A'AXY) = -1$
- Bereken met die macro nu ook $(BB'XY)$ voor deze punten op m.
- Kies een willekeurig punt P op cirkel Γ en construeer de daarbij behorende punten P en P' op de lijn m.
  Bereken nu ook $(PP'XY)$, voor deze punten op m.
- Stel nu dat $(AA'XY) = d$. Bewijs dan dat $d^2 = 1$.
  Aanwijzing. Als $(KLMN) = d$, waaraan is dan $(LKMN)$ gelijk?
- Laat zien dat het *onmogelijk* is dat op de lijn m geldt: $(AA'XY) = 1$.«

Je hebt nu bewezen:

Stelling 7
Is A, A' een puntenpaar van een involutie waarvan X en Y de dubbelpunten zijn, dan is

$$(AA'XY) = -1$$

Opdracht 22

Op de lijn m zijn de punten X en Y dubbelpunten van een involutie φ. De punten A, B liggen eveneens op m, waarbij $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$.

- Waarom ligt nu de involutie φ op de lijn m vast, ook al is het beeld van het punt A (en ook dat van het punt B) niet gegeven?
- Construeer de punten A', B'. Voeg weer een afdruk van je constructie toe aan het verslag.
  Aanwijzing. Waaraan is $(XYAA')$ gelijk? Waaraan is $(XYBB')$ gelijk?
- Teken vervolgens een Steiner-cirkel Γ met daarop een punt O. Breng de involutie φ die op de lijn m bestaat, via het punt O op Γ.
- Is er dan op Γ sprake van een spiegeling in een middellijn (zoals in Opdracht 19)? Verklaar je antwoord. Voeg ook nu weer een afdruk van je constructie toe aan het verslag.

6. Harmonie

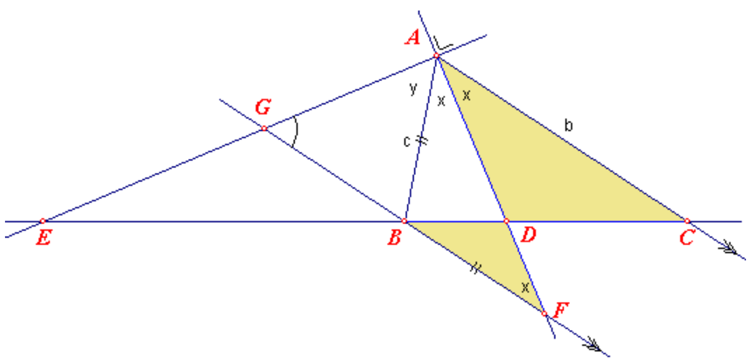
In Stelling 7, maar ook in het werkblad '*Projectieve meetkunde, enkele eerste stappen*', komen we de bijzondere dubbelverhouding met waarde –1 tegen.
We zullen in deze paragraaf deze dubbelverhouding aan enkele nadere onderzoeken onderwerpen.

Allereerst bewijzen we een stelling uit de 'gewone' vlakke meetkude.

Stelling 8a
Is AD de (binnen)bissectrice van hoek A van driehoek ABC en zijn b en c opvolgend de lengtes van de zijden CA en AB, dan geldt: BD **:** *CD = c* **:** *b.*
Of anders geformuleerd:
De bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde van die hoek in stukken die zich verhouden als de 'opstaande' zijden.

Opdracht 23a

figuur 20



Bekijk figuur 20. In die figuur is de lijn *BF* evenwijdig met *AC*.
AD is de binnenbissectrice van hoek *A*.
AE is de buitenbissectrice van hoek *A*.
BF snijdt de lijn *AE* in het punt *G*.
In de figuur zijn gelijke hoeken aan gegeven met de letter 'x'.

🗎 Waarom zijn die hoeken aan elkaar gelijk?

🗎 Bewijs dat de driehoeken *FDB* en *ADC* gelijkvormig zijn.
De gelijkvormigheidsfactor van *FDB* naar *ADC* is gelijk aan het getal *k*.
🗎 Vul nu aan:
$AC = b = k \cdot \;\; \ldots$
$AB = c = \ldots = k \cdot \;\; \ldots$
🗎 Laat nu (via een berekening) zien dat inderdaad *BD* : *CD* = *AB* : *AC*.«

We kunnen Stelling 8a ook formuleren voor de buitenbissectrice:

Stelling 8b
Is AE de buitenbissectrice van hoek A van driehoek ABC en zijn b en c opvolgend de lengtes van de zijden CA en AB, dan geldt: BE **:** *CE = c* **:** *b.*

Opdracht 23b

🗎 Zie ook figuur 20 en geef een bewijs van Stelling 8b analoog aan dat van Stelling 8a.
Aanwijzing. Toon aan dat de driehoeken *BEG* en *CEA* gelijkvormig zijn.; kijk daarna naar evenredige lijnstukken in beide driehoeken. Bewijs daarbij ook *BG* = *BA*.

Opdracht 24

- Maak zelf een Cabri-tekening met een driehoek *ABC* en de beide bissectrices *AD* en *AE* (zie figuur 20).
- Open vervolgens de macro:Dubbelverhouding en bereken daarmee de waarde van (*BCDE*).

Er geldt, zoals bekend: $(BCDE) = \dfrac{DB}{DC} : \dfrac{EB}{EC}$.

🗎 Laat nu zien dat het resultaat van je macro-berekening hiermee in overeenstemming is.
Aanwijzing. Gebruik de Stellingen 8a en 8b. Geef ook een verklaring voor het minteken!«

Afspraak. Een dubbelverhouding (*PQRS*) = -1 noemt men **harmonische verhouding**. Men zegt ook wel dat de puntenparen *P*, *Q* en *R*, *S* elkaar **harmonisch scheiden**, en ook dat de punten *P*, *Q*, *R*, *S* (in deze volgorde) **harmonische punten** zijn.

Gevolg van deze afspraak. De hoekpunten *B*, *C* van driehoek *ABC* (zie weer figuur 20) worden door de voetpunten *D*, *E* van de binnen- en buitenbissectrices van hoek *A* harmonisch gescheiden.
Merk verder op, dat we, als gevolg hiervan, in de lijnenbundel *A* ook lijnenparen hebben die elkaar harmonisch scheiden; namelijk de lijnen *AB*, *AC* en *AD*, *AE*. We schrijven dan wel *A*(*BCDE*) = -1.

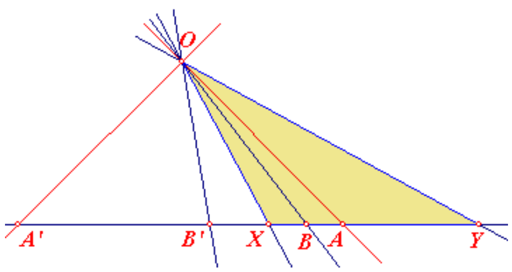
Op grond van het bovenstaande kunnen we de stellingen 8a en 8b als volgt formuleren.

Stelling 8c
In een driehoek worden de hoekpunten op een zijde harmonisch gescheiden door de voetpunten van de binnen- en buitenbissectrice op die zijde.

Opdracht 25

In figuur 21 zijn de lijnen *OA* en *OA'* de binnen- en buitenbissectrice van hoek *O* van driehoek *OXY*.
Op de lijn *XY* ligt een involutie φ vast waarvan de punten *X* en *Y* de dubbelpunten zijn.
🖹 Waarom vormen de punten *A* en *A'* een puntenpaar van deze involutie?
Het puntenpaar *B*, *B'* is behoort eveneens tot φ.

figuur 21

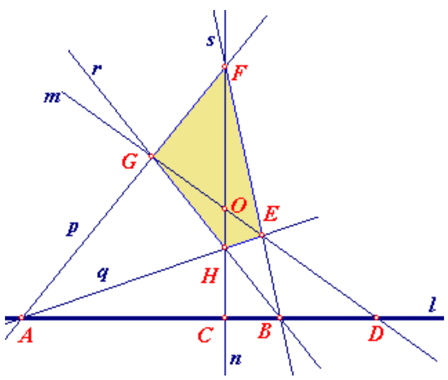


🖹 Construeer eenzelfde figuur als nevenstaande figuur. Voeg ook nu weer een afdruk aan je verslag toe waaruit de constructie (oa. die van het punt *B'*) duidelijk blijkt.
Aanwijzing. Ga bij je constructie uit van driehoek *OXY*, teken dan de lijnen *OA* en *OA'*. Kies dan het punt *B* willekeurig op de lijn *XY*, en construeer het daarbij behorende punt *B'*.

In de lijnenbundel met centrum *O* hebben we nu ook harmonische lijnenparen *O*(*XYAA'*) en O(*XYBB'*). Het lijnenpaar *OA*, *OA'* staat in deze bundel loodrecht op elkaar.
🖹 Ga met behulp van je constructie na of er nog meer lijnenparen tot de bundel behoren die loodrecht op elkaar staan. Geef in je verslag weer hoe je dat hebt onderzocht en vermeld je bevindingen.

Opdracht 26

figuur 22



Zie figuur 22. Op een lijn *l* liggen de punten *A*, *B*, *D*. Door het punt *A* gaan ook de lijnen *p* en *q*, en door het punt *D* gaat de lijn *m*, die de lijnen *p* en *q* opvolgend in *G* en *E* snijdt. De lijn *r* = *BG* snijdt *q* in *H*; de lijn *s* = *BE* snijdt *p* in *F*.
We hebben nu een vierhoek *EFGH* geconstrueerd waarvan de lijn *m* een diagonaal is. De lijn *n* = *FH* is de tweede diagonaal. De lijn *n* snijdt *l* in het punt *C*. Het snijpunt van de beide diagonalen is het punt *O*.

🖹 Waarom is hier (*ABCD*) < 0?

Kies het punt H als centrum van een centrale projectie van de lijn l op de lijn m.

- 🖹 Aan welke dubbelverhouding op de lijn m is $(ABCD)$ dan gelijk?

Kies vervolgens het punt F als centrum van een centrale projectie van de lijn m op de lijn l.

- 🖹 Waaraan is $(EGOD)$ dan gelijk?
- 🖹 Waarom geldt nu: $(ABCD) = (BACD)$?
- 🖹 Laat zien dat hieruit volgt dat: $\frac{CA}{CB} \times \frac{DB}{DA} = \frac{CB}{CA} \times \frac{DA}{DB}$.
- 🖹 Waarom is nu $(ABCD) = -1$?«

Opmerking. Opdracht 26 vinden we in een iets andere vorm terug als Opdracht 10 op het werkblad '*Projectieve meetkunde, enkele eerste stappen*'.

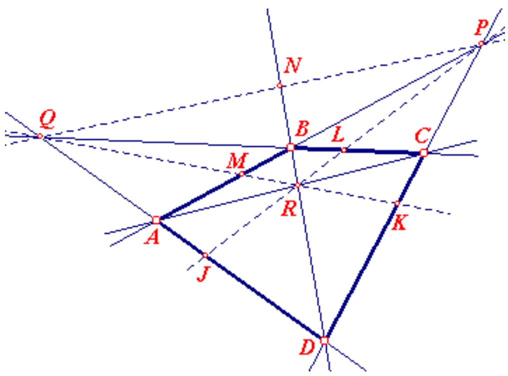
Vier 'vrijgelegen' punten – dat zijn punten waarvan geen drietal op dezelfde lijn ligt – kunnen altijd worden verbonden door zes lijnen.

Afspraken. Een figuur bestaande uit vier punten en hun zes verbindingslijnen wordt in de projectieve meetkunde een **volledige vierhoek** genoemd. De vier punten zijn de **hoekpunten**. De zes verbindingslijnen zijn de **zijden** van de volledige vierhoek.
Overstaande zijden in zo'n volledige vierhoek zijn zijden die geen hoekpunt gemeenschappelijk hebben. Het snijpunt van twee overstaande zijden heet **diagonaalpunt**.
Een lijn die twee diagonaalpunten met elkaar verbindt, noemen we hier **diagonaal**.

Merk op dat de betekenis van 'diagonaal van een vierhoek' in de projectieve meetkunde anders is dan gebruikelijk.

Opdracht 27

figuur 23



In figuur 23 staat een volledige vierhoek $ABCD$.

🖹 Vul aan:

a) de hoekpunten van die volledige vierhoek zijn de punten …;
b) de zijden van die volledige vierhoek zijn de lijnen …;
c) de overstaande zijden zijn de lijnenparen …, … en …, … en …, …;
d) de diagonaalpunten zijn de punten …;
e) de diagonalen zijn de lijnen …

We hebben in Opdracht 26 in principe de volgende stelling voor een volledige vierhoek bewezen.

Stelling 9
De twee zijden en de twee diagonalen van een volledige vierhoek die samenkomen in hetzelfde diagonaalpunt van een volledige vierhoek, vormen een harmonische vierstraal.

Opdracht 28

- 🖹 Geef een korte toelichting op Stelling 9, waarbij duidelijk wordt hoe Opdracht 26 met Stelling 9 in verband gebracht kan worden.
- 🖹 In figuur 23 komen drie harmonische vierstralen voor. Vermeld deze vierstralen.
- 🖹 In de figuur zijn ook allerlei harmonische puntenviertallen te vinden (één daarvan is bijvoorbeeld $ADQJ$. Geef nog enkele van deze harmonische puntenviertallen.

Opdracht 29

Op de lijn l zijn de punten A, B, C gegeven.

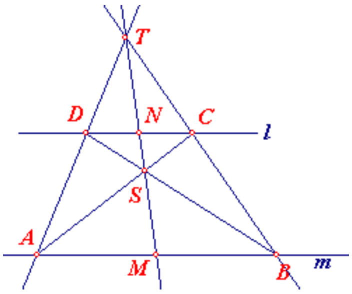
figuur 24

🗎 Construeer door gebruik te maken van de figuur van een volledige vierhoek het punt D zo op l, dat $ABCD$ een harmonisch puntenviertal is (in de situatie gegeven in figuur 24).

Met behulp van (projectieve) harmonische puntenviertallen in een volledige vierhoek kunnen ook bewijzen uit de 'gewone' meetkunde worden geleverd.
We geven daarvan in de volgende opdracht een voorbeeld.

Opdracht 30

figuur 25



Zo hebben we de volgende eigenschap van een trapezium.

Van een trapezium ABCD waarvan AB // CD snijden de opstaande zijden AD en BC elkaar bij verlenging in het punt T. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in S.
Dan deelt de lijn TS de evenwijdige zijden van het trapezium middendoor.

We geven het oneigenlijk punt van de lijnen $l = AB$ en $m = CD$ aan met de letter U. Vat nu de vierhoek $ABCD$ op als een volledige vierhoek.

🗎 Welke punten zijn de diagonaalpunten van $ABCD$? Welke lijnen zijn dan de diagonalen van die volledige vierhoek?
Geef in een tekening deze diagonalen duidelijk aan.

🗎 Waarom is $(ABMU) = -1$?
Aanwijzing. Zie hiervoor het werkblad '*Projectieve meetkunde, enkele eerste stappen*'.

🗎 Laat zien dat hieruit volgt dat M het midden is van het lijnstuk AB.

🗎 Bewijs op dezelfde manier dat N het midden is van het lijnstuk CD.

Opdracht 31

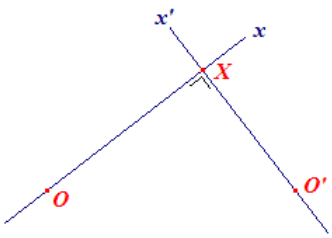
De lijnen k, l, m gaat alle door hetzelfde punt O.

- Construeer nu de lijn n door O zo, dat $klmn$ een harmonische vierstraal is.

🗎 Voeg een afdruk van je constructie toe aan het verslag. Vermeld daarbij kort, maar duidelijk, de gevolgde constructiestappen.

Opdracht 32

figuur 26



Gegeven zijn twee punten O en O' die elk centrum zijn van een lijnenbundel. De toegevoegde x en x' (opvolgend behorend tot de bundel O en de bundel O') staan loodrecht op elkaar.

🗎 Waarom is er hier sprake van een projectieve afbeelding φ van de bundel O op de bundel O' ?
Aanwijzing. Bepaal (eventueel met Cabri) de meetkundige plaats van het snijpunt X van de lijnen x en x'.

- 🗉 Is φ een involutie? Verklaar je antwoord.
- 🗉 Verklaar waarom φ geen perspectiviteit is.

De lijnen a, a' en b, b' behoren eveneens tot de bundels.

- 🗉 Wat valt er te zeggen van de verbindingslijn van het snijpunt van a, b' met het snijpunt van a', b?

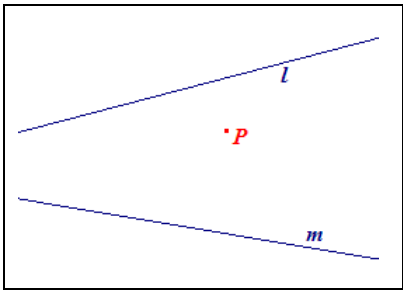
7 .Tot slot

We eindigen met twee constructie-opdrachten die te maken hebben met de theorie die behandeld is in dit werkblad.

Opdracht 33

Op een stuk papier zijn twee lijnen l en m getekend waarvan het snijpunt S buiten het papier valt. Ergens 'tussen' de lijnen ligt een punt P.

figuur 27

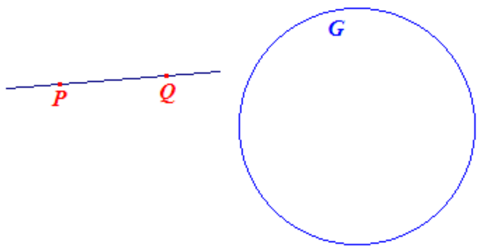


- 🗉 Construeer de lijn PS door slechts gebruik te maken van een liniaal.
  Voeg weer een afdruk van de figuur aan je verslag toe en geef een korte beschrijving van de constructie.
  Aanwijzing. Gebruik de figuur van de Stelling van Desargues.

Opdracht 34

(Naar een probleem van F.J. Servois, 1768-1847, Frankrijk.)

figuur 28



In een vlak terrein ligt een cirkelvormig obstakel G.
Links van het obstakel liggen de punten P en Q.

N.b. Het obstakel G hoeft niet noodzakelijkerwijs cirkelvormig te zijn.

- 🗉 Construeer nu een punt R rechts van G zo, dat P, Q, R op dezelfde lijn liggen, waarbij echter de lijn PQ *niet* door het obstakel heen kan worden verlengd.

8. Literatuur

[1] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons (1969).
[2] id.: *Projective Geometry*. New York: Springer-Verlag (1987).
[3] K. Döhlemann: *Projectieve Geometrie in synthetischer Behandlung*. Berlijn: Sammlung Göschen (1918).
[4] Lawrence Edwards: *Projective Geometry*. Phoenixville: Rudolf Steiner Institute (1985).
[5] Martin Kindt: *Lessen in projectieve meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (1993).
[6] Nick Thomas: *Projective Geometry*. Website: http://www.anth.org.uk/NCT/ .

Auteur: **Dick Klingens**
Titel: Cabri-werkblad / Projectieve meetkunde: lijnenbundels, harmonie, involutie
Versie: 1.0(a) / november 2005