TI-83 werkblad – Logaritmen (2)

Dit werkblad is een vervolg op het "TI-83 werkblad – Logaritmen". Er wordt van uit gegaan dat de leerling dat werkblad (hieronder wordt het aangegeven met L1) geheel heeft doorgewerkt en zich de daarin behandelde theorie en vaardigheden heeft eigengemaakt.
Voorts wordt ook het werken met *negatieve* en *gebroken exponenten* bekend verondersteld.

1. Allereerst

Het is zeker *niet* de bedoeling dat *elke* logaritme-berekening die je moet uitvoeren, met de GR gebeurt. Bij berekeningen van ${}^3\log 9$, ${}^5\log 1$, ${}^2\log 32$, … kan je de waarden immers direct vinden door gebruik te maken van een schrijfwijze met *exponenten*:

${}^3\log 9 = {}^3\log 3^2 = 2$ ${}^5\log 1 = {}^5\log 5^0 = 0$ ${}^2\log 32 = {}^2\log 2^5 = 5$

Uit deze voorbeelden zie je ook dat logaritmen eigenlijk niets anders zijn dan *exponenten*:

- ${}^3\log 9$ is gelijk aan de exponent van 3 die 9 oplevert: 2 dus; immers $3^2 = 9$;
- ${}^2\log 32$ is de exponent van 2 die 32 oplevert: 5; immers $2^5 = 32$.

N.b. Schrijven we ${}^2\log 32$, dan heet het getal 2 het *grondtal* van de logaritme; bij ${}^3\log 9$ is 3 het grondtal.

Opdracht 1

Bereken **zonder** GR en schrijf daarbij de getallen waarvan de logaritmen moeten worden berekend, steeds met behulp van exponenten.

${}^2\log 4$	${}^5\log 625$	${}^6\log 1296$
${}^2\log \dfrac{1}{8}$	${}^3\log \dfrac{1}{81^2}$	$\log \dfrac{1}{0{,}001}$ (geen grondtal, dus …)
${}^{\frac{1}{2}}\log \dfrac{1}{8}$	${}^{\frac{1}{2}}\log 8$	${}^3\log \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$
${}^8\log 16$	${}^3\log \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	${}^{16}\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
${}^{100}\log \dfrac{1}{10}$	${}^{\sqrt{5}}\log \dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$	${}^{\sqrt{a}}\log \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^3}}$

2. Definitieformule

We hebben gezien: ${}^a\log b$ is gelijk aan de exponent van a die b oplevert.

Stellen we ${}^a\log b = x$, dan geldt dus: $a^x = b$.

In de formule $a^x = b$ kunnen we op de plaats van het getal x daarom ook ${}^a\log b$ schrijven. Dus:

$$\boxed{a^{{}^a\log b} = b}$$

Dit wordt wel de *definitieformule* van de logaritme genoemd.

Belangrijk!

${}^a\log b = c$ en $a^c = b$ zijn twee *gelijkwaardige formules*: ze betekenen precies hetzelfde; ze leggen dezelfde relatie tussen de getallen a, b, c vast.
We zullen deze gelijkwaardigheid dan ook enkele keren in hetgeen volgt toepassen.

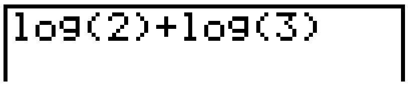
Opdracht 2
Bereken met gebruikmaking van de definitieformule van de logaritme (en zonder GR):

$2^{\,^{2}\log 3}$	$2^{\,^{2}\log 8}$	$3^{\,^{3}\log 7}$
$(7^{\,^{7}\log 3})^{\,^{3}\log 5}$	$(a^{\,^{a}\log b})^{\,^{b}\log c}$	$a^{\,^{a}\log b\,\cdot\,^{b}\log c}$

In hetgeen volgt zullen we enkele andere eigenschappen van logaritmen bekijken.

3. De somregel

- Bereken met de GR de uitkomst van: log 2 + log 3.



N.b. Let op het juiste gebruik van de haakjes op de GR (>>>)!
En, geef het antwoord met vier cijfers rechts van de komma; dat heet ook wel *in vier decimalen*.

Bereken ook: log 6.

- Wat merk je op als je beide antwoorden vergelijkt?

Om het grondtal van een logaritme te veranderen, zeg maar om logaritmen met andere grondtallen dan het grondgetal 10 te kunnen berekenen met de GR, gebruiken we steeds de volgende formule (zie werkblad L1):

$$\boxed{^{g}\log a = \frac{\log a}{\log g}}$$

(we veranderen op deze manier het grondtal g in het grondtal 10).

Opdracht 2
Maak van bovenstaande formule gebruik om (dit keer dus weer met je GR) te berekenen:

a. $^{3}\log 4 + {}^{3}\log 6$

b. Bereken ook: $^{3}\log 24$.
c. Wat merk je op als je beide antwoorden vergelijkt?

Uit het bovenstaande heb je vast en zeker geconcludeerd dat
$$^{3}\log 4 + {}^{3}\log 6 = {}^{3}\log 24$$
en dat
$$\log 2 + \log 3 = \log 6$$

In een volgende opdracht ga je de zogenoemde **somregel** voor logaritmen 'bewijzen'.
Die somregel luidt (voor elk toegestaan grondtal p):

$$\boxed{^{p}\log a + {}^{p}\log b = {}^{p}\log(ab)}$$

In woorden: de som van de p-logaritmen van twee getallen is gelijk aan de p-logaritme van het product van die getallen.

Opdracht 3
Waarom zou je ook wel van de **productregel** voor logaritmen kunnen spreken?

Opdracht 4
a. Als we schrijven $^{p}\log a = x$ en $^{p}\log b = y$, dan is $a = p^{\cdots\cdots}$ en $b = \ldots\ldots$ (vul aan!).

b. Waarom is dan $ab = p^{x+y}$?
En hieruit volgt dan: $x + y =$ …… (vul aan met een logaritme!).

c. Zodat: ${}^{p}\log a + {}^{p}\log b = x + y =$ ...... (vul aan!).

4. De verschilregel

Opdracht 5

a. Waarom geldt: ${}^{p}\log x = {}^{p}\log(xy) - {}^{p}\log y$?
Aanwijzing. Kijk eens naar de productregel voor ${}^{p}\log(xy)$.

b. Herschrijf de formule van Opdracht 5a als je weet dat $x = \frac{a}{b}$, $y = b$.

De formule die je in Opdracht 5b hebt afgeleid, heet de **quotiëntregel**, ook wel **verschilregel**, voor logaritmen.

Opdracht 6

a. Bereken met de GR: ${}^{4}\log 243$ (in 4 decimalen!)
Let wel: $243 = 3^5$.

b. Bereken ook (>>>): $5 \cdot {}^{4}\log 3$

```
5*log(3)/log(4)
```

c. Conclusie: ${}^{4}\log 3^5 = 5 \cdot {}^{4}\log 3$.
Is deze conclusie juist of niet juist?

d. We kunnen dit ook direct uit de somformule afleiden.

$$\begin{aligned} {}^{4}\log 243 = {}^{4}\log 3^5 &= {}^{4}\log(3 \cdot 3^4) \\ &= {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 3^4 \\ &= {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 3 + {}^{4}\log 3 \\ &= 5 \cdot {}^{4}\log 3 \end{aligned}$$

Hoeveel keer is in bovenstaande afleiding de somformule toegepast?

Algemeen geldt dan ook (voor 'toegestane' waarden van p):

$$\boxed{{}^{p}\log a^q = q \cdot {}^{p}\log a}$$

Opdracht 7

a. Schrijf ${}^{p}\log a^3 b^7 c^2$ als een som van p-logaritmen.

b. Herleid tot een som (waarin ook mintekens kunnen voorkomen): ${}^{p}\log \dfrac{(a^2 b)^{1/3}}{x^4 \sqrt{q}}$.

5. Een ander grondtal

Opdracht 8

We gebruikten hierboven al een enkele keer de formule: ${}^{g}\log a = \dfrac{\log a}{\log g}$.

a. Bereken nu met de genoemde formule: ${}^{6}\log 39$. Rond je antwoord af op 4 decimalen.

```
log(39)/log(6)
```

b. Bereken ook (afgerond op 4 decimalen): ${}^{39}\log 6$.

```
log(6)/log(39)
```

c. Bereken tenslotte: ${}^{6}\log 39 \cdot {}^{39}\log 6$.

d. Kan je een verklaring geven voor deze uitkomst?

e. Bewijs (dus *zonder* GR!) met de genoemde formule, dat ${}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 5 = {}^{2}\log 5$.

f. Bewijs, ook weer met de formule, dat (voor toegestane waarden van p en q): ${}^{p}\log q \cdot {}^{q}\log a = {}^{p}\log a$.

Opdracht 9

We stellen ${}^{a}\log b = x$.

a. Dan is: $a^{x} = \ldots\ldots$ (vul aan!).

b. Dan volgt hieruit: $a = b^{\cdots\cdots}$ (vul weer aan!).

Als je deze laatst uitdrukking goed hebt aangevuld, dan volgt daaruit $\frac{1}{x} = {}^{b}\log a$.

Zodat we vinden:

$$\boxed{{}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log a = 1}$$

Opdracht 10

- Ga nog eens na (in werkblad L1) hoe de in Opdracht 7 genoemde formule tot stand gekomen is. Is er een bewijs voor die formule gegeven?

Stel nu ${}^{a}\log b = x,\ {}^{b}\log c = y$.

a. Dan is (en vul weer aan): $b = a^{\cdots\cdots}$ en $c = b^{\cdots\cdots}$.

b. Waarom geldt dan ook: $c = a^{xy}$?

c. Deze laatste uitdrukking betekent niet anders dan: ${}^{a}\log c = xy$. Waarom is dat zo?

Zetten we de gevonden resultaten nu op een rijtje, dan zien we:

$${}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c = xy = {}^{a}\log c$$

En hieruit volgt direct dat: ${}^{b}\log c = \dfrac{{}^{a}\log c}{{}^{a}\log b}$ (waarom?), en dat is dezelfde formule als: $\boxed{{}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}}$.

Voor p mogen we in die formule elk toegestaan grondtal kiezen (en bij gebruik van de GR is dat uiteraard het getal 10).

Opdracht 11

Bewijs dat ${}^{a^2}\log b^2 = {}^{a}\log b$.

Opdracht 12

(*Toepassing van de somregel.*) We weten dat ${}^{p}\log 12 = a$ en dat ${}^{p}\log 18 = b$.

Druk dan ${}^{p}\log 2$ uit in a en b. Doe hetzelfde met ${}^{p}\log 3$.

