Een meetkundige constructie van de som van een meetkundige rij

[Dick Klingens]

Iets verder dan Euclides deed

Er wordt door sommigen nog wel eens gedacht dat Euclides (hij leefde rond 300 v. Chr.) alleen over meetkunde heeft geschreven. Dat dat niet zo is, blijkt onder meer aan het einde van boek IX van zijn *Elementen* waarin hij de door ons wellicht wat lastig te doorgronden propositie 35 formuleerde:
Indien er willekeurig veel getallen zijn, opvolgend evenredig, en er worden van het tweede en laatste <getallen> afgenomen, gelijk aan het eerste, dan zal, zooals het overschot van het tweede tot het eerste, zoo het overschot van het laatste tot alle aan hem voorafgaande staan.
Wat Euclides hier schreef[1], heeft betrekking op een meetkundige rij a, ar, ar^2, ar^3, … (*opvolgend evenredige getallen*). En propositie 35 zegt dan in hedendaagse terminologie:

$$\frac{ar-a}{a}=\frac{ar^n-a}{a+ar+\cdots+ar^{n-1}}$$

waaruit de (ons) bekende formule voor de som S_n van de eerste n termen (de n-de partiële som) van die rij direct volgt:

$$S_n=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

Maar Euclides ging met die meetkundige rij niet veel verder. Hij gebruikte propositie 35 alleen voor de er op volgende bijzondere stelling over volmaakte getallen.[2]
Wij zullen in het onderstaande *wel* wat verder gaan, maar we blijven daarbij in de traditie van Euclides: we geven een meetkundige interpretatie van de somformule.

Constructie met een scherpe hoek φ

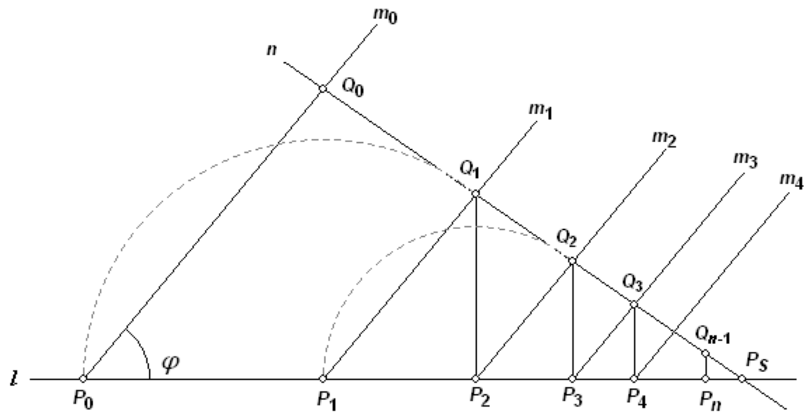
We weten dat bij een meetkundige rij a, ar, … met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S=\lim_{n\to\infty} a\frac{r^n-1}{r-1}=\frac{a}{1-r}$$

Het getal S wordt dan wel de 'som van de meetkundige rij' genoemd.
Wegens $-1 < r < 1$ kunnen we bij elke r een hoek φ vinden, waarvoor $r=\cos\varphi$. Voor deze waarden van r kunnen we φ berekenen met $\varphi=\arccos r$, met φ liggend tussen 0° en 180°, want we houden het hier maar bij graden.

We nemen φ eerst scherp.
Op een lijn l, die we opvatten als x-as, kiezen we de punten P_0 en P_1 zo, dat $P_0P_1 = 1$. Met P_0 als beginpunt tekenen we de halve lijn m_0 met $\angle(l,m_0)=\varphi$ (**zie figuur 1**).

Figuur 1



Vervolgens tekenen we met P_1 als beginpunt een halve lijn m_1 // m_0 en kiezen daarop het punt Q_1 zo, dat $P_1Q_1 = P_1P_0$ (= 1). Dan laten we uit Q_1 de loodlijn neer op l met voetpunt P_2 op l.
In driehoek $P_1Q_1P_2$ is nu $P_1P_2 = P_1Q_1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$, zodat:

$$P_0P_2 = 1 + \cos\varphi$$

En we herhalen deze werkwijze: met punt P_2 als beginpunt tekenen we een halve lijn m_2 // m_1 en kiezen daarop Q_2 zo, dat $P_2Q_2 = P_2P_1$. Enzovoorts.
Nu is:

$$P_2P_3 = P_2Q_2 \cdot \cos\varphi = P_1P_2 \cdot \cos\varphi = \cos^2\varphi .$$

En dus geldt:

$$P_0P_3 = 1 + \cos\phi + \cos^2\varphi$$

Voor het op deze manier geconstrueerde punt P_n op l geldt dan:

$$P_0P_n = 1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi + \cdots + \cos^{n-1}\varphi$$

Het lijkt erop dat we dit proces oneindig vaak moeten herhalen, maar, zoals we zullen zien, is eenvoudig – en meetkundig – aan te tonen, dat we aan de eerste twee stappen van het proces genoeg hebben om $\lim_{n\to\infty} P_0P_n$ te vinden.
We bekijken de rechthoekige driehoeken $P_1Q_1P_2$ en $P_2Q_2P_3$. Deze driehoeken zijn gelijkvormig; ze hebben immers beide een hoek φ en beide een hoek van 90°. De punten Q_1, Q_2 bepalen nu een rechte lijn n en daarop liggen dan ook, vanwege de gelijkvormigheid, de punten Q_3, Q_4, …, Q_{n-1}.
Voor scherpe φ snijdt n de lijn l in het punt P_S.
We beweren nu dat P_0P_S gelijk is aan de som van een meetkundige rij met reden $\cos\varphi$.

Bewijs. We hebben $P_1Q_1 = 1,\ P_2Q_2 = \cos\varphi,\ P_3Q_3 = \cos^2\varphi,\ \ldots$; voorwaar, een meetkundige rij met reden $\cos\varphi$.

De driehoeken $P_0Q_0P_S,\ P_1Q_1P_S,\ \ldots$ zijn alle gelijkvormig (*hh*); en er geldt: $P_0Q_0 = \frac{1}{\cos\varphi}$. Bij de eerste twee driehoeken in deze opsomming is dan:

$\frac{P_0P_S}{P_0Q_0} = \frac{P_1P_S}{P_1Q_1}$, of met $|P_0P_S| = S$, $\frac{S}{\frac{1}{\cos\varphi}} = \frac{S-1}{1}$, zodat $S \cdot \cos\varphi = S - 1$, waaruit volgt:

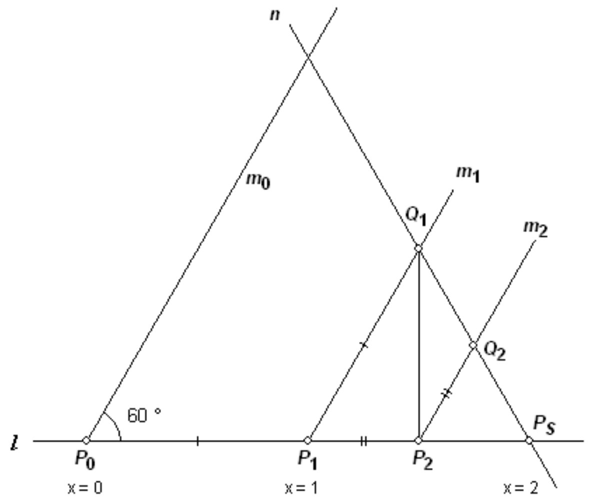
$$S = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$$

P_0P_S is dus gelijk aan de som van de meetkundige rij $1,\ \cos\varphi,\ \cos^2\varphi,\ \ldots$

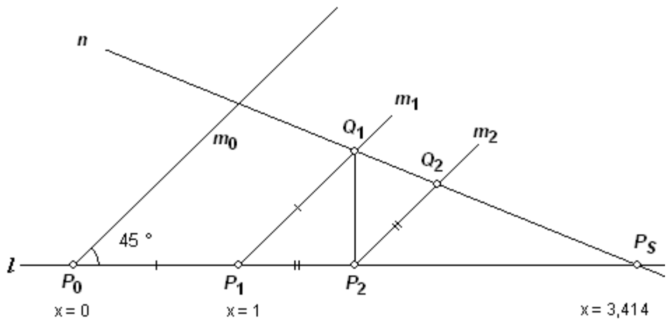
En dat we alleen de eerste twee stappen van het constructieproces nodig hebben om P_S te construeren, komt doordat de lijn n bepaald is door de punten Q_1 en Q_2.

Voorbeelden. Voor $\varphi = 60°$ hebben we $S = \dfrac{1}{1-\cos 60°} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (**zie figuur 2**). Het gaat hier dus om de som van de rij 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,…

Figuur 2



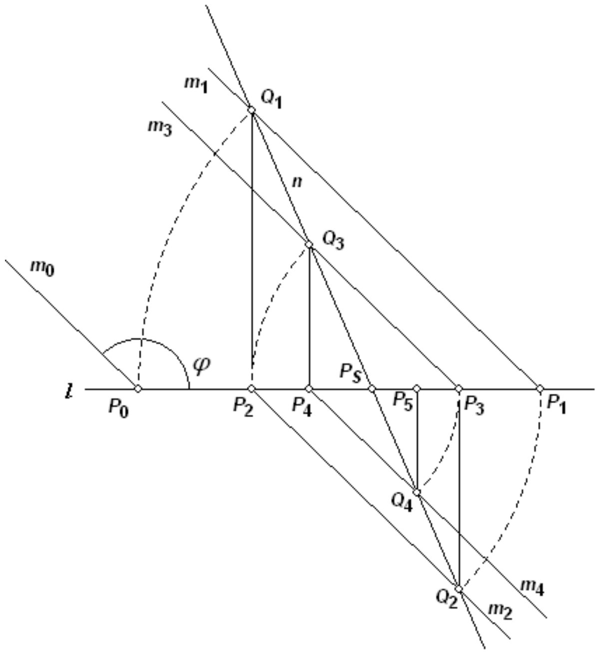
Figuur 3



Kiezen we $\varphi = 45°$ (we kijken nu naar de som $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{4}+...$), dan vinden we
$S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2} \approx 3,414$ (**zie figuur 3**).
Voor $\varphi = 90°$ ligt Q_1 op de loodlijn op l in P_1, zodat elke volgende Q_k ($k \geq 2$) samenvalt met P_1. En dan is ook $P_1 \equiv P_S$, zodat $S = 1$, hetgeen overeenkomt met de som van de rij 1, 0, 0, … (in dit geval is immers $r = \cos 90° = 0$).
Als φ nadert tot 0° ($r = 1$), nadert de lijn n tot de lijn l, waarbij de punten P_k (voor $k \geq 2$) naar rechts schuiven, immers de lengtes van de lijnstukken $P_{k-1}P_k$ naderen dan tot 1. De lijn n gaat horizontaal lopen en valt, in uiterste stand, samen met l. Het aantal snijpunten van n en l is dan oneindig groot.
De rij 1, 1, 1, … divergeert.

Constructie met een stompe hoek φ
Is de hoek φ stomp, dan moeten we bij de constructie rekening houden met het feit dat nu $\cos\varphi < 0$. In de vorige paragraaf (φ scherp) konden we eenvoudig de lengte $\cos^n \varphi$ van het lijnstuk P_nP_{n+1} optellen bij de som van de daaraan voorafgaande lijnstukken: $P_0P_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos^k \varphi$. Dat kan nu niet meer… Maar, we zullen zien dat we dit probleem kunnen oplossen door de halve lijnen m_k om en om in tegengestelde richting te tekenen.
De halve lijn m_0 maakt dus in P_0 een stompe hoek met de lijn l (**zie figuur 4**). Op de lijn $m_1 \mathbin{//} m_0$ door P_1 (waarbij weer $P_0P_1 = 1$) kiezen we ook nu Q_1 met $P_1Q_1 = P_1P_0$. Het punt P_2 vinden we weer met de loodlijn uit Q_1 op l. Nu is $P_1P_2 = -\cos\varphi$; echter, voor P_0P_2 hebben we daardoor toch:
$P_0P_2 = 1-(-\cos\varphi) = 1+\cos\varphi$
En we herhalen het constructieproces…

Figuur 4



Bewijs. In driehoek $P_2Q_2P_3$ geldt dan:

$$\frac{P_2P_3}{P_2Q_2} = \frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_2P_3}{-\cos\varphi} = -\cos\varphi$$

zodat $P_2P_3 = \cos^2\varphi$, waaruit weer volgt dat $P_0P_3 = 1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi$.

Voor een willekeurig punt P_n op l is ook in dit geval:

$$P_0P_n = 1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi + \cdots + \cos^{n-1}\varphi$$

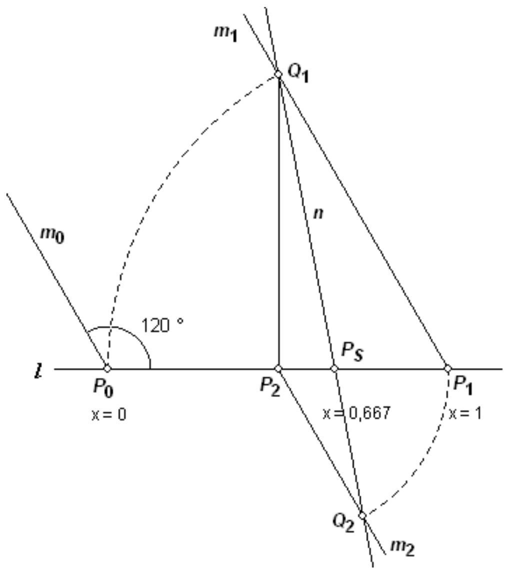
We krijgen twee stelsels geneste rechthoekige, en gelijkvormige, driehoeken $P_kQ_kP_{k+1}$ waarvan de hoekpunten Q_k weer op één rechte lijn n liggen. En deze lijn n snijdt de lijn l in het punt P_S.

Merk hierbij op dat de punten P_{2k} links van het punt P_S liggen, en de punten P_{2k+1} rechts van P_S. Daardoor naderen de partiële sommen van de rij dus afwisselend van de 'onderkant' en de 'bovenkant' tot S, afhankelijk van het optellen van een even of oneven aantal termen.

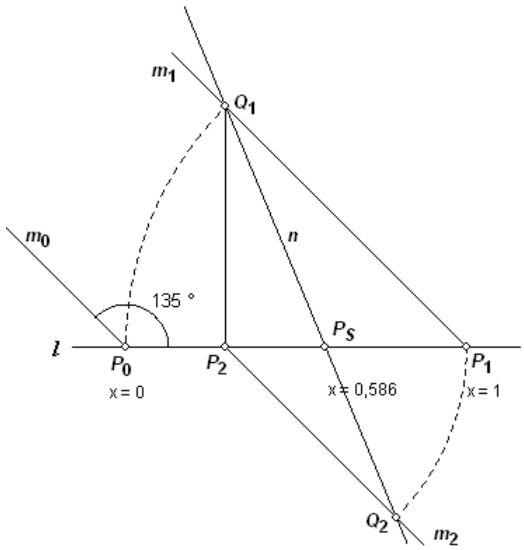
Voorbeelden. Voor $\varphi = 120°$ krijgen we de meetkundige rij met $u_n = (-\frac{1}{2})^n$ als algemene term, zodat

$$S = \frac{1}{1-\cos 120°} = \frac{1}{1+\cos 60°} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$ (**zie figuur 5**).

Figuur 5



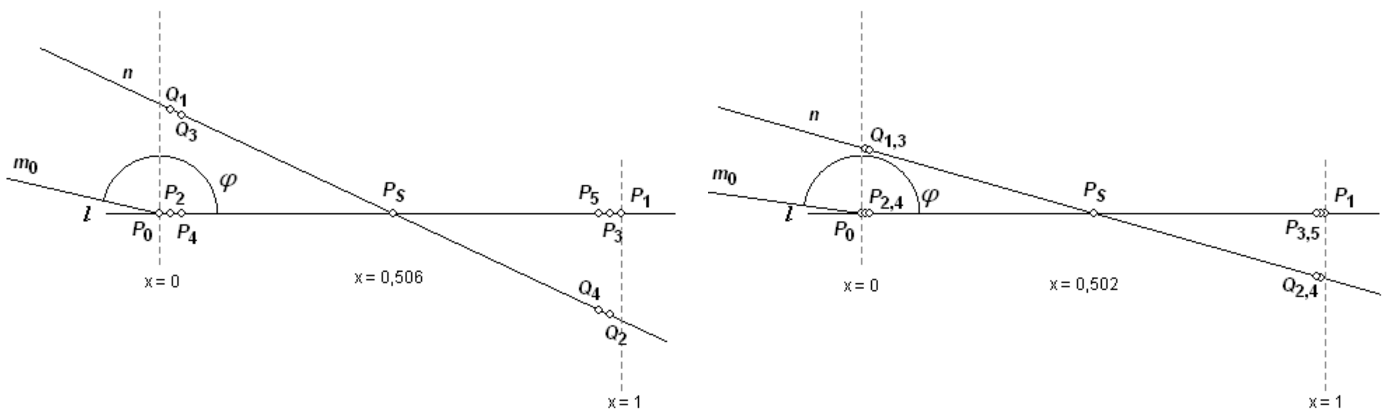
Figuur 6



Kiezen we φ=135°, dan is $S = \dfrac{1}{1-\cos 135^\circ} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2} \approx 0,586$ (**zie figuur 6**).

Als φ nadert tot 180°, dan bewegen de punten P_{2k} zich naar P_0 en de punten P_{2k+1} naar P_1. De punten Q_{2k} en Q_{2k+1} naderen tot een positie vlak bij de loodlijnen op l in opvolgend P_1 en P_0. Het punt P_S nadert daardoor tot het midden van P_0P_1 (**zie figuur 7**, waarin links $\varphi = 167^\circ$, en rechts $\varphi = 172^\circ$).

Figuur 7



In dit geval ($r = \cos\varphi = -1$) komt hetgeen we gevonden hebben dus overeen met de formule voor S:

$$S = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

Echter, voor even n hebben we $\lim_{n\to\infty} P_0P_n = 0$, en voor oneven n is $\lim_{n\to\infty} P_0P_n = 1$.

Beide zaken lijken tegenstrijdig, maar voor $r = -1$ hebben we de meetkundige rij

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

waarvan de rij van partiële sommen afwisselend gelijk is aan 1 en 0.

Het was ook Leibniz (1646-1716) die meende, dat de 'werkelijke' som van die rij gelijk is aan $\frac{1}{2}$, niet omdat dat strookte met bovenstaande meetkundige constructie, maar omdat de som 'met gelijke kansen' gelijk was aan 1 en 0.

Dynamische meetkunde

Bij het spreken over limieten gebruiken we vaak uitdrukkingen als 'gaan naar' en 'naderen tot'. Het aardige van bovenstaande constructies is, dat we die uitdrukkingen echt 'tot leven' kunnen zien komen als we een dynamisch meetkundeprogramma zoals Cabri gebruiken: punten naderen inderdaad tot hun limiet(positie). Figuur 7 geeft al wel een aardige indruk, te meer daar uitkomsten van berekeningen zichtbaar veranderen, maar toch…

Om de lezer ook in staat te stellen met de dynamiek van de behandelde constructies kennis te maken zijn op de website van de auteur[3] enkele CabriJava applets opgenomen. De gebruikte Cabri-figuren zelf kunnen daar ook worden gedownload.

Noten

[1] In vertaling van Dr. E.J. Dijksterhuis in '*De Elementen van Euclides II*' (Groningen: P. Noordhoff N.V., 1930. Deel II, pp. 164-167).

[2] Prop. IX-36 luidt in hedendaagse zetting: *Als de rij* 1, 2, 4, …, 2^{n-1} *gegeven is, waarbij* $S_n = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}$ een priemgetal is, dan is $2^{n-1} \cdot S_n$ *een volmaakt getal*. (zie bijvoorbeeld http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html)

[3] Zie daarvoor: http://www.pandd.nl/rijconst/. Let wel, de door de lezer daarbij te gebruiken internetbrowser dient te beschikken over Java-mogelijkheden.

Literatuur

- Th. L. Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications Inc. (1956), Volume II, pp. 420-426.
- E. Maor: *Geometric Constructions of the Geometric Series*. In: International Journal of Mathematics Education. Volume 8, no. 1 (January 1977), pp. 89-96.
- G.E. Martin: *Geometric Constructions*. New York: Springer Verlag (1998).

Over de auteur

Dick Klingens (mailto:dklingens@pandd.demon.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel en is tevens eindredacteur van Euclides.